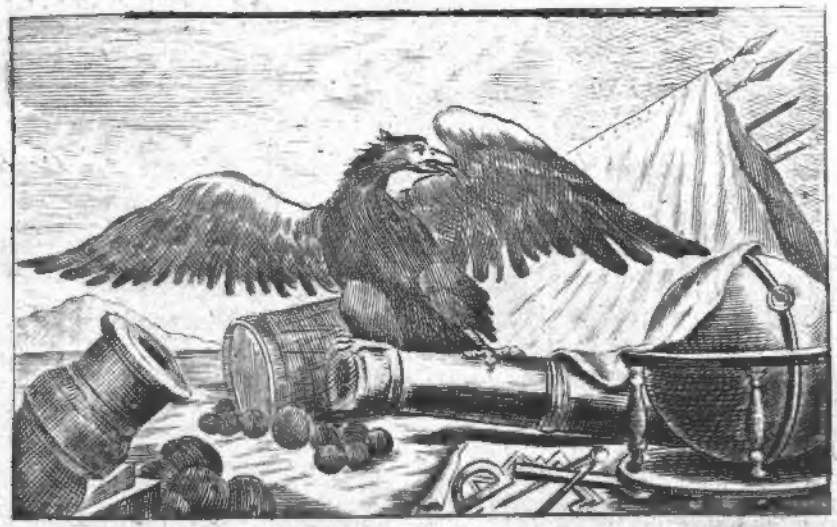
Ab 8

4°

Nur f. LS u. A.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNE'E MDCCLXVIII.



A' BERLIN

CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXX.

Ex
Bibliotheca Regia
Berolinensi.

Imprimé
par ordre de l'Académie.

TABLE.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPE'RIMENTALE.

Obſervation *concernant une volatiliſation remarquable d'une partie de l'eſpece de pierre, à laquelle on donne les noms de* Floſſe, Flûſſe, Flus-Spaht, *& auſſi celui d'*Heſperos; *laquelle volatiliſation a été effectuée au moyen des acides*, par M. MARGGRAF. p. 3

Diſſertation phyſico - œconomique *ſur la maniere utile dont on peut employer quelques unes des grandes eſpeces de la Plante dite en Allemand* Riedgras, (Carex Linnæi, Gen. Plant. 482.) *en particulier pour faire de médiocres ou de petites chauſſées ſur des lieux marécageux*, par M. GLEDITSCH. 12

Penſées *ſur la néceſſité d'une* Ecole vétérinaire, *avec des projets ſur la maniere de l'établir, dreſſés à la réquiſition du Grand Directoire Royal, & ſoumis à l'examen de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres*, par M. COTHENIUS. 42

Sur *la viteſſe du Son*, par M. LAMBERT. 70

Mémoire *ſur la partie photométrique de l'art du Peintre*, par M. LAMBERT. 80

CLASSE DE MATHE'MATIQUE.

Additions au Mémoire *ſur la réſolution des équations numériques, imprimé dans le Volume de* 1767, par M. DE LA GRANGE. 111

Nouvelle Méthode *pour réſoudre les problemes indéterminés en nombres entiers*, par M. DE LA GRANGE. 181
Nouvelle Méthode *pour réſoudre les équations littérales par le moyen des ſéries*, par M. DE LA GRANGE. 251
Obſervations *trigonométriques*, par M. LAMBERT. 327

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPE'CULATIVE.

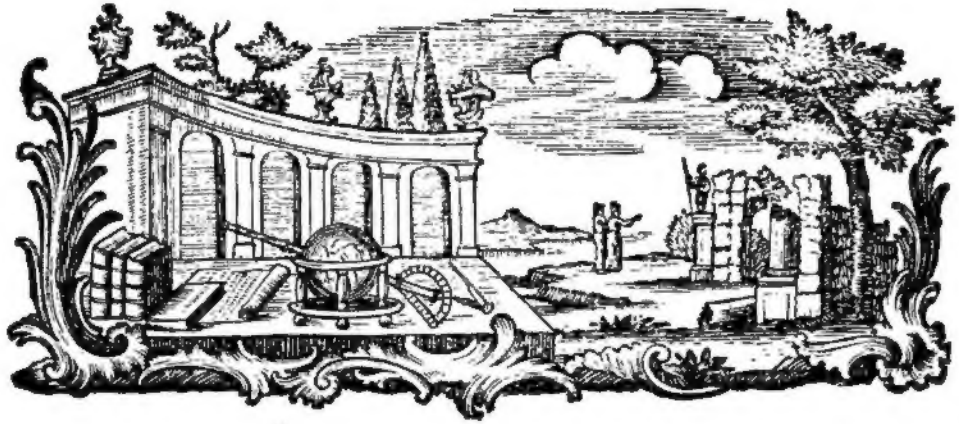
Conſidérations *ſur ce qu'on peut regarder aujourd'hui comme le but principal des Académies, & comme leur effet le plus avantageux.* Second Diſcours. Par M. FORMEY. 357
De *l'uſage du Principe de la Raiſon ſuffiſante dans les Loix générales de la Méchanique.* Cinquieme Mémoire ſur les principes métaphyſiques. Par M. BE'GUELIN. 367
Mémoire *ſur un probleme de la doctrine du Hazard*, par M. JEAN BERNOULLI. 384
Réflexions *ſur la nature & la néceſſité des idées obſcures*, par M. DE BEAUSOBRE. 411

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.

De *la Bienfaiſance conſidérée entant qu'agiſſante*, par M. TOUSSAINT. 421
Mémoire *ſur cette Queſtion: Le Peuple eſt-il juge compétent de l'Eloquence?* Par M. BITAUBE'. 445
Plan raiſonné *d'une hiſtoire univerſelle & diplomatique de l'Europe depuis Charlemagne juſqu'à l'an* 1740. Par M. WEGUELIN. 472
Sur *les Phyſionomies*, par M. DE CATT. 494
Obſervations *d'Eclipſes des Satellites de Jupiter faites à l'Obſervatoire Royal*, par M. JEAN BERNOULLI. 501.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.



OBSERVATION
CONCERNANT UNE VOLATILISATION REMARQUABLE
D'UNE PARTIE DE L'ESPECE DE PIERRE, À LAQUELLE ON DONNE LES NOMS DE *FLOSSE, FLÜSSE, FLUS-SPAHT,* ET AUSSI CELUI D'HESPEROS; LAQUELLE VOLATILISATION A ÉTÉ EFFECTUÉE AU MOYEN DES ACIDES. (*)

PAR MR. MARGGRAF.

Traduit de l'Allemand.

I.

Quoique l'eſpece de pierre dont je vais parler, porte le même nom que celle dont j'ai déjà traité dans les Tomes V & VI de nos Mémoires, & qu'on l'appelle également *Flus-Spaht;* on doit pourtant les diſtinguer ſoigneuſement l'une de l'autre. On les emploie toutes deux avec beaucoup de ſuccès dans la

(*) Lû le 6 Septembre, 1768.

fuſion des métaux qu'on dégage de leurs minieres; & leur uſage eſt même quelquefois indiſpenſable pour faciliter & accélérer la fuſion des minéraux qui ſe fondent difficilement. Cela n'empêche pas que leurs effets & leur compoſition ne different conſidérablement; & cette différence eſt déjà ſenſible dans la figure même. Car celle qui a déjà fait l'objet de mes Mémoires précédens, offre toujours une configuration lamelleuſe: avec cela elle n'a aucune tranſparence, & ſa couleur tire
Planche I. à celle du lait. (Voyez Figure 3.) L'autre au contraire a une figure plus cubique, elle eſt à demi-tranſparente, & on en trouve de diverſes couleurs. (Voyez Fig. 1. & 2.) Celle-ci ſe trouve auſſi chez les Apoticaires ſous les noms de *Pſeudo-Smaragdus*, de *Pſeudo-Hiacynthus*, & de *Pſeudo-Amethyſtus*, ſuivant les variétés de ſa couleur. Les ouvriers des Mines l'appellent *Berg-Bluhme*, *Metall-Bluhme*, *Metall-Mutter*, (fleur ou matrice de métal,) & ces dénominations ſont peut-être aſſez bien fondées. Au reſte cette eſpece de pierre ſe trouve dans toutes les mines, quoique le plus ſouvent dans celles d'étain, & dans toutes les contrées, par exemple, à Stollberg, à Quedlimbourg, à Strausberg, & dans pluſieurs endroits du Hartz. Il y en a auſſi dans les montagnes de Saxe, de Boheme, de Suede, & peut-être dans celles de divers autres pays.

II. Outre la diverſité de figure dont il a été fait mention, ces deux eſpeces de Spath different encore en ce que la premiere ſe laiſſe plus aiſément entamer, ſoit avec la lime, ſoit en raclant avec un coûteau, & par conſéquent qu'elle eſt plus molle que celle dont nous allons parler, quoique cette différence n'aille pas fort loin. Ajoutez que la premiere, expoſée à une chaleur preſque ardente, étincelle à la vérité, mais fort foiblement, après quoi elle éclate en petits morceaux; au lieu que l'autre, à un ſemblable degré de feu, jette une lumiere beaucoup plus brillante, & qu'on ſe délecte à conſidérer; mais enſuite elle ſe briſe, comme celle de Saxe, en morceaux, qu'on a ſeulement plus de peine à réduire en poudre, que ceux de la précédente.

III.

III. La différence de ces deux eſpeces de Flus-Spaht s'étend encore plus loin, quand, après une calcination convenable, on les broie en poudre très fine, & on les pêtrit en une ſorte de pâte avec le mucilage de tragacanthe, ou avec quelque autre matiere viſqueuſe délayée dans de l'eau, par exemple, la gomme d'Arabie; après quoi on les fait ſécher exactement, & en les rangeant par couches on les calcine à découvert ſur les charbons. Car alors l'eſpece de Saxe N. 3. donne toujours un *præparatum* qui, après le refroidiſſement, a une forte odeur de ſouffre, & qui attire la lumiere, particulierement celle du jour, en ſorte qu'il reluit dans l'obſcurité; au lieu que l'autre eſpece, traitée de la même maniere, n'a aucune odeur de ſouffre, n'attire point la lumiere, & ne luit point dans l'obſcurité.

IV. J'ai fait voir diſtinctement, dans les Tomes V & VI de nos Mémoires, que le *Flus-Spaht* de Saxe eſt compoſé d'une terre calcaire & de l'acide du vitriol, & qu'ainſi on doit le mettre au rang des pierres gypſeuſes, ou ſélénitiques; à cauſe de quoi pêtri avec le mucilage de tragacanthe, & calciné enſuite par couches à découvert ſur les charbons, il rend une odeur de ſouffre, & avec moitié autant ou plus d'un ſel alcali fixe tiré du regne végétal, & qui, après avoir été rougi au feu, a été enſuite leſſivé & cryſtalliſé, il donne un vrai tartre vitriolé, c'eſt à dire, un ſel moyen amer, qui ſe diſſout difficilement dans l'eau, & qui eſt compoſé de l'acide du vitriol & d'un ſel alcali végétal, laiſſant dans le filtre la terre calcaire qui lui étoit unie. Mais tout cela ne ſe trouve point dans le *Flus-Spaht* dont nous avons à parler préſentement. Car, quoique je ne vouluſſe pas nier qu'il s'y trouve une terre calcaire, ou du moins une matiere fort ſemblable à cette terre, je n'ai pu juſqu'ici y découvrir l'acide du vitriol. En effet, ayant bien mêlé deux parties de cette terre avec une partie d'un ſel alcali fixe tiré du tartre, je les ai fortement calcinées, leſſivées avec de l'eau, filtrées, & j'ai diſpoſé la liqueur qui avoit paſſé par le filtre à la cryſtalliſation au moyen d'une douce évaporation; après quoi je n'ai pas trouvé la moindre particule d'un ſemblable ſel amer, tel que

donne le *Flus-Spaht* de Saxe; mais mon ſel alcali végétal, après toutes les épreuves auxquelles je l'ai ſoumis, étoit demeuré un vrai ſel alcali pur, ſans la moindre altération, quoiqu'un peu plus cauſtique. Dès-là donc qu'il ne s'étoit engendré ici aucun ſel amer, c'eſt à dire, aucun tartre vitriolé, ou *arcanum duplicatum*, on ne pouvoit en inférer la préſence de l'acide du vitriol dans cette eſpece de pierre; & il eſt clair en conſéquence que ce *Flus-Spaht* doit être compoſé d'un tout autre mêlange de parties que celui de Saxe.

V. Ayant pris deux parties du *Spaht* dont il eſt queſtion dans ce Mémoire, & les ayant mêlées avec une partie du ſalpetre le plus pur, je les ai diſtillées d'une retorte de verre à laquelle j'avois adapté un récipient, en donnant à la fin un feu véhément. Il parut d'abord quelque vapeur rouge, avec un petit nombre de gouttes d'un liquide qui à l'épreuve ſe fit connoître pour un véritable acide du nitre, étant entré dans une efferveſcence réguliere avec la ſolution de ſel de tartre, & ayant fourni un vrai nitre priſmatique. Il y en aura peut-être qui concluront de là la préſence de l'acide vitriolique dans notre pierre, moyennant que le réſidu donnât auſſi un ſel moyen amer, c'eſt à dire, un tartre vitriolé. Mais ayant encore bien calciné dans un creuſet couvert ce réſidu qui avoit pris de l'humidité à l'air, l'ayant bien leſſivé avec de l'eau nette diſtillée, l'ayant enſuite filtré & diſpoſé à la cryſtalliſation par l'évaporation, j'ai bien eu quelques cryſtaux, mais d'une toute autre eſpece que le ſusdit ſel moyen, ou tartre vitriolé; car ils avoient un goût manifeſtement alcalin, & étoient avec cela aſſez cauſtiques; ils ſe fondoient à l'air, & dans toutes ſortes de circonſtances ils montroient les vrais caracteres d'un ſel alcali du Regne végétal. Cela fait voir que l'acide du vitriol n'eſt pas toujours la cauſe de la ſéparation de l'acide nitreux, mais qu'il doit intervenir un autre corps, qui étant mêlé avec le nitre, procure la ſéparation de l'acide. En effet elle arrive auſſi avec le ſable blanc, l'argille blanche, & diverſes autres additions de matieres, où l'on n'eſt pas encore aſſuré de l'exiſtence de l'acide du vitriol. Au contraire, le *Flus-Spaht* de Saxe éprouve de

tout

tout autres modifications; car en diſtillant la même proportion, ſavoir deux parties de ce *Flus-Spaht* avec une partie de nitre, il en ſort bien auſſi quelque vapeur jaune; mais le réſidu après la ſolution, la filtration, l'évaporation & la cryſtalliſation, eſt un vrai ſel moyen amer, ce qu'on nomme *arcanum duplicatum*, ou tartre vitriolé, qui eſt compoſé de la partie alcalino-ſaline du nitre & de l'acide du vitriol.

VI. Tant & de ſi conſidérables différences entre ce *Flus-Spaht* & celui de Saxe, me conduiſoient néceſſairement à croire, que malgré la reſſemblance de leurs noms, & leur uſage commun dans la fuſion des métaux, il y a beaucoup de différence dans le mêlange de leurs parties. Cela me fit entreprendre l'examen de ce *Flus-Spaht* par une autre voie que celle que j'avois ſuivie avec celui de Saxe; & je me déterminai pour celle de la ſéparation par les acides, dont j'avois fait un uſage utile avec la Pierre ſerpentine & d'autres ſemblables, comme on peut le voir dans le Tome II. de mes Ecrits Allemands. Je me pourvus donc pour cet effet d'une quantité de cette pierre, & comme celle dont je poſſédois le plus étoit l'eſpece verte qu'on nomme *Pſeudo-Smaragdus*, j'en fis choix préférablement à celles des autres couleurs, qui ne laiſſent pas de reſſembler à la verte dans toutes leurs circonſtances & par tous leurs rapports, pourvu qu'on les ait préalablement purifiées des parties calcaires étrangeres qui s'y trouvent ſouvent attachées. Comme il ſe trouvoit auſſi de cette matiere étrangere adhérente à l'eſpece verte, je la ſéparai ſoigneuſement avec un marteau des parties pures, je lavai à pluſieurs repriſes ces parties pures avec de l'eau nette & même diſtillée, je les nettoyai de toute la pouſſiere qui pouvoit y tenir, je les fis ſécher & les conſervai pour l'uſage.

VII. Ce fut au commencement de l'année 1764 que je fis les eſſais ſuivans ſur cette eſpece de pierre. J'en calcinai de purifiée & deſſéchée de la maniere ſusdite, ſeize onces, dans un creuſet de Heſſe net, bien couvert, à un feu véhément, pendant deux heures; & après le refroidiſſement, je trouvai que le déchet n'alloit qu'à un demi-lot, perte qui étoit fort peu conſidérable, & qui ne pouvoit gueres ſe rapporter

porter qu'à l'humidité qui y étoit demeurée: ce qui prouve que cette pierre par elle-même eſt fort peu ſuſceptible de volatiliſation au feu. Je pilai cette pierre que la calcination avoit rendue un peu tendre dans un mortier de verre net, la réduiſant dans la pouſſiere la plus déliée, que je lavai avec beaucoup d'eau, ce qui la délaya encore davantage; je la laiſſai enſuite repoſer, & je la fis exactement ſécher. J'en mêlai ℥ij avec parties égales d'huile de vitriol d'Angleterre, blanche, nette & non fumante, ce que j'indique afin qu'on ne prenne pas le ſublimé que j'obtins pour des parties d'huile de vitriol fumante qui ſe feroient élevées. Je verſai deſſus un peu d'eau diſtillée, afin de rincer & de faire deſcendre l'huile de vitriol qui s'étoit arrêtée au col; je mis ce mêlange dans une coupelle de ſable, après y avoir adapté & bien luté un récipient, j'en fis la diſtillation au plus petit degré, juſqu'à ce que la plus grande partie de l'eau eût paſſé; après quoi, ayant augmenté le degré du feu, il ſe montra dans le col de la retorte un beau ſublimé blanc, qui s'accrut de plus en plus, & qui, le feu ayant encore été pouſſé à un plus haut degré, prit l'apparence d'un beurre d'antimoine, & ſe fondit comme ce beurre au moyen d'un charbon embraſé tenu près du col de la retorte. Le feu ayant reçu un dernier accroiſſement juſqu'à l'incandeſcence, il ſe ſublima encore quelque choſe à la fin, mais qui ne ſe fondoit pas comme le précédent au charbon ardent.

Lorſque j'ouvris le récipient, le liquide qui s'y trouva, avoit une odeur preſque ſemblable à celle de l'acide des fourmis, & ne ſentoit abſolument point l'eſprit volatil de ſouffre; ce qui arrive cependant toutes les fois que ce travail ſe fait avec une pierre qui n'a pas été calcinée, ou qui ne l'a pas été aſſez longtems.

VIII. Cet eſſai fait en petit m'anima à le réitérer ſur une plus grande quantité de cette pierre. J'en pris donc de celle de l'eſpece verte qui avoit été pilée fort fine, mais qui n'avoit pas été ſi longtems calcinée. Je mis de ce *Flus-Spaht* verd, ou *Pſeudo-Smaragdus*, 8 onces dans une retorte de verre net; je verſai deſſus 8 onces d'une huile de

de vitriol d'Angleterre claire; je rinçai ce qui étoit demeuré attaché au col avec environ trois onces d'eau diſtillée, en le faiſant tomber tout à fait au fond; je ſecouai bien le tout pour en mêler les parties enſemble, & auſſitôt il s'éleva une vapeur de ſouffre ſuffoquante, & d'abord après un ſublimé blanc, qui en ſe refroidiſſant tomba en pouſſiere & s'attacha au col de la retorte; ſurquoi j'adaptai d'abord un récipient que je tenois tout prêt, je le lutai bien, je mis la retorte dans une coupelle de ſable; je donnai d'abord un feu doux, & après que l'humidité ſuperflue eut paſſé, il s'éleva encore davantage d'un ſemblable ſublimé, dont il s'attacha toujours plus au récipient à proportion de l'augmentation de la chaleur; &, comme dans l'eſſai en petit, §. VII. il prit la conſiſtance d'un beurre d'antimoine, & ſe laiſſa fondre au moyen d'un charbon embraſé. Quand le feu eut été augmenté juſqu'à l'incandeſcence, il parut, encore comme dans le premier eſſai, un ſublimé que le charbon ardent ne fondoit pas; mais, après des recherches ultérieures, ce ſublimé ſe trouva différent de celui qui avoit été produit dans l'Expérience précédente. Quand la retorte refroidie eut été briſée, il s'y trouva un réſidu de 12 onces, de façon que 4 onces de l'huile de vitriol s'étoient inſinuées dans la pierre; le fond de la retorte avoit des trous çà & là, comme ſi l'on y avoit tiré avec de la dragée; ce qui témoigne aſſez la propriété fondante dont cette pierre eſt douée.

IX. Le récipient contenoit le liquide qui avoit paſſé, avec une bonne quantité de ſublimé, dont pourtant il s'étoit élevé à la fin une portion aſſez conſidérable dans le col de la retorte: ce liquide avoit, auſſi bien que le ſublimé, une forte odeur de ſouffre. Je détachai tout le ſublimé avec un outil de verre, & je le joignis au liquide dans le récipient; je verſai deſſus, auſſi bien que ſur le ſublimé qui ſe trouvoit pareillement dans le récipient, un peu d'eau chaude; je rinçai & détachai le ſublimé; je cherchai à le diſſoudre en le pilant fort longtems dans un mortier de verre avec de l'eau chaude diſtillée; ce qui réuſſit aſſez bien. Je filtrai le tout; & comme il reſtoit ſûrement encore dans

le filtre une bonne quantité de matiere inſoluble, je l'édulcorai au mieux avec de l'eau chaude diſtillée, & après le deſſéchement il me reſta dans le filtre une poudre legere & friable. Là-deſſus je ſaoulai le liquide ſusdit qui avoit paſſé par le filtre avec une ſolution de ſel alcali fixe tiré du tartre; j'obtins un précipité qui eut beaucoup de peine à ſe poſer au fond; je l'édulcorai ſoigneuſement avec de l'eau chaude diſtillée, & l'ayant fait convenablement ſécher, j'eus une fort belle poudre blanche, peſant deux onces & deux dragmes, qui tant au creuſet qu'au charbon, ou avec le chalumeau à la flamme de la chandelle, ſe fondoit en une maſſe ſemblable à de la porcelaine; ce qui n'arrivoit en aucune façon à la poudre legere qui étoit demeurée au fond du filtre. Ce qu'il y a de particulier ici, c'eſt que l'acide du vitriol, qui autrement fixe aſſez au feu les autres corps volatils, par exemple le Mercure ou l'Arſenic volatil, produit ici un effet tout contraire ſur cette pierre qui réſiſte d'ailleurs fort au feu, & en volatiliſe ainſi une partie. (Voyez §. VII. VIII. IX.) Encore une choſe qui mérite d'être remarquée, c'eſt que, dans ce travail avec l'acide du vitriol, auſſi bien que dans les ſuivans avec d'autres acides, le verre du recipient & celui de la retorte ſoient ſi fortement attaqués, & l'un & l'autre conſidérablement rongés.

X. Mais l'acide du vitriol n'eſt pas le ſeul qui volatiliſe en partie notre pierre; l'acide du ſalpetre & celui du ſel commun produiſent ſur elle le même effet. En effet, ayant pris une partie de notre *Flus-Spaht* calciné & pilé, & ayant verſé deſſus quatre parties d'acide nitreux qui n'étoit pas fort concentré, j'ai procédé à la diſtillation comme avec l'acide du vitriol, & l'ayant pouſſée juſqu'à l'incandeſcence, j'ai obtenu les mêmes ſublimés qu'avec l'acide du vitriol; la liqueur qui en eſt diſtillée, en la joignant au ſublimé, quand on procure la ſolution en verſant deſſus de l'eau diſtillée, ſe laiſſe auſſi précipiter, comme ci-deſſus, avec la ſolution d'un ſel alcali du regne végétal; & la même choſe arrive avec l'acide du ſel, dans la même proportion. Bien plus: l'acide du Phoſphore, ou même un bon vinaigre, diſtillé & con-

& concentré, font ici le même effet, avec cette différence pourtant qu'avec l'acide du Phoſphore on obtient en même tems un ſublimé réel ſec. En effet, une dragme de notre pierre pulvériſée avec partie égale de l'acide du Phoſphore verſé deſſus, étant diſtillées donnent, avec le liquide que la diſtillation fait paſſer, un ſublimé ſemblable à celui que produiſent les acides précédens; & une once de la même pierre avec quatre onces de vinaigre diſtillé & concentré, donnent pareillement un liquide pouſſé par la diſtillation, lequel ſe précipite d'abord avec la ſolution de ſel de tartre, quoiqu'il ne paroiſſe point ici de ſublimé ſec. Or on n'a rien obſervé de tout cela, ni dans le *Flus-Spaht* de Saxe, ni dans les autres eſpeces de terre & de pierre qui ont été ſoumiſes à de ſemblables épreuves dans les mêmes vues. Il ſemble donc que la volatiliſation de cette eſpece de pierre par les acides en ſoit un vrai caractere ſpécifique, qui la diſtingue en particulier du *Flus-Spaht* de Saxe. Je rendrai compte une autre fois de la ſuite des Expériences faites ſur la même pierre, auſſi bien que des eſſais qui concernent ſa partie volatiliſée.

DISSERTATION
PHYSICO-OECONOMIQUE
SUR LA MANIERE UTILE DONT ON PEUT EMPLOYER QUELQUES UNES DES GRANDES ESPECES DE LA PLANTE DITE EN ALLEMAND *RIEDGRAS* (CAREX LINNAEI, GEN. PLANT. 482.) EN PARTICULIER POUR FAIRE DE MÉDIOCRES OU DE PETITES CHAUSSÉES SUR DES LIEUX MARÉCAGEUX.

PAR Mr. GLEDITSCH.

Traduit de l'Allemand.

C'eſt ici le fruit de quantité d'incommodités que j'ai eſſuyées en recherchant & en raſſemblant nos plantes indigenes dans les vaſtes forêts de la Marche de Brandebourg. Quelque peu conſidérable que paroiſſe à la plus grande partie des hommes l'examen de ſemblables productions naturelles & de pluſieurs circonſtances qui s'offrent dans le cours des recherches, il n'y en a pourtant gueres dont un Naturaliſte ne puiſſe parvenir, en tems & lieu, & en ſuivant un certain ordre, à faire quelque uſage avantageux. Quelles utilités ne retireroient pas auſſi ſouvent ceux qui s'appliquent avec intelligence à l'œconomie tant domeſtique que rurale, d'une courte application de ces doctrines, pourvu ſeulement qu'elles leur fuſſent préſentées par des mains habiles! Mais où ſont ceux qui demandent des explications, ou des découvertes, ſur des choſes qui leur paroiſſent mériter ſi peu d'attention? Il faudroit ici, avant toutes choſes, qu'on pût imprimer dans l'eſprit de ceux de nos jeunes gens qui ſe deſtinent à ſervir la Patrie dans des occupations de cette importance, une forte conviction qu'ils jettent un coup d'œil beaucoup trop ſuperficiel ſur la plûpart des choſes qui s'offrent à eux, négligeant enſuite abſolument d'y revenir. De cette maniere

niere ils voyagent & parcourent quelquefois la moitié de notre Globe, ſans réflexion & ſans profit; les rapports qu'ils envoyent de l'uſage des productions communes des pays dans les opérations œconomiques, ſont des matériaux confus, ſans ordre ni liaiſon; leurs expériences vagues ne menent à rien, parce que l'entendement eſt ce qui a eu le moins de part dans leur travail. En attendant la Patrie demeure en ſouffrance preſque à tous égards; ſa conſtitution, à force d'éprouver des incommodités multipliées & réitérées, s'affoiblit avec le tems, ſes facultés enfin ſouffrent un déchet conſidérable, qu'on ne peut ſe promettre de réparer qu'en mettant dans la ſuite l'œconomie ſur un meilleur pied.

Il y a inconteſtablement pluſieurs bagatelles qui ne laiſſeroient pas d'avoir leur utilité dans la Phyſique & dans l'Oeconomie, mais dont on ne tire aucun parti dans tous les pays étrangers, ou que la conſtitution particuliere du Gouvernement ne permet pas d'employer. Néanmoins tous ces petits objets réunis ne laiſſent pas de former un tout; & ce tout ſuffiroit quelquefois pour dédommager des fraix des voyages coûteux de ceux qu'on envoie dans ces contrées; pourvu qu'à leur retour ils fuſſent en état d'inſtruire leur Patrie de l'uſage qu'on en peut tirer. Mais les préjugés, l'ignorance, la frivolité ſont cauſe qu'on mépriſe, non ſeulement ces objets, mais d'autres bien plus importans, dont l'exacte obſervation ſeroit incomparablement plus néceſſaire. Je ne ferai point ici de digreſſion pour répéter des vérités qui ont été ſouvent dites, ou pour chercher à en établir les preuves qui ne ſont ignorées d'aucun ſage Politique. Il ne s'agiroit que de ſubſtituer à ces grands voyages diſpendieux & infructueux, des courſes reſſerrées dans l'enceinte des bornes de notre Patrie, ou qui pourroient s'étendre ſur le territoire de nos voiſins, & chercher à tirer des obſervations qu'elles produiroient tout ce qui peut procurer les avantages qui ont pour baſe ce qu'on a coûtume de regarder comme des bagatelles en Phyſique & en Oeconomie. Mais peut-être que nous ſommes trop riches & trop orgueilleux pour prendre ce parti, & pour chercher à nous

confirmer dans la propriété de ce que nos peres nous ont acquis, en apprenant à en tirer de plus en plus des uſages œconomiques. Peut-être auſſi que nous avons du penchant pour une maniere fort connue de procéder dans la recherche des uſages, c'eſt de n'y employer aucuns principes d'œconomie tant rurale que domeſtique, de ne ſuivre aucunes loix ni regles de prudence, mais de n'agir que par fantaiſie, au gré de ſes caprices & contre tout ordre naturel. Il n'eſt pas beſoin d'ajouter ici de nouveaux traits pour dépeindre ce procédé qui n'eſt autre choſe que l'empire de la mode. Tous ces arrangemens contradictoires qui portent le déſordre partout, ſe manifeſtent aſſez de toutes parts, & nous annoncent une ruine prochaine & totale. Ce ſont des vérités qu'il eſt permis de dire ouvertement, ſans s'expoſer à aucune ſuite fâcheuſe, puiſqu'il s'agit de choſes qui ſe paſſent à la face de l'Univers entier. Tant que nous ne nous ſoucierons point de la connoiſſance & du droit uſage de ces productions naturelles que notre Patrie produit en abondance, & qui peuvent influer ſur l'utilité ou tourner au dommage de diverſes contrées, nous n'apprendrons jamais ni à employer avantageuſement celles de ces productions dont on peut tirer parti, ni à détourner les fâcheux inconvéniens qui peuvent réſulter des autres en tant de manieres différentes.

Nous pouvons donner ici pour échantillon la plante nommée en Allemand *Riedgras* (*), dont les nombreuſes eſpeces & les variations n'ont été juſqu'ici l'objet d'aucune attention, ou du moins l'ont été d'une fort legere. Elle occupe pourtant, ſuivant la différence de la ſituation & du terroir, une partie aſſez conſidérable de nos campagnes. Le célebre M. de Linné (**) en compte juſqu'à 37 eſpeces, qui, à l'exception de 6 ou 8, croiſſent toutes dans les Etats de Sa Majeſté. Les Botaniſtes ont donné aux différentes eſpeces de cette Plante, outre le nom

(*) *Carex.* Linn. Gen. Pl. p. 482. n. 1064. *Cyperoides*, Tournef. Inſt. R. Hb. 299. Scheuchzer, Agroſt 10, 11. En Allemand, *Riedgras*, *Cypergras*, *Wild-Galgand*, etc.

(**) Spec. Plant. p. 1379 à 1389.

nom de *Riedgras*, pluſieurs faux noms (*), ou bien ont caché çà & là quelques unes de ces eſpeces ſous les dénominations d'autres plantes (**). Nos gens de la campagne dans la Marche appellent le *Riedgras*, *Segge*, *Bruchſegge*, *Seggegras;* & ils en diſtinguent les grandes eſpeces par la durée de leur feuillage, ou par la ſaiſon avancée ou retardée de l'année, dans laquelle elles pouſſent & ſe montrent en la plus grande quantité, en *Segge d'Hyver* & *Segge d'Eté.* Mais il leur arrive auſſi ſouvent de confondre d'autres eſpeces d'herbes, comme le *Jonc* & le *Cyperwurtzel* d'ici avec le *Riedgras*, & cela parce qu'on les trouve mêlées enſemble dans les prairies marécageuſes, dans les foſſes profondes & dans les marais ſpacieux (†). Le vrai *Segge*, ou le grand *Riedgras*, n'eſt généralement connu de notre peuple que ſous ce nom; & il s'en trouve dans le pays les trois eſpeces ſuivantes qui ſont les plus connues, & que tous les connoiſſeurs regardent comme telles (††).

L'eſpece de *Riedgras* fort dur, qui croît juſques à trois ou quatre pieds de hauteur dans les lacs & dans les marais, ſe trouve communément dans tous les lieux humides, le long des chauſſées, autour des foſſes, & dans les prairies baſſes; mais dans ces derniers endroits il eſt toujours plus court & plus délié que dans les lacs; quoiqu'il n'en ſoit que plus à craindre aux autres bonnes herbes qui ſont autour de lui par ſes racines fortes & gluantes, d'un brun foncé, qui s'étendent beaucoup à la ronde. Il pouſſe ſon tuyau de fort bonne heure dans l'année; & dans tous les lieux ſusdits on le trouve en fleur en Mai & au

(*) Cyperoides. Cyperus. Pſeudo-Cyperus. Gramen { Cyperoides. Cyperinum. Gramen { Caryophyllatum. Typhoides.

(**) Comme entre les eſpeces Schoenus, Cyperus, Scirpus; parmi leſquelles la 24 eſpece de M. de Linné, le faux *Milium*, ou *Milium*, eſt une des plus grandes plantes de marais qui donnent le meilleur fourrage.

(†) Juncus, Cyperus, Schoenus, Scirpus. Linn. Gen. Pl. p. 29 30. 173.

(††) Carex 35 acuta Linn. Sp. Plant. 1388. Gramen cyperoides latifolium ſpica rufa, ſ. caule triangulo. C. B. P. 6. Scheuchz. Agroſt. 458.

au commencement de Juin. Cette grande eſpece, non plus que les ſuivantes, ne vaut rien pour le fourrage; elle eſt rude, velue & tranchante dans toute la partie qui ſort de l'eau. Au défaut d'un meilleur fourrage, on la coupe ſeulement, au printems, dès qu'elle verdit & lorſqu'elle eſt encore ſous l'eau. Quelquefois, quand ce *Riedgras* s'eſt étroitement entortillé à travers la tourbe comme un feutre épais, il ſemble voir ſurnager de gros morceaux de gazon, fort compacts.

Une plus petite eſpece, c'eſt la *Carex* 27. *limoſa* Linn. Sp. Plant. 1387 (*). Elle n'eſt pas rare dans nos prairies dont le fond eſt de tourbe, où ſes racines noueuſes & qui ſerpentent, pénétrent tellement partout & s'étendent dans la terre marécageuſe de façon que leurs rejettons verdâtres, brillans, polis, & garnis de nœuds d'un brun foncé, ſe montrent ſouvent tout à nud à la ſurface. Le tuyau triangulaire, qui a communément un empan de hauteur, mais qui s'éleve quelquefois à un pied, ou même davantage, eſt auſſi bien que ſes feuilles roides tout auſſi dur & impropre au fourrage, que la plûpart des autres eſpeces. Les épics entrent en fleur au mois de Mai & plus tard.

La troiſieme eſpece de *Riedgras* eſt le *Carex* 32. *Pſeudo-Cyperus* Linn. Sp. Plant. 1387 (**). Elle a des racines très fortes, qui courent beaucoup, & qu'on a bien de la peine à arracher. C'eſt une des eſpeces les plus groſſieres & les plus gluantes, dont les feuilles ſont fort grandes, velues, ſpongieuſes & garnies de bords gluans; elle parvient ordinairement à la hauteur de deux pieds, mais les tiges triangulaires s'élevent juſqu'à trois. Les plantes different un peu en groſſeur ſuivant les variétés du terrain. On les trouve abondamment chez nous dans les marais plantés d'aunes, dans les champs de tourbe & dans d'autres prairies profondes, comme auſſi le long des chauſſées & au-

(*) Gramen Cyperoides ſpica pendula breviore minus. C. B. Theatr. 85.

(**) Gramen Cyperoides ſpica pendula breviore. C. B. Pin. 6. ſive majus ejusd. Theatr. 86. Pſeudo-Cyperus. Lob. Gen. 76.

& autour des foſſes. Leurs épics velus fleuriſſent en Juin & en Juillet. Elles augmentent le foin des marais, tout comme les eſpeces précédentes, ſans pourtant que les bêtes à corne y touchent proprement, à moins que le foin ne ſoit coupé fort délié & fort court. Les gens entendus dans l'œconomie ſavent, en coupant le foin, mettre à profit bien des choſes, que le bêtail rebute autrement & foule aux pieds.

La quatrieme eſpece de *Riedgras* eſt *Carex II. elongata.* Linn. Sp. Pl. 1383 (*). Elle eſt répandue dans les bois, & autour des lacs, des marais & des ruiſſeaux, dès le milieu de Mai & dans tout le cours de Juin.

Il s'en offre trois variations, qui different beaucoup en grandeur & dont les racines ſe prolongent beaucoup plus loin que celles de leur eſpece naturelle. Les tuyaux ſont nuds, & dans l'une des plantes ils ont un empan de hauteur, dans la ſeconde un & demi, & dans la troiſieme juſqu'à deux, ou même quelquefois quatre. La conſtitution de leurs feuilles eſt la même dans un certain rapport, mais elles ſont plus molles & plus ſpongieuſes, & ſont auſſi diſtinguées intérieurement, comme quelques feuilles de jonc, par des lignes de traverſe: d'ailleurs elles valent beaucoup mieux pour le fourrage que toutes les précédentes.

La *Carex* 10. *vulpina*, Linn. Sp. Pl. 1384 (**) cinquieme eſpece du *Riedgras*, a un rapport aſſez conſidérable avec la précédente; ſeulement ſon tuyau dépouillé eſt beaucoup plus fort & plus groſſier, mais les épics ſont tout velus, épais & encore plus ronds. Dans nos forêts cette eſpece croit parmi les brouſſailles dans les bas fonds, comme auſſi dans les prairies & le long des chauſſées.

La

(*) Gramen Cyperoides anguſtifolium ſpicis longis erectis. C. B. Pin. 6. Theatr. 84.

(**) Gramen Cyperoides paluſtre majus, ſpica compacta. C. B. Theatr. 87. Pin. 6.

La ſixieme eſpece de *Riedgras*, *Carex* 17. *panniculata*, Linn. Sp. Plant. 1383 (*), eſt une *Bruchſegge* à long tuyau, d'un brun clair & velue; elle eſt belle; ſa racine eſt noueuſe, gluante, d'un brun clair, & rampe beaucoup; les feuilles ont pour la plûpart un empan de longueur, elles ſont âpres & groſſieres comme le tuyau, rapprochées les unes des autres par bouquets, & atteignent bien juſqu'à la hauteur d'un pied & demi. Le tuyau triangulaire monte bien à deux ou trois pieds de hauteur, & chez nous, aux mois de Juin & de Juillet, dans les endroits humides, il y vient des bouquets fort conſidérables de fleurs brunes, & après cela des ſemences noires. La grandeur de la plante varie; elle croit volontiers ſur les bords des forêts & des côteaux, qui ſe terminent en marais.

La ſeptieme eſpece de *Riedgras*, *Carex* 36. *veſicaria*, Linn. Sp. Pl. 1388 (**), qu'on appelle *Blaſe-Segge*, eſt à la vérité courte, noueuſe, brune & forte; cependant le tuyau en eſt long; elle produit ſon jet & ſes feuilles fort ſerrées l'une dans l'autre; le premier a communément un, deux, juſqu'à trois pieds de hauteur, mais les feuilles n'acquierent chez nous qu'un pied de longueur. Leurs fleurs & leurs épics à fruit, qui ſont fort noueux, ſe trouvent aux mois de Juin & de Juillet dans tous les fonds bas & humides. D'ailleurs toute la Plante eſt beaucoup trop dure & velue pour être bonne au fourrage, ſi ce n'eſt quand elle commence à croître & dans les terroirs doux.

J'ai déjà remarqué ci-deſſus que toutes ces eſpeces de *Riedgras*, dans pluſieurs contrées, occupent une partie conſidérable de nos campagnes; & on les rencontre en effet dans toutes ſortes de terroirs. Dans la recherche des prairies fertiles, baſſes & humides, le long des chemins, ou dans les bois dépouillés de leur écorce, on remarque cette circonſtance déſagréable, que les autres herbes douces & fines ſont détruites par là, & qu'on n'en trouve que fort peu de mêlées

(*) Cyperus longus inodorus Sylvaticus. C. B. Pin. 14. Theatr. 23.

(**) Cyperoides veſicarium, ſpicis viridicantibus & ſubfuſcis. Scheuch. Agroſt. 170.

lées avec les *Riedgras.* On cherche à remédier à cet inconvénient en labourant & fumant les lieux où il convient de le faire; mais cela n'eſt pas pratiquable dans la plûpart des endroits. Quelques eſpeces de *Riedgras* s'élevent dans les terres humides, à l'ombre, & là où il y a des ſources froides, & parviennent à une fort grande hauteur ſur les montagnes, où elles foiſonnent autour des ſources & le long des ruiſſeaux. D'autres aiment à ſe placer dans les foſſés dont on entrecoupe les champs, où il y a de bonnes terres meubles, ou même des terres peſantes & graſſes. Dans les forêts de notre pays on en trouve diverſes eſpeces, mais dans les bruyeres il y en a beaucoup moins; & à peine en apperçoit-on dans le ſable, ſurtout dans celui qui eſt tout à fait ſec & ſtérile. Les eſpeces les plus fortes, les plus groſſieres, & qui montent le plus haut, viennent, comme on ſçait, ſurtout à ſouhait dans les marais, les lacs, les tourbieres, & les terrains marêcageux d'une grande étendue. Elles ont non ſeulement là leur domicile naturel, mais elles y croiſſent d'une telle épaiſſeur, & avec des racines qui s'entortillent tellement enſemble dans la terre marêcageuſe, qu'entre elles & leurs touffes d'une bourre pareille à du gazon il ne peut pouſſer aucune autre herbe. Il s'entrelaſſe quelquefois de ſemblables gazons dans les plus belles prairies, & des places entieres en ſont revêtues d'une maniere ſi compacte, qu'à peine peut-on les rompre & les détacher avec les bêches les plus fortes, beaucoup moins les enlever & les extirper entierement. D'autres fois ils érendent comme une eſpece de couverture ſur un mauvais fond de tourbe humide & froid; dans certains endroits où il y a des marais ſans fond au deſſus deſquels ils s'élevent avec les eaux de l'hyver, ils s'affaiſſent enſuite & ſurnagent par morceaux comme de grandes iles, qui ſont ſi ſolides qu'elles ſoutiennent aſſez bien les hommes & les animaux, ne laiſſant pas en même tems de céder & de s'étendre, en ſorte qu'on marche deſſus comme ſur un lit, ou ſur quelque choſe de tendu.

Entre les grandes bruyeres & à l'entour, nous avons ici dans le pays des terrains bas d'une grande étendue, auxquels on donne dans

la langue du pays les noms de *Fenn*, *Lauch*, ou *Luch;* ils ſont une partie conſidérable de l'année ſous l'eau; on en fauche dans les mois d'été, autant que l'eau permet d'avancer, comme dans les autres terrains marêcageux, qui ſont contigus à de grandes eaux courantes. Ces endroits donnent beaucoup de gros foin, mais à tuyau groſſier & d'un ſuc peu nourriſſant, par des raiſons qui viennent en partie de la nature du terrain, en partie de l'âge de la plante, c'eſt à dire, du tems où l'on a coutume de la faucher. Car, quoique la plûpart des plantes & des herbes en général, tant qu'elles ſont encore jeunes, ayent un degré de bonté & ſoient plus ou moins nourriſſantes; elles ne laiſſent pas de le perdre lorſqu'elles atteignent l'âge où on les fene le plus ſouvent dans les prairies baſſes & marêcageuſes. Enſuite il ſe perd auſſi toujours en ſéchant quelque choſe des parties balſâmiques & volatiles; ſans compter qu'elles n'ont par elles-mêmes qu'un ſuc cru, terreſtre & groſſier, où ſe trouvent mêlées peu de parties viſqueuſes & douces. Les plantes rudes ſouffrent à la vérité quelque changement avantageux, mais il n'en eſt pas de même des ameres. Quand donc, avec cela, au tems de la fénaiſon, elles ſont tout à fait chevelues, dures, gluantes & tranchantes, leurs mauvaiſes propriétés doivent s'accroître dans un foin déjà par lui-même à tuyaux groſſiers. Ici appartiennent entr'autres les grandes eſpeces des *Riedgras* fort tranchans, que j'ai indiquées ci-deſſus & dont j'ai vu employer, à Ober-Bruch ſur l'Oder, les feuilles longues de trois ou quatre pieds & les tuyaux à couvrir de petites cabanes. Quand donc elles forment la plus grande partie du foin qu'on recueille des prairies marêcageuſes, on les mêle, comme le reſte du foin groſſier, avec la paille hachée, dans quelques endroits où il y a de grandes œconomies de beſtiaux, mais on en tire moins de parti pour le fourrage que de la plus mauvaiſe paille de ſeigle. Il y en a qui l'employent, en place de la derniere, coupée bien fine avec d'autre foin, & la donnent au bêtail mêlée dans le fourrage.

Notre mauvais foin contient ordinairement les eſpeces ſuivantes de ce *Riedgras*, ſavoir:

Poly-

Polygonum 6. amphibium. Linn. Sp. Plant. 517. Perſicaria acida Jungermanni.

Equiſetum 4. fluviale. Linn. Sp. Pl. 718. Quinquefolium paluſtre longioribus ſetis. C. B. Pin. 15.

Comarum 1. paluſtre. Linn. Sp. Pl. 718. Quinquefolium paluſtre rubrum. C. P. Pin. 325.

Spiræa ulmaria. Linn. Sp. Pl. 702. Barba capræ floribus compactis. C. B. Pin. 164.

Spargamium 1. erectum. Linn. Sp. Plant. 1378. Spargamium ramoſum & non ramoſum. C. B. Pin. 18.

Ces cinq eſpeces ſont dures & à gros tuyaux; auſſi elles deſſechent, conſtipent & cauſent des contractions.

Lythrum 1. Salicaria. Linn. Sp. Pl. 640. Lyſimachia ſpicata purpurea. C. B. Pin. 246.

Cette Plante conſidérablement terreſtre & viſqueuſe a la propriété contractive ou conſtipante.

Epilobium 3. hirſutum. Linn. Sp. Pl. 494. Lyſimachia ſiliquoſa, hirſuta, magno flore. C. B. Pin. 245.

Cette plante eſt plus nourriſſante que les précédentes; la tige eſt groſſiere, les feuilles ont un velu qui tient de la laine.

Rumex 14. aquaticus. Linn. Sp. Pl. 479. Herba britannica. Munting. Brit. Tab. I. Herba patientiæ.

C'eſt une plante fort groſſiere & dure. Les feuilles cependant ſont moins conſtipantes que la ſemence; l'écorce de la racine a la couleur & les propriétés de la rhubarbe.

Iris 10. Pſeudo-acorus. Linn. Sp. Pl. 56. Acorus adulterinus. C. B. P. 34.

Cette plante eſt groſſiere, a la vertu contractive, & quand elle eſt fraîche, montre une âpreté manifeſte.

Aliſma 1. aquatica. Linn. Sp. Pl. 486. Plantago aquatica latifolia. C. B. P.

On en fait de mauvais foin groſſier; & ſes racines noueuſes, & un peu viſqueuſes, ont une âpreté volatile.

Gratiola 1. officinalis. Linn. Sp. Pl. 24.

Elle croit ſur les bords des prairies, autour des ruiſſeaux marêcageux, & ſur les fonds bas. La plante eſt fort amere & âpre, fait vomir & purge, amincit, ouvre & chaſſe l'eau de la veſſie; par cette raiſon elle maigrit extremement les chevaux, & ſes effets ne ſont pas beaucoup plus doux parmi le foin.

Eupatorium 12. Cannabinum. Linn. Sp. Pl. 1173. & C. B. Pin. 326.

C'eſt une grande plante à tuyau dur, dont les vertus n'en cedent point à celles du chardon bénit. Elle pouſſe ſes tiges dans les marais profonds, au bord des prairies, & le long des ruiſſeaux.

Pedicularis 1. paluſtris. Linn. Sp. Pl. 773. Pedicularis pratenſis elatior. Raj. Hiſt. 700. Elle eſt âpre & mordante.

Serapias 2. Congifolia. Linn. Sp. Pl. 1345. Helleborine paluſtris, ſ. pratenſis. C. B. Pin. 37.

Cette plante ne vaut rien parmi aucun fourrage, ſoit verte ou ſeche, comme le prouvent ſon goût déſagréable & ſon âpreté.

Ranunculus 3. Lingua. Linn. Sp. Pl 773. Ranunculus longifolius paluſtris major. C. B. Pin. 34.

Cette plante, tant qu'elle eſt verte, & avant qu'elle vienne en fleur, a une grande âpreté, comme la meilleure partie de ſes eſpeces.

Feſtuca 14. fluitans. Linn. Sp. Pl. 111. Gramen mannæ. Dodon. & Il. Schwenckf. Sileſ. p. 88.

C'eſt le vrai *Gramen mannæ eſculentum*, qui donne la graine qu'on appelle *Schwaden*, *Schwaden* ſauvage, ou *Schwaden* de marais. Dans la Marche nous n'en connoiſſons point d'autre. Vers le tems de la fénaiſon, on recueille cette ſemence qui eſt fort nourriſſante, ou bien elle tombe, & devient la nourriture des canards ſauvages. Pour ſes tiges, elles donnent un fort mauvais fourrage.

Erio-

Eriophorum 1. vaginatum. Linn. Sp. Pl. 76. Linagroſtis Tournefortii.

Son duvet mûr n'exiſte plus au tems de la fénaiſon.

Eriophorum 2. polyſtachium, variet. junior. Linn. S. Plant. 76. Linagroſtis Tournefort.

Le duvet de cette eſpece mûrit trois à quatre ſemaines plus tard que celui de la précédente, & ſe trouve abondamment en divers endroits parmi le foin de marais, ce qui généralement ne ſauroit être avantageux au bêtail. Car perſonne ne mêleroit volontairement dans le fourrage du lin, des cheveux, de la laine, du coton, ou de la filoſelle.

Eriophorum 2. polyſtachium. Linn. Sp. Pl. 76. Linagroſtis panniculâ ampliore. Scheuchz. Agroſt. 306.

C'eſt la véritable plante dans ſon crû; ſon duvet mûrit & s'envole avant la fénaiſon. La tige a un goût douceâtre, mais elle eſt fort gluante. Le duvet eſt long & aſſez fin parmi ces laines de buiſſon; quand il n'eſt pas parfaitement mûr, ſa conſiſtance eſt aſſez grande pour le faire entrer dans le mêlange des étoffes du pays & des mouchoirs. Mais, pour que ce duvet imparfaitement mûr prenne bien la couleur, il faut le couper régulierement avec des ciſeaux d'après ſes bouquets, quand il tient encore ferme à ſes tiges.

D'autres prairies marêcageuſes produiſent une herbe que, dans certains cas, on ne peut regarder que comme impure, à cauſe de l'eau croupie, du bourbier & de la multitude d'inſectes qui s'y trouvent; à quoi il faut joindre le plus ſouvent la multitude des diverſes eſpeces du Riedgras, de l'*equiſetum*, en Allemand *Katzenſterts*, & de pluſieurs autres herbes ou plantes ſemblables. Ainſi il n'y en a que quelques unes qui donnent une herbe aſſez bonne, fine & douce. Quand donc on a trouvé que, dans les prairies baſſes & marêcageuſes, la quantité des eſpeces d'herbes & de plantes fines dont on va donner l'énumération, eſt à celle des *Riedgras* durs & groſſiers, environ comme la moitié & au delà, il n'y a aucun ſujet de douter de la bonté du foin qui en pro-

provient; ou bien il faudroit que le ſol eût encore quelques autres défauts tout à fait manifeſtes, ou qu'en fénant on n'eût pas fait attention à toutes les circonſtances néceſſaires, & en particulier à celles de la température. Voici les eſpeces d'herbes fines qui ſe trouvent le plus communément dans nos prairies humides.

Juncus 3. effuſus. Linn. Sp. Pl. 464. Juncus lævis, pannicula ſparſa major. C. B. Pin. 12.

Juncus 2. conglomeratus. Linn. Sp. Pl. 464. Juncus lævis, pannicula conglomerata. Scheuchz. Agroſt. 343.

Scirpus 24. ſylvaticus. Linn. Sp. Pl. 75. Gramen cyperoides miliaceum. C. B. Pin. 6. Theatr. 90.

Holcus 5. lanatus. Linn. Sp. Pl. 1585. Gramen pratenſe lanatum molle. C. B. Pin. 2.

Cynoſurus I. criſtatus. Linn. Sp. Pl. 105. Gramen pratenſe criſtatum, ſ. ſpica criſtata lævi. C. B. Pin. 2. Theatr. 42.

Poa 1. aquatica. Linn. Sp. Pl. 98. Gramen pratenſe panniculatum altiſſimum. C. B. Pin. 2, Theatr. 38. En Allemand *Mielitz*, ou *Militz*.

Poa 6. pratenſis. Linn. Sp. Pl. 99. Gramen pratenſe panniculatum majus. C. B. Pin. 2. Theatr. 28.

Poa 5. anguſtifolia. Linn. Sp. Pl. 99. Gramen pratenſe panniculatum majus. C. B. Pin. 2. Theatr. 28.

Aira 3. cærulea. Linn. Sp. Pl. 95. Gramen arundinaceum, exode, minus, ſylvaticum. C. B. Pin. 7. Theatr. 97.

Aira 6. aquatica. Linn. Sp. Pl. 95. Gramen canicum ſupinum, panniculatum dulce. C. B. Pin. 2. Theatr. 13.

Alopecurus 1. pratenſis. Linn. Sp. Pl. 88. Gramen pharoides majus. C. B. Pin. 4. Theatr. 55.

Phalaris 6. arundinacea. Linn. Sp. Pl. 80. Gramen arundinaceum ſpicatum, phalaridis ſemine. Scheuch. agroſt. 126.

Phleum 1. pratenſe. Linn. Sp. Pl. 87. Gramen typhoides maximum, ſpica longiſſima. C. B. Pin. 4.

Vale-

Valeriana 5. officinalis. Linn. Sp. Pl. 45. Valeriana paluſtris major. C. B. Pin. 164.

Sium 1. latifolium. Linn. Sp. Pl. 361. & C. B. Pin. 154.

Sium 2. nodiflorum. Linn. Sp. Pl. 361. Sium aquaticum procumbens, ad alas floridum. Moriſon. Hiſt. III. S. 9. T. 5. fig. 3.

Mentha 5. aquatica. Linn. Sp. Pl. 805. Mentha rotundifolia paluſtris, ſ. aquatica major. C. B. Pin. 227.

Thalictrum 10. flavum. Linn. Sp. Pl. 770. Thalictrum majus, ſiliqua anguloſa, ſ. ſtriata. C. B. Pin. 336.

Cricus 1. oleraceus. Linn. Sp. Pl. 1156. Carduus pratenſis latifolius. C. B. Pin. 376.

Lathyrus 20. paluſtris. Linn. Sp. Pl. 1034. Lathyrus paluſtris, flore Orobi nemorenſis verni. Rupp. Flor. Gen. 1634.

La plus grande partie de ces prairies marêcageuſes fort baſſes eſt ſouvent couverte de mouſſe, & ne porte, outre la plante dite en Allemand *Klappe* (*) & quelques autres herbes aquatiques, comme le *Calmus* & les eſpeces de *Jonc* (**), rien que du *Riedgras* (*.*). Dans d'autres prairies où il n'y a point de mouſſes, toutes les herbes conſiſtent preſque en roſeaux, en *Kuhblumen*, & en quelques eſpeces de *Riedgras* âpre. Suivant la différence de ces foins il y en a qu'on ne coupe qu'une fois, & qu'on donne enſuite pour litiere aux bêtes à corne & aux chevaux; mais d'autres les employent pour le fourrage, qui ne peut-être paſſablement bon que dans certains tems de l'année, tandis que dans d'autres il eſt fort mauvais. Auſſi longtems donc que le ſol demeure ſous l'eau, & qu'on parvient à deſſécher de ſemblables prairies marêcageuſes par des foſſés très profonds, les eſpeces les plus mauvaiſes du grand *Riedgras* ſont un peu plus molles, plus tendres &

(*) *Menyanthes* 1. trifoliata. Linn. Sp. Pl. 208. Trifolium paluſtre. C. B. Pin. 327.

(**) *Acorus* 1. Calamus. Linn. Sp. Pl. 463. & les principales eſpeces de Jonc.

(*.*) *Arundo* 3. phragmites. Linn. Sp. Pl. 120.
Caltha 1. paluſtris. Linn. Sp. Pl. 786.

& plus propres au fourrage. C'eſt ce qui fait que, dans les premiers mois de leur accroiſſement, au défaut de meilleures herbes, on les coupe de bonne heure dans l'eau pour le bêtail, & on s'en ſert comme de fourrage tandis qu'elles ſont vertes: quoiqu'on n'ait jamais beaucoup de ſujet de s'en louer. Mais, quand elles viennent dans des prairies plus élevées, où elles demeurent baſſes, ou bien où l'on ne ſauroit les couper juſqu'à ce qu'elles ayent pris leur entier accroiſſement, on les trouve trop gluantes, groſſieres & dures, leurs feuilles & leurs tuyaux ſont d'une âpreté trop trenchante, pour que le bêtail puiſſe s'en repaître; elles ne ſervent qu'à augmenter le foin & le fumier. Ce ſeroit un vrai coup de maître, un ſervice de la plus grande utilité, ſi quelque homme d'une profonde expérience écrivoit une diſſertation bien étoffée, ou même pluſieurs, ſur les prairies, & qu'il y traitât la matiere, comme on a traité dans ces derniers tems celle des bois & des forêts, qui a été miſe dans le plus beau jour. Mais, pour cet effet, il faut, outre les connoiſſances botaniques, une grande habileté dans la Phyſique & dans l'Oeconomie, pour bien juger de la différence des terroirs, auſſi bien que des variétés tant accoûtumées qu'inaccoûtumées, avec la maniere de préparer, de conſerver, d'améliorer & de tirer une vraie utilité de ſon travail (*).

Parmi les *Riedgras*, on ne peut gueres indiquer que quelques eſpeces qui donnent un vrai fourrage, lorſqu'elles ne ſont plus jeunes ou fort tendres, tandis qu'au contraire parmi les autres herbes, il y a des genres entiers, où l'on ne rencontre preſque pas une ſeule eſpece, qui ne ſoit propre au fourrage, par ſa ſubſtance molle, friable, douceâtre & viſqueuſe. Les *Joncs*, les *Kröten-Gras*, & quelques eſpeces de *Cyper* ne doivent pas être pourtant confondus avec le vrai *Riedgras;* car, quoique ces plantes donnent auſſi un mauvais foin gluant, elles

(*) Il y a là-deſſus un très bon Ecrit, qui a remporté un Prix; c'eſt celui du Dr. *Jean Chriſtian Schreber*, Savant très verſé dans ces matieres, qui a paru à Leipzig en 1763, ſous le titre de *Botaniſch-oeconomiſche Abhandlung vom Graſsbau.*

elles contiennent néanmoins une plus grande quantité de parties nourriſſantes, que les *Riedgras* âpres & velus, qu'aucun bêtail ne recherche, lors même qu'ils ſont encore verds, à moins qu'il ne ſoit fort affamé, & encore n'en tire-t-il pas grande utilité. Mais, vû l'extreme diverſité des animaux & de leurs manieres de ſe nourrir, on ſçait, au ſujet de quelques *Riedgras* âpres, qu'on les trouve quelquefois broutés, & qu'ainſi ils ne ſont pas tout à fait impropres à nourrir. Ce que j'avance ici, peut être confirmé par l'exemple de la haute *Winterſegge* (*Carex hyemalis*, *ſ. acuta*,) que les ſangliers cherchent en hyver ſous l'eau, dans les endroits où elle n'eſt pas gelée. Elle eſt alors en effet, & tant qu'elle demeure ſous l'eau, plus tendre. Ce qui eſt certain à l'égard de cette eſpece, a lieu par rapport à d'autres au Printems, ſavoir à celles qui portent leurs feuilles auſſi ſerrées qu'un gazon, ou enveloppées dans *pluſieurs étuis*. *Les feuilles intérieures de ces eſpeces* ſont en général vers le bas, & autant qu'elles ſont couvertes & renfermées, ou qu'elles demeurent ſous l'eau, plus molles, plus douces, ou d'une viſcoſité douceâtre. Il en eſt de même de celles qui ſont librement plantées en terre, & particulierement des extrémités inférieures des tiges & des feuilles, autant qu'elles demeurent couvertes de terre; au lieu que leur partie ſupérieure, qui n'eſt pas ainſi couverte, eſt fort groſſiere, gluante & inſipide (*). Or, quoique ces circonſtances ne ſe manifeſtent pas à l'égard des animaux qui ruminent, & d'autres grandes eſpeces, elles ne laiſſent pas d'avoir toujours lieu par rapport à d'autres eſpeces que la Nature a fait entrer dans ſon plan, qui appartiennent à ſa grande & vaſte œconomie, & dont elle a coûtume de ſe ſervir pour arriver à ſon but général (**).

(*) L'art imite cette circonſtance dans quelques eſpeces de jardinage, pour avoir des rejettons tendres, ou des cœurs propres à ſervir d'alimens, comme dans les cardes, le *finocchium*, la chicorée & autres. Mais les feuilles intérieures, ou les extrémités inférieures de ces mêmes plantes, comme auſſi les tiges dans les têtes pommées des herbes de cuiſine, ſont en général de la même eſpece.

(**) C'eſt ce que l'on obſerve dans la plante dite *Nardus* 1. ſtricta, Linn. Sp. Pl. 53. En Allemand *Borſtengraſe*. Cette eſpece d'herbe gluante, dure, baſſe & inſipide, qui occupe de grandes places dans les fonds bas & froids des bois, que

Les bêtes ſauvages ſont ſouvent, dans les hyvers froids, & lorſque la faim les preſſe, ce qui ne leur eſt pas avantageux, & qu'elles n'auroient pas fait non plus ſans cela. Cela eſt cauſe que dans des ſaiſons rigoureuſes, dès le mois de Décembre, j'ai quelquefois trouvé ſur les collines de ſable qui ſont autour des bois, le *Sandſegge*, (*Carex arenaria Linnæi*) brouté tout court, & par les traces je me ſuis apperçu que c'étoient les bêtes ſauvages qui l'avoient fait: comme auſſi, dans de ſemblables circonſtances, elles ſe raſſaſient avec des roſeaux d'arbre, de terre & de cailloux, (*algis arboreis, terreſtribus & ſaxorum*) ou même elles tirent de deſſous les neiges profondes les pointes du *Farnkraut* (*), & les rongent auſſi avant qu'il leur eſt poſſible d'y atteindre. Qui pourroit même s'imaginer que le petit gibier, quand le grand froid dure trop longtems, fût capable d'aller chercher juſqu'à 1½ ou deux pieds de profondeur ſous la neige & de ronger la grande plante épineuſe à longues pointes, dite *Pfriemen-Kraut* (**); ſi l'on n'avoit des

que le bêtail ne ſauroit brouter, & que la faux même ne peut atteindre, tant elle eſt courte, croît comme un gazon ferme & dur. Les extrémités inférieures des feuilles, ſurtout de celles de dedans, ont un goût doux & ſont peu gluantes; mais il n'y a que les inſectes qui s'en nourriſſent.

(*) *Pteris, quæ Filix tenuiſſime ſecta ex monte*, Belon, J. B. Hiſt. 3. 739. Le gibier des forêts de ſapins auſſi bien que les chevreuils, dans les grands bois où les ſources chaudes leur manquent, dans leſquelles ils pourroient trouver le *Syſimbrium*, ou *Naſturtium aquaticum*, & le *Sium minus*, ont coûtume de tirer cette eſpece de *Farnkraut* de la neige la plus profonde. Les racines d'enhaut avec les rejettons de cette plante ſont un remede fortifiant pour ce gibier & pour les brebis.

(**) *Ulex* 1. Europæus. Linn. Sp. Pl. 1045. ou *Geniſta ſpinoſa major, longioribus aculeis*. C. B. Pin. 394. Dans le rude hyver de 1766, les lievres avoient tiré le ſommet de cette plante qui a de fort longues épines, de deſſous la neige à deux ou trois pieds de profondeur & en avoient brouté la longueur de quatre à cinq pouces. Il ne paroit pas néceſſaire de prouver plus au long que les bêtes ſauvages, quand la faim les preſſe extraordinairement, l'aſſouviſſent avec toutes ſortes de choſes auxquelles elles ne toucheroient pas ſans cela. C'eſt ainſi que le Renard, qui autrement peut & doit, comme les autres animaux de proie, ſouffrir longtems la faim, quand ſa chaſſe ne réuſſit pas, & qu'il ne peut trouver de gibier emplumé, ni ſauvage, ni privé, ou d'œufs & d'autres choſes ſemblables, s'accommode en été de grenouilles. Et quand la journée

des occaſions d'en voir les preuves dans le tems & ſur les lieux. On peut conclurre aſſez vraiſemblablement de là, que la même choſe peut quelquefois arriver avec les eſpeces de *Riedgras* les plus mauvaiſes & les plus dures, ſans qu'on puiſſe pour cela leur attribuer une propriété nourriſſante.

Quoique les *Riedgras* en général, comme il a été déjà dit, n'ayent que peu ou point la force de nourrir les animaux, il y en a pourtant quelques eſpeces parmi les plus petites, qui ſe trouvant dans des terrains bons & gras, & mêlées avec d'autres herbes, tant que leurs tiges & leurs feuilles ſont encore jeunes, & demeurent dans l'eau ou ſous l'eau, conſervent plus de ſpongioſité que les autres. Mais elles perdent ces avantages, quand par quelques cauſes accidentelles, leurs ſemences ſont portées ſur des lieux ſecs; au lieu qu'elles redeviennent viſqueuſes, tendres & pourvues de quelque ſuc, auſſitôt qu'elles retrouvent des terroirs humides. Cependant il reſte toujours à cette plante une utilité décidée, quoiqu'elle n'ait pas encore été ſuffiſamment découverte par rapport à la plûpart de ſes eſpeces. De plus, entre toutes les autres il y a une eſpece de *Riedgras* (*), qui par le prolongement de ſes racines eſt propre à lier & affermir le ſable le plus ſec & le plus ſtérile, qu'on a coutume de nommer *Flug-Sand:* & cette même plante, ſuivant les expériences les mieux conſtatées, rend de bons ſervices dans la Médecine. Ses racines fraîches dont, en certains endroits de la Marche, on peut aiſément charger des chariots entiers, & qui, étant nettoyées, ont quelque reſſemblance avec la racine tant vantée de *Salſapareille*, ont dans la ſaiſon convenable de l'année une odeur balſamique, qui tient le milieu entre celle des huiles de *térébenthine* & de *Cajaput.* Son goût eſt douceâtre, balſamique, & les teintures, extraits & autres remedes qu'on en prépare avec de l'eau, du vin, ou

née eſt tout à fait écoulée, il va encore le ſoir fort ſouvent ſur le grand chemin, & au défaut de tous les alimens ſuſdits, il y croque des fouille-merdes.

(*) *Carex* arenaria Linnæi, dont j'ai parlé plus au long dans ma *Diſſertation phyſico-œconomique ſur les moyens de diminuer les fonds ſablonneux de la Marche.*

de l'eſprit de vin, ont de l'affinité avec ceux qu'on tire du *bois de Guajac;* & il réſulte de leur odeur, de leur goût, de leur effet, & de leur maniere d'agir, que la racine de notre *Riedgras* des ſables de la Marche a des vertus qui ſurpaſſent manifeſtement celles de la *Salſapareille.* Quand même donc il n'y auroit point entre nos plantes indigenes d'autre moyen plus efficace, par lequel on eût pu depuis longtems ſe paſſer de la *Salſapareille*, tant exaltée, quoique ſans fondement; au moins, depuis quelques années, la racine de *Riedgras* eſt-elle employée, tant à Berlin qu'ailleurs, dans les Armées du Roi, avec une très grande utilité à la place d'un remede étranger & cher. Et quelle n'eſt pas ma ſatisfaction, quand je vois de côté & d'autre des Médecins qui la preſcrivent, ſans ſavoir que c'eſt la même que j'ai déjà indiquée, il y a pluſieurs années, à mes diſciples, dans mes leçons publiques?

Je ne me rappelle rien de remarquable à ajoûter pour le préſent ſur les uſâges particuliers de la multitude des eſpeces du *Riedgras*, ſinon que certains *oiſeaux terreſtres*, ou *aquatiques* en mangent les ſemences, qu'ils y font volontiers leur nid, & qu'on ſe ſert auſſi des eſpeces qui ont les feuilles longues pour empaqueter diverſes marchandiſes dures, pour boucher les fentes des vaiſſeaux & des petits édifices, & qu'on en couvre auſſi les cabanes des pêcheurs. A la campagne j'ai auſſi vu dans les Egliſes de gros paquets ou faiſceaux de *Riedgras* coupé & ſéché, dont les auditeurs ſe ſervent en hyver pour y poſer les pieds, afin de ne pas les mettre ſur le pavé froid.

Mais, comme j'ai outre cela remarqué ceci de particulier, en raſſemblant & faiſant ſécher des *Riedgras* indigenes à longues feuilles, c'eſt que quelques uns d'entr'eux avoient diverſes couleurs, comme le jaune, le jaune verdâtre, le jaune pâle, le verd foncé, le verd de mer, le rouge & le brun, qu'ils conſervoient encore fort bien après être ſéchés, & même très longtems, étant d'ailleurs fermes & ſans nœuds; cela m'a fait naître l'idée qu'on pourroit s'en ſervir au lieu du jonc, ou de la paille teinte & colorée, pour faire des eſſais en petit de

toutes

toutes ſortes d'uſtencilles de vannerie. Je commençai donc ma premiere tentative, il y a environ vint ans, avec pluſieurs aunes de ces rubans de *Riedgras*, d'un à deux doigts de largeur, qui n'étoient point groſſiers dans un endroit, fins dans l'autre, mais qui avoient bonne apparence, étoient ſuffiſamment colorés, & ſembloient même quelque choſe d'étranger. On les treſſa de la maniere ordinaire pour en faire des chapeaux de paille, des aſſiettes de paille & d'autres choſes ſemblables. Tout cela ne réuſſit pas mal, & c'en fut aſſez pour moi d'avoir ſû tirer parti d'une chétive production du pays, & de lui avoir procuré un prix que ſans cela elle n'auroit pu obtenir dans l'œconomie de la campagne; ſans compter que ce travail pourroit être une reſſource pour les pauvres & contribuer à leur entretien. Car le trafic de ces ſortes de marchandiſes dans les marchés & aux grandes foires de l'année, ainſi que la grande conſommation qu'on en fait, le débit qui en réſulte & leur bas prix ſont des choſes ſi connues, que je ne crois pas avoir beſoin de recommander de nouveau cette occupation à tant de gens, qui, dans certaines contrées de la Marche, n'ont rien de mieux à faire en hyver; d'autant plus que je fournirai encore en tems & lieu mes obſervations ſur ce ſujet. On peut auſſi faire de pareils eſſais avec le *Milium effuſum Linnæi*, ou *Waldhirſen*, l'*Aira cærulea*, ou *Blauſchmiele*, l'*Agroſtis venti ſpica Linnæi*, ou ce qu'on nomme *Windhalme;* d'où il y auroit auſſi du profit à tirer pour nombre de gens qui ſont à charge à l'Etat en différentes manieres, ſi ſeulement on ſe faiſoit un plaiſir d'apprendre à connoître exactement les productions du pays & ſi l'on ne rejettoit pas tout ce qui au premier coup d'œil n'offre que de trop petits bénéfices, comme ſi tout devoit d'abord ſe montrer ſous un aſpect brillant, & produire des avantages auſſi conſidérables que la cupidité les feroit ſouhaiter.

De plus, j'ai trouvé que les eſpeces les plus longues & les plus fortes du grand *Riedgras*, dont il a déjà été fait mention ci-deſſus, peuvent encore être employées d'une façon plus particuliere & plus intéreſſante, dont l'utilité ſurpaſſe de beaucoup toute celle qu'on en avoit reti-

retirée juſqu'à préſent. A l'entrée de cette Diſſertation, j'ai remarqué que ces *Riedgras* croiſſent ſurtout en abondance dans les terrains marécageux & profonds, dans les prairies dont le ſol eſt de tourbe, auſſi bien qu'autour des bois & dans les grands étangs, & qu'ils s'y multiplient tellement que fort ſouvent ils occupent des pieces de terre qu'on pourroit mettre en valeur & y détruiſent les bonnes herbes. On trouve réellement des plaines d'une ou deux milles & davantage de longueur & de largeur, qui ſont toutes couvertes de ces *Riedgras* crûs dans les marais. Il s'y forme une quantité incroyable de mottes de gazon épaiſſes, ſolides, arrondies & preſque indeſtructibles, en façon de collines grandes & petites, rondes & vertes, qui de loin reſſemblent aſſez à de groſſes taupinieres, & entre leſquelles on rencontre quelques eſpeces d'herbes fines. Nos gens de la campagne donnent à ces collines de *Riedgras*, les noms, tantôt de *Kaupe* & *Hübbel*, tantôt de *Hüllen*, *Hilden* & *Bilden*. Quand elles ſont parvenues à toute leur grandeur & perfection, on n'y trouve dans les commencemens aucune autre herbe; & les racines forment en dedans & par deſſous un entrelaſſement des plus ſolides. En coupant annuellement les feuilles & les tiges, cela groſſit beaucoup les collines ou *Kaupe*, ſuivant que je l'ai déjà remarqué; & comme, à chaque fois qu'on coupe, le bas des tiges & des feuilles avec leurs étuis demeure toujours dans la terre qui eſt deſſous, & qu'avec le tems ces matieres acquierent une dureté égale à celle de la corne, mais qu'elles ne ſauroient ſe détruire, ni à l'air, ni dans l'eau, ou du moins qu'elles y ſubſiſtent pendant un très long eſpace de tems, leur longueur s'accroit néceſſairement tous les ans par la coupe, d'un demi-pouce, ou même d'un pouce entier, la faux la plus trenchante ne pouvant entamer les extrémités qui dans les années précédentes ont été ſi ſouvent coupées & ſe ſont durcies, de ſorte qu'il ne s'en détache que la partie ſupérieure fraîche & tendre de la tige & des feuilles qui ont pouſſé.

Il a déjà été remarqué ci-deſſus au ſujet de ces collines de *Riedgras*, qu'elles ſont quelquefois de petites Iles aſſez ſolides ſur les terrains

rains marêcageux & de tourbe, leſquelles montent & deſcendent avec l'eau, & ſont battues d'un côté à l'autre par ce mouvement alternatif de l'eau, juſqu'à ce qu'à la fin elles ſe poſent & s'affermiſſent dans des endroits plats, où elles forment un nouveau ſol compacte. Quand elles ſe trouvent ſituées entre des places marêcageuſes, couvertes d'herbe ou de mouſſe, elles ont quelquefois aſſez de force pour ſauver la vie à un homme, qui, en chaſſant aux bécaſſes ou aux canards ſauvages, a le malheur d'enfoncer dans quelque marais où il périroit infailliblement ſans ce ſecours. On rencontre dans la Marche, en Poméranie, en Pruſſe & en Pologne, de ſemblables collines qui ſont garnies de quelques petits buiſſons, & de certaines plantes particulieres, auxquelles les Botaniſtes font beaucoup d'attention; je vais en mettre ici la liſte.

Salix 28. roſmarinifolia. Linn. Sp. Plant. 1448.

Droſera 1 & 2. rotundifolia & longifolia. Linn. Sp. Pl. 402. ſ. Ros Solis. C. B. Pin. 357.

Ledum 1. paluſtre. Linn. Sp. Pl. 561. En Allemand, *Poſt* ou *Porſt*.

Vaccinium 11. Oxycoccus. Linn. Sp. Pl. 500. ſ. vitis idæa paluſtris. C. B. Pin. 441.

Andromeda, ſ. Poliifolia. Linn. Sp. Pl. 564.

Pedicularis 1. paluſtris. Linn. Sp. Pl. 845.

Scheuchzeria 1. paluſtris. Linn. Sp. Pl. 482.

Orchis 21. latifolia. Linn. Sp. Pl. 1334. Orchis palmata pratenſis latifolia. C. B. Pin. 86.

Epilobium 6. paluſtre. Linn. Sp. Pl. 494. Lyſimachia ſiliquoſa glabra anguſtifolia. C. B. Pin. 245.

Ophrys 2. liliifolia. Linn. Sp. Pl. 494. Orchis bulboſa liliifolia, inſularum Bataviæ & Zelandiæ vulgò.

Aliſma 5. natans. Linn. Sp. Pl. 487. Damaſonium potamogetonis rotundifolii folio. Vaill. Act. Gell. 1719. p. 29. Tab. I. fig. 8.

Selon toutes les apparences, la Nature ſe ſert de cette grande quantité de *Riedgras*, dont les ſemences ſont portées aiſément dans ces

endroits par les oiſeaux aquatiques, pour donner de nouveau inſenſiblement par ce moyen à l'eau une couverture ferme & ſolide, entre laquelle, lorſqu'elle s'eſt ſuffiſamment affaiſſée, après un certain tems, les petits *faules de marais*, les buiſſons & diverſes menues herbes s'arrangent d'une maniere conſiſtante, pour combler à la longue ces creux dangereux d'une eau croupiſſante & pourrie qui s'étoient peu à peu formés, & pour convertir à la fin des places couvertes de tourbe & de marêcages en prairies, & en campagnes de la plus grande fertilité.

Quand les gens de la campagne trouvent qu'il eſt de leur convenance de deſſécher de pareils terrains, pour en tirer un meilleur parti, cela s'exécute ſucceſſivement; alors ils apperçoivent devant eux une foule de ces *collines de Riedgras*, qui auparavant avoient coûtume de paſſer la plus grande partie de l'année ſous l'eau, mais qui préſentement ſont moins garnies d'eſpeces d'herbes & de plantes, ou même quand la terre marêcageuſe devient plus compacte, ſe détruiſent peu à peu, après avoir occupé une place à peu près tout à fait inutile. Ces collines ſont à la vérité, comme il a déjà été dit, gluantes & fermes, mais elles le deviennent de plus en plus, de ſorte qu'on ne ſauroit les enlever de la place qu'avec les plus fortes haches ou les bêches les plus peſantes, parce qu'elles ont pénétré la tourbe & y ont formé avec leurs racines une eſpece de bourre. Si le ſol demeure encore pendant quelque tems humide, & qu'il ſoit toujours ſous l'eau, il y naît à la place des plantes ſuſdites des herbes meilleures & plus fines; derniere circonſtance qui dépend en quelque ſorte d'une préparation convenable & ſucceſſive du ſol. Dans quelques endroits, après avoir détaché ces *collines de Riedgras*, on les charrie enſemble, on les fait ſécher, & on les met en monceaux où elles acquierent une ſolidité & même une dureté particuliere. J'ai remarqué que, dans les villages ſitués dans des fonds marêcageux, & où le bois à brûler manque, on peut s'en ſervir en place de mauvaiſe tourbe, ou bien, comme elles ſont en géneral d'une durée aſſez conſidérable, & qu'on peut les arranger d'une maniere ſolide les unes à côté des autres, on peut les employer

à la

à la place d'autres courtes faſcines pour remplir les creux des chemins & des cours. Dans d'autres contrées où l'on tranſporte le limon des campagnes baſſes ſur des champs élevés & ſecs, on brûle de grands monceaux de ces *collines de Riedgras*, deſſéchées avec toute la terre qui y eſt attachée, pour en répandre enſuite les cendres ſur les terres.

Outre les diverſes manieres que j'ai indiquées juſqu'ici de tirer parti des *Riedgras* d'eſpeces grandes & dures, & de les employer par ci par là à différens uſages, un des plus importans ſans contredit conſiſte en ce qu'en Automne, les *collines de Riedgras* nouvellement détachées peuvent ſervir avantageuſement à conſtruire des chauſſées durables dans des endroits bas à travers les marais. La néceſſité d'un pareil uſage deviendra manifeſte d'elle-même, ſi l'on fait attention à la multitude de marais d'une ſi grande étendue, qu'on rencontre de côté & d'autre dans la Marche, tant dans l'intérieur des grandes forêts qu'autour d'elles, de façon que preſque partout ces marais les traverſent ou les environnent. Quelques-uns empêchent de paſſer d'une partie de la forêt dans l'autre, excepté dans la ſaiſon de l'année la plus ſeche; & même dans les endroits où le marais eſt profond, & dont la ſituation eſt telle qu'il vient s'y verſer de grands lacs, ou qu'il y paſſe des courans qui font de fortes crevaſſes, ſans qu'on puiſſe donner aucun écoulement à l'eau par des foſſés, le paſſage d'un endroit à l'autre n'eſt preſque pas poſſible, même dans les hyvers les plus rudes ſur la glace, ou autrement ſur des ponts & par des ſentiers particuliers, dont les Seigneurs, les Communes ou les voiſins regardent quelquefois l'entretien comme un trop grand fardeau.

Quand on penſe à la quantité de bois qui ſe conſomme vû la courte durée des ponts tant grands que petits & des ſentiers, comme auſſi à ces chauſſées de poutres (*Knippeldämme*) qu'on a coutume de conſtruire dans les terrains bas, dont la longueur va quelquefois à un demi-mille ou à un mille, & qui ſont d'un entretien ſi coûteux, ſans qu'elles puiſſent néanmoins ſervir pendant longtems de maniere à ne donner aucun ſujet de plainte aux voyageurs; à quoi il faut ajoûter

que dans les ſaiſons humides il y a par ci par là des endroits qu'on ne ſauroit paſſer ſans danger; le voeu univerſel ſeroit aſſurément qu'on trouvât un moyen efficace de remédier à tous ces griefs. Là où la police eſt exacte, on tient tout en ordre, mais on ne laiſſe pas de détruire beaucoup de bois pour des réparations de courte durée; & l'on ne peut gueres même aller à la racine du mal dans les terrains tout à fait bas & marêcageux: là ſurtout où les eaux de l'hyver & d'autres inconvéniens ſemblent rendre toutes les précautions inutiles, & où la longueur de ces chemins eſt telle qu'il n'eſt pas poſſible de trouver les moyens de ſubvenir aux fraix qu'ils exigent, ou de ſe procurer à plus grands fraix encore des ſecours qui ſont à une trop grande diſtance.

Pour ne pas entrer ici dans de plus grands détails ſur les entrepriſes conſidérables & fort étendues, il reſte toujours des terres propres, des cantons particuliers, où il y a des réparations indiſpenſables à faire, tant à cauſe des dommages qu'elles éprouvent & des beſoins des habitans, que pour ſe conformer à la rigueur des Ordonnances de la Police du pays. Les gens de la campagne préferent toujours dans ces cas les opérations les plus ſimples & les plus courtes à celles qui ſont fort compliquées, & qui demandent de longues manœuvres artificielles, recherchant ſurtout ce qui eſt dans leur voiſinage & ce qu'ils peuvent le plus aiſément raſſembler avec la plus grande épargne de leurs fraix, de leur travail & de leur tems. Il eſt juſte auſſi de les ménager à tous ces égards autant qu'il eſt poſſible, vû le grand nombre d'autres charges qu'ils ſont obligés de ſupporter, puiſque ſans cela on ne ſauroit plus les déterminer promtement à vaquer aux ſervices qu'on veut en tirer; ſans compter qu'à cet égard il n'arrive que trop ſouvent d'agir contre les premieres & les plus générales regles de l'Oeconomie de la campagne, ſuivant leſquelles on ne doit jamais, ſous quelque prétexte que ce ſoit, impoſer au cultivateur des obligations qui le détournent de quelques circonſtances eſſentielles de la culture des terres, & le traverſent en quoi que ce ſoit à cet égard.

Quant

Quant à ce qui regarde la façon particuliere de l'emploi de quelques grandes eſpeces de *Riedgras*, il convient de remarquer que, dans les villages marêcageux, les îles & autres terrains bas, où l'on a dans le voiſinage une grande quantité de ces *collines de Riedgras*, on peut les employer tant à conſtruire les chauſſées les plus ſolides & les plus durables à travers les marais, qu'à étendre, élever & affermir en toute ſureté les jardins de la campagne. Et comme la largeur & la force de ces chauſſées, auſſi bien que leur hauteur & leur forme, dépendent de certaines circonſtances qui ne permettent de régler tout cela que ſur les lieux mêmes, convenablement à certaines vues & à certains uſages; comme d'un autre côté les *collines de Riedgras* fraîches peuvent être certainement employées à la place des faſcines courtes les plus durables, pourvu ſeulement qu'on les employe dans des terrains humides; il eſt aiſé d'inférer de là ſi l'on peut en faire un uſage ſemblable dans les contrées marêcageuſes, pour la conſtruction de ces remparts bas qu'on fait pour affermir les terres. Les tourbieres & les marais de nos forêts offrent aſſez de ſemblables faſcines; au lieu que, dans les prairies fertiles un peu élevées, & où ſe trouve une meilleure ſorte d'herbes, il n'y a preſque point de ces faſcines, ou du moins elles y ſont fort rares; ce qui eſt avantageux aux poſſeſſeurs qui s'en paſſent volontiers, pourvu qu'ils ayent de bonne herbe.

Quand on croit avoir raſſemblé dans le voiſinage la proviſion néceſſaire de *faſcines de Riedgras*, ſuivant le devis qu'on a fait à ce ſujet, on attend le milieu de l'été où l'eau s'eſt fort retirée des endroits marêcageux & des autres bas fonds, ou du moins aſſez pour qu'on puiſſe y travailler; alors on trace régulierement avec de petites perches la chauſſée qu'on veut conſtruire, & l'on détermine la longueur, la largeur & la hauteur qu'il convient de lui donner, ſur la plus haute élévation à laquelle l'eau puiſſe atteindre. Par rapport à ces chauſſées courtes & petites, qui ſont les plus abondantes partout, & dont on ſe ſert pour la communication des divers endroits des bois, de façon qu'on puiſſe paſſer de l'un à l'autre, tant pour le travail que pour le

charroi; cela mérite beaucoup moins d'attention que les chauſſées d'une plus grande étendue, dont les uſages ſont d'une tout autre importance, puiſque par leur moyen, dans toutes les ſaiſons de l'année, on peut traverſer les lieux marêcageux des forêts, au lieu que ſans cela on eſt obligé d'attendre la ſaiſon propre, ou de faire de grands détours & d'eſſuyer pluſieurs autres incommodités. Je n'ai point de remarques particulieres à faire ſur la maniere de couper, préparer & charrier ces faſcines, ſi ce n'eſt que pour épargner le tems il faut que la direction de ce travail ſoit confiée à des gens entendus. Ces faſcines fraîches & vertes doivent être portées au lieu où l'on a auparavant tracé la chauſſée qu'on veut faire, & placées d'une maniere exactement allignée, & auſſi fermes l'une contre l'autre qu'il eſt poſſible, de façon que les racines des rangées extérieures demeurent toujours tournées en dedans; on affermit auſſi tout de ſuite les couches les plus baſſes, avec de la terre de marais, de forêt, ou du ſable; on en remplit bien exactement tous les interſtices des racines, & pour achever de donner de la conſiſtance à cet ouvrage, on le foule un peu aux pieds. Sur ce fond on poſe une couche tranſverſale de longs branchages de bois verd, qui doivent avancer des deux côtés un peu au delà de l'allignement. Cette couche ſe recouvre avec une autre de faſcines, de terre & de ſable, dont l'arrangement eſt le même que celui de la plus baſſe. On continue de la ſorte en poſant des couches alternativement en long & en large, juſqu'à ce qu'on ait donné à la chauſſée la véritable hauteur qui lui convient rélativement à l'élévation de l'eau au printems: avec cette différence ſeulement que la couche de terre tout à fait ſupérieure, doit être deux à trois fois plus forte & entremêlée d'une plus grande quantité de pieces de gazon. Mais, comme tout amas de terre s'affaiſſe dans la ſuite plus ou moins, on peut s'aſſurer le mieux de cette circonſtance par rapport à la terre de deſſus. Dans les commencemens, pour aſſurer ces chauſſées, juſqu'à ce que la terre ſe ſoit bien poſée, on peut mettre des deux côtés de courts piliers d'aune, qu'on enfonce tout iſolés, & au printems ſuivant on peut planter entre deux des tiges de ſaule & d'autres arbuſtes.

Quand

Quand on ſuit les inſtructions que nous venons de donner, on a la ſatisfaction de voir, quand la ſaiſon eſt douce, comment les *faſcines de Riedgras* frais qui ſont entremêlées dans ces chauſſées, verdiſſent en peu de tems, & comment la chauſſée même, à cauſe de l'humidité du fonds, ſe conſolide dans l'eſpace de quelques mois, devenant comme une bourre, & enfin, comment depuis lors il eſt aiſé de l'entretenir à peu de fraix. Les petites chauſſées de cette eſpece peuvent être conſtruites tout d'abord avec la ſolidité qu'elles doivent conſerver dans la ſuite, & ſans qu'il ſoit beſoin de s'en mettre en peine, ſurtout quand, ſous chacune des couches tranſverſales de branchages verds, qui donnent d'ailleurs à la chauſſée la force & la figure qui lui conviennent, on a ſoin de mêler en même tems toutes ſortes de brouſſailles dont les racines ſoient tournées en dedans, & dont les rejettons ſe faſſent voir à la ſurface même de la chauſſée en perçant les branchages. Mais il faut choiſir les eſpeces de brouſſailles dont les racines pouſſent le plus vîte & en plus grande quantité, & qui avec cela ſont accoûtumées à vivre perpétuellement dans l'humidité, demeurant pendant l'hyver dans la glace & dans l'eau. Avec cela ou peut faire choix de celles qu'on a occaſion de voir croître dans les terres marêcageuſes entre les aunes & les ſaules, & qui dès la premiere année peuvent faire une bonne haye vive à côté de la chauſſée. Telles ſont les ſuivantes:

Solanum 5. Dulcamara. Linn. Sp. Pl. 264. Solanum ſcandens, ſ. Dulcamara. C. B. Pin. 167.

Rhamnus 4. Frangula. Linn. Sp. Pl. 280. Frangula Dodon. P. 784.

Rhamnus 1. catharticus. Linn. Sp. Pl. 279. Cervi ſpina. Cord. Hiſt. 175.

Sorbus 1. aucuparia. Linn. Sp. Pl. 633.

Viburnum 2. Opulus. Linn. Sp. Pl. 384. Sambucus aquatica, flore ſimplici. C. B. Pin. 456.

Cornus 2. ſanguinea. Linn. Sp. Pl. 171. Virga ſanguinea. Dod. P. 482.

Ribes 3. nigrum. Linn. Sp. Pl. 290. Groſſularia non ſpinoſa, fructu nigro. C. B. Pin. 555.

Hu-

Humulus 1. Lupulus. Linn. Sp. Pl. 1456. Lupulus mas & femina. C. B. P. 298.

Prunus 1. Padus. Linn. Sp. Pl. 677. Ceraſus racemoſa, ſylveſtris, fructu non eduli. C. B. P. 451.

Betula 5. Alnus. Linn. Sp. Pl. 1394. Alnus rotundifolia glutinoſa viridis. C. B. P. 428.

Au reſte, que de ſemblables chauſſées coupent les marais en travers, ou en ſuivant toute la longueur, il faut toujours prendre garde, par rapport à la pente, de quel côté ſe fait l'écoulement des eaux de l'hyver, ou de pluie, qui *quelquefois viennent de forêts* entieres & ſe portent vers les fonds. Pour cet effet on ne doit pas oublier de faire dans ces chauſſées les coupures convenables pour faciliter de toutes les manieres poſſibles l'écoulement de ces eaux, & mettre par deſſus de courtes poutres en guiſe de ponts.

Tout ce que je viens de dire de l'emploi utile qu'on peut faire de certaines grandes eſpeces du *Riedgras*, ou *Seggegras*, ſemblera probablement aux uns beaucoup trop connu, & aux autres trop commun, pour avoir mérité de faire l'objet d'une Diſſertation particuliere. Mais ceux qui ſavent qu'on ne ſauroit trop parler, non ſeulement aux gens du commun de la campagne, mais encore aux perſonnes d'un état plus élevé, qu'on ne ſauroit, dis-je, preſque jamais les mettre trop au fait des bonnes choſes, & leur en bien enſeigner les uſages utiles, concevront des idées plus avantageuſes de mon travail. Car, entr'autres exemples, y a-t-il rien de plus connu, que ce que les racines de l'herbe nommée Dent de Chien pourroient être beaucoup mieux employées qu'on ne le fait en les brûlant en pleine campagne. La quantité de cendres qu'elles donnent & l'avantage qu'on en retire, ſont fort peu de choſe en comparaiſon du bien que leurs parties eſſentielles que l'on détruit en les brûlant, feroient ſi on les laiſſoit pourrir & fermenter. Quoi donc! Cette herbe étant une eſpece de froment, on pourroit tirer beaucoup meilleur parti de ſa racine balſamique, ſavoneuſe, douce, douée d'une viſcoſité nourriſſante & propre à purifier le ſang; auſſi en la nettoyant

toyant bien de tout ſable, & en la faiſant ſécher, on pourroit après Noël la mêler avec la paille hachée qu'on donne au petit bêtail à corne, ou même à la nourriture des veaux. Ne ſeroit-elle pas beaucoup plus forte & plus ſaine que de mauvaiſe paille; & quelle ne ſeroit pas la beauté & la bonté du beurre qu'elle donneroit? Mais perſonne ne veut s'inſtruire des petites choſes, quoiqu'elles ſoient déjà appuyées ſur une longue expérience. Le ſuc de cette racine cuit & clarifié a beaucoup d'affinité avec le miel; on y découvre de plus toutes les propriétés d'une manne déliée & diſſoute; & elle rend de très bons ſervices dans les *oppreſſions de poitrine & dans les pituites abondantes. Il y a des endroits* où le foin manque, où le pâturage d'été eſt fort maigre, & où on ne laiſſe pas de brûler ces racines.

Les circonſtances ſont à peu près les mêmes à l'égard d'une mauvaiſe herbe fort commune, que nous nommons *Reinfarre*(*), dont on pourroit auſſi faire un fort bon uſage. Cette plante occupe des demi-milles d'étendue dans les terrains ſablonneux des forêts, mais on ne l'employe preſque qu'à la mêler parmi la litiere du bétail, & à augmenter le fumier: ou auſſi quelquefois, à la place du foin & de la paille, on y empaquete des verres, de la poterie, des plaques de pierre & d'autres choſes ſemblables. Mais comme elle ſe multiplie beaucoup trop en divers endroits, ſans qu'on ſache en tirer d'autre parti, ou qu'on veuille faire des eſſais à cet égard, on ſe contente de la faucher, ou, lorſqu'on le peut, de l'extirper. Cependant, ſi l'on avoit tourné ſes vues du côté du ſavon, de la potaſſe, ou du verre, ou qu'on eût conſidéré les peaux de veau, de brebis & de chevre, qui peuvent être préparées par la voie humide avec cette plante, peut-être qu'on apprendroit à l'eſtimer beaucoup davantage.

(*) *Cincinalis* 1. Syſt. Plant. noſtr. 1179. Filix fœmina officinarum. Dodon. P. 462.

PENSÉES
SUR LA NE'CESSITE' D'UNE
ECOLE VÉTÉRINAIRE,
AVEC DES PROJETS
SUR LA MANIERE DE L'E'TABLIR,
DRESSE'S
A' LA RE'QUISITION DU GRAND DIRECTOIRE ROYAL
ET SOUMIS
A' L'EXAMEN DE L'ACADE'MIE ROYALE
DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES. (*)

PAR MR. COTHENIUS.

Traduit de l'Allemand.

C'eſt dans votre ſein, Meſſieurs, que j'ai puiſé les idées contenues dans ce Mémoire; ſoyez-en je vous prie les juges.

Vous vous rappellerez ſans doute que cet illuſtre Corps auquel eſt confié le ſoin de tous les arrangemens qui concernent la proſpérité publique, & qui eſt déſigné par le titre de Grand Directoire Royal, s'eſt adreſſé à Vous, pour Vous demander votre avis ſur l'établiſſement d'une *Ecole vétérinaire:* & cette idée venoit de notre auguſte Monarque lui-même.

Lorſque vous eûtes la connoiſſance de ce que je penſois à cet égard, en qualité de Membre du College de ſanté, vous accordâtes votre approbation au contenu de la Lettre que j'eus l'honneur de vous adreſſer ſur cette matiere.

Ce fut en conſéquence de cela que le Grand Directoire Royal & le College de ſanté me chargerent de mettre formellement la main à l'œuvre,

(*) Lû le 21 Janvier & le 18 Février 1768.

l'œuvre, en développant avec plus d'étendue des vues dont je n'avois donné qu'une ſorte d'eſquiſſe.

Ce n'eſt pas d'hier ni d'avanthier que la funeſte maladie des beſtiaux déſole nos troupeaux, ruine leurs poſſeſſeurs, & réduit aux plus déplorables extrémités les habitans des campagnes. *Virgile* avoit déjà été témoin de ce touchant ſpectacle; il le décrit avec énergie au III Livre des Géorgiques :

Nunc quoque poſt tanto vident deſertaque regna
Paſtorum, & longe ſaltus lateque vacantes.

Parcourez les monumens de l'Antiquité. Liſez en particulier dans *Tite-Live*, Liv. V. la deſcription exacte d'une ſemblable contagion qu'éprouva le Latium, l'an de Rome 355. „Comme on ne „pouvoit, dit-il, ni en découvrir la cauſe, ni en procurer la fin, il „fallut recourir aux Livres Sybillins.“ Il parle encore au Livre III. d'un autre mal ſemblable, pour lequel les ſecours humains demeurant ſans efficace, le Sénat exhorta le peuple à ſe tourner du côté des Dieux, ordonnant que les Romains avec leurs épouſes & leurs enfans iroient aux pieds des Autels préſenter les ſupplications les plus ferventes. On voyoit les meres proſternées balayer les Temples de leurs chevelures, en demandant que la colere céleſte s'appaiſât & que la peſte prît fin.

Il y a encore d'autres récits ſemblables dans *Tite-Live*, auſſi bien que dans *Thucydide*, *Denys d'Halicarnaſſe*, *Lucrece*, *Virgile:* il ſeroit ſuperflu de les rapporter ici d'une maniere plus détaillée. Il ſuffit que ces autorités prouvent aſſez que la maladie dont les bêtes à corne ſont les victimes n'eſt pas nouvelle. Il s'eſt auſſi trouvé dans tous les tems des gens qui ont cherché à y apporter des remedes. Mais *Virgile* ſe plaint encore amérement de leur inutilité:

— *Quid labor aut bene facta juvant?*

Et ailleurs

Quæſitæque nocent artes: ceſſere Magiſtri
Phillyrides Chiron, Amythaoniusque Melampus.

Notre ſiecle, qui eſt ſi porté à ſe railler de l'Antiquité, & qui ſe glorifie de tant de nouvelles découvertes, a-t-il été plus heureux dans la recherche d'un ſpécifique contre cette contagion?

J'oſe affirmer que le même mal contagieux qui regne parmi les bêtes à corne, qui a fait juſqu'ici les plus grands ravages, & dont rien ne promet encore la fin, eſt une ſimple continuation de celui qui fut apporté pour la premiere fois, il y a un demi-ſiecle, d'Orient, la patrie de la véritable peſte; & qui, comme le témoignent les hommes les plus dignes de foi, *Lancifi* & *Ramazzini*, vint d'un ſeul bœuf attaqué de ce mal, que des Marchands de Dalmatie, voyant qu'il ne pouvoit ſuivre le troupeau, laiſſerent dans les champs de Padoue, où il infecta la province entiere & tous les Etats de Veniſe. De là cette contagion ſe répandit en Italie, en France, en Angleterre, dans les Pays-bas, en Allemagne, elle gagna le ſommet des Alpes, elle brava la rigueur des climats les plus froids, & déploya une ſi grande fureur en Dannemarc, en Suede, en Livonie & en Ruſſie, qu'à peine, dans ces immenſes contrées, reſta-t-il çà & là quelques pieces de bêtail.

Quelquefois il ſembloit que le mal avoit entierement ceſſé. Mais c'étoit plutôt un air bénin qui l'avoit adoucie, ou des pâturages ſalutaires qui émouſſoient le venin.

Ici il faut beaucoup imputer à la témérité des hommes, qui ont porté imprudemment la contagion de tous côtés par des moyens innombrables, dans leurs habits, avec le fourrage, les utenſiles, &c. ce qui a perpétué le mal.

C'eſt ainſi en particulier qu'on a vu la contagion faire tant de tours & retours différens, engendrer abondamment de nouvelles cataſtrophes dans les tems & les lieux où l'on s'y attendoit le moins; de façon qu'on ne peut jamais compter qu'on en ſoit parfaitement à l'abri.

Toutes ces raiſons m'ont engagé à rechercher avec tout le ſoin dont je ſuis capable, d'où vient l'inutilité ou du moins l'inſuffiſance des moyens que les plus habiles gens ont mis en œuvre juſqu'ici pour extir-

extirper ce mal; & j'en infere l'importance d'une *Ecole vétérinaire*, recherchant en même tems les moyens d'y faire régner une doctrine ſolide, & des principes lumineux, à l'aide deſquels on parvienne enfin à trouver la méthode aſſurée de traiter & de guérir ce mal. J'entre en matiere.

La conſtitution intérieure des animaux, l'uſage propre des organes d'où dépendent leur ſanté & leur vie, & les différences qui ſe trouvent à cet égard entre leurs parties intérieures & celles des hommes, ſont des objets preſque étrangers à nos Médecins, parce qu'on ne les leur préſente pas dans les Univerſités, & que, lorſqu'ils ſont livrés à la pratique, ils écartent ſoigneuſement des occupations auſſi pénibles. Il ne faut pas s'étonner après cela que les Médecins établis dans nos Villes & dans nos Campagnes, & qu'on a coutume de nommer *Phyſiciens du pays*, lorſque les Colleges ſupérieurs les chargent de dreſſer des mémoires & de propoſer des vues dans les cas où la maladie des beſtiaux ſe manifeſte, ne s'en acquittent pas avec beaucoup de ſuccès, ou n'exécutent pas même les inſtructions qu'on leur donne, de la maniere la plus convenable à l'utilité publique.

On ſeroit à la vérité en droit d'exiger que ces Phyſiciens regardaſſent comme faiſant partie du devoir de leur charge, ce qui ſe rapporte à la ſanté du bêtail; & que, pour s'y conformer, ils ne négligeaſſent aucune occaſion d'acquérir, par leur propre application, une connoiſſance ſuffiſante des différentes maladies des beſtiaux.

Cependant il faut dire, à la décharge des Médecins en général, qu'il exiſte encore fort peu de ſecours dans cette partie de la ſcience médicale; & enſuite, à la décharge des Médecins de Province en particulier, que la plûpart d'entr'eux ſont ſi mal rentés qu'ils ſe trouvent dans la néceſſité de conſacrer tous leurs ſoins aux occupations qui peuvent leur rapporter de quoi ſubvenir à leurs beſoins; pour ne pas ajoûter qu'il leur manque, auſſi bien qu'à la plûpart des Savans, des occaſions de ſe mettre ſuffiſamment au fait de l'œconomie rurale, dont la conſervation du bêtail fait une partie conſidérable.

Il ſe trouve néanmoins encore des Médecins chargés de fonctions publiques, qui ſont nés avec un vif déſir de contribuer à l'utilité commune, & à qui la Nature a donné un heureux génie. Auſſi ont-ils pris formellement à tâche d'acquérir une connoiſſance plus approfondie & des notions plus ſaines des maladies du bêtail, ayant ſaiſi toutes les occaſions que leur en fourniſſoit l'exercice de leur emploi, qui leur impoſe l'obligation d'aſſiſter à l'ouverture de toutes les bêtes mortes du mal contagieux, & de prendre des informations exactes des circonſtances de leur maladie.

Il faut avoir été avantagé par la Nature d'une façon toute extraordinaire, pour être en état de s'inſtruire par ſoi-même ſans rencontrer aucunes difficultés. D'ailleurs les campagnes offrent ſouvent une intempérie des ſaiſons à l'abri de laquelle on eſt dans le Théatre anatomique; & il eſt aſſez dégoûtant de voir faire le métier d'Anatomiſte à un groſſier & ignorant Valet de Bourreau. Pour acquérir des connoiſſances anatomiques, il faut mettre ſoi-même la main à l'œuvre, ſans quoi l'on ne ſauroit juger des opérations des parties intérieures d'un corps. Juſqu'ici on a cru ſe deshonorer en s'occupant d'un pareil travail, & l'on ſe retranche ſur le préjugé reçu, quoiqu'inſenſé, qu'il ne convient pas de ſe mêler des œuvres du Bourreau.

Ceux qu'on nomme Phyſiciens, de même que tous les Praticiens en général, ſont obligés de ſe mettre au fait de la ſtructure intérieure du bêtail, & d'apprendre de l'infortuné campagnard que la maladie des beſtiaux a ruiné, en quoi conſiſtent ſes ſymptomes. La compaſſion, le devoir d'être utile, le déſir de contribuer au bien public, ne peuvent que redoubler l'attention de tout honnête Phyſicien. Autant que le tems & les occaſions le lui permettent, il doit être l'Obſervateur le plus ſoigneux. Alors il ira bientôt aſſez loin pour être en état de tirer des conſéquences réfléchies de ſes obſervations & de celles des autres. Il parviendra plus aiſément que d'autres, à qui ces avantages manquent, à découvrir de quelle maniere & par quelles voies on peut tant prévenir la maladie des beſtiaux que la guérir; & comment il faut débu-

débuter pour arriver au moins à cet égard à une eſpece de certitude. Mais il eſt plus d'une fois arrêté dans ſes profondes ſpéculations, & rallenti dans ſon zele louable, quand l'exécution de ſes projets rencontre tant de difficultés, qu'il ne ſauroit abſolument y parvenir, ou du moins la faire réuſſir dans toutes ſes parties, en ſorte que les choſes ne peuvent être miſes ſur le pied qu'exigeroit néceſſairement le plan qu'il a conçu.

Rien n'arrête plus les progrès des Sciences, que lorſque ceux même à qui il convient d'en procurer l'avancement, en hériſſent la route de tant d'épines qu'ils font perdre aux mieux intentionnés l'envie de la ſuivre, en leur ôtant l'eſpérance qu'ils avoient conçue de ſe rendre utiles.

Enfin, il faut convenir que les préjugés ſuivant leſquels le ſoin des maladies du bêtail eſt cenſé ne devoir être le partage que des Bergers, des Maréchaux & des Bourreaux, ont exclu de la Médecine l'Art vétérinaire, & ont tout au plus permis aux Oeconomes & aux gens de la campagne de s'occuper de ces ſoins.

Il eſt bien vrai que ces gens-là ont plus d'occaſions de voir & de conſidérer attentivement tout ce qui arrive au bêtail. Et comme ce bêtail fait une des principales parties du profit qu'on retire des travaux œconomiques, le campagnard doit avant toutes choſes veiller à ce que ſon bêtail demeure en parfaite ſanté & conſerve toutes ſes forces.

Ici l'on rencontre de nouvelles excuſes, fondées ſur ce que la multitude des opérations que renferme l'œconomie rurale ne permet à celui qui en eſt chargé d'accorder qu'un ſoin général à l'entretien des beſtiaux; à quoi l'on ajoûte qu'un bon Oeconome peut être en même tems un mauvais Obſervateur, parce que cette derniere qualité ſuppoſe qu'on a déjà au moins quelque teinture de Phyſique, au moyen de laquelle ſeulement on eſt convaincu de la néceſſité d'être attentif aux plus petites circonſtances, & l'on apprend quels ſont les cas dont on doit faire principalement choix pour arriver à des notions claires & diſtin-

diſtinctes de la maladie contagieuſe, & en bien ſaiſir les caracteres diſtinctifs, qui empêchent de la confondre avec tout autre mal. Diſons encore que ceux-là même à qui l'on devroit défendre de former des concluſions, ſont les plus promts à en faire de précipitées, préſumant trop de leur capacité, & n'étant pas encore bien au fait de tout ce qui doit concourir avant qu'on ſoit en droit de déterminer une cauſe. Les Savans eux-mêmes n'ont été de tout tems que trop portés à bâtir des ſyſtemes, ſans s'être aſſez aſſurés de la ſolidité du terrain, ou avoir raſſemblé les matériaux néceſſaires pour l'édifice.

Voilà des raiſons manifeſtes & bien conſidérables du peu de progrès qu'on a fait juſqu'ici dans l'Art vétérinaire, à l'égard duquel on auroit grand tort de ſe vanter d'être parvenu à quelque prérogative ſur les Anciens, puiſqu'à dire la franche vérité, c'eſt à eux que nous ſommes encore redevables des moyens qu'on employe actuellement pour la plûpart avec efficace dans la maladie du bêtail, & que l'obſervation a confirmés dans bien des cas.

Mais, ſi nous voulons reconnoître & déclarer, comme nous le devons, que la connoiſſance & la cure des maladies en queſtion, ſuffiſent pour occuper un homme entier, & demandent même une des meilleures têtes, tout comme il en eſt par rapport à la connoiſſance & à la cure des maladies du corps humain; il s'enſuit de là qu'avec la même application on peut eſpérer d'arriver à des connoiſſances certaines & à des principes lumineux au premier égard, comme on y eſt arrivé au ſecond.

Or, ſi l'on ſe propoſe de rendre un compte raiſonné de tous les ſymptômes qui peuvent ſe manifeſter dans une maladie, il n'y a ſans contredit rien de plus naturel que de commencer par s'inſtruire de ce qui ſe paſſe dans le corps d'un animal, lorſqu'il eſt dans l'état de ſanté: c'eſt un préliminaire eſſentiel à la connoiſſance de ſes maladies.

Il n'eſt pas moins vrai que nous ne pouvons rien comprendre dans les opérations qui concernent la ſanté & la vie des animaux, ſi nous

nous n'étudions préalablement leur ſtructure intérieure, la ſituation & la liaiſon de toutes les parties qui ne nous ſont pas encore connues d'une maniere ſuffiſamment diſtincte.

Suivant tout ce qui vient d'être dit, le Médecin du bêtail doit en être auparavant l'Anatomiſte. Cela ne ſuffit pas encore pour la Phyſiologie; car on peut connoître une partie du corps, ſa ſituation, ſa ſtructure extérieure & intérieure, ou même la texture des veines, des nerfs, & de toutes les fibres dont il eſt compoſé juſqu'à ſa premiere origine, de la maniere la plus parfaite, ſans être pour cela en état de dire dans quelles vues ces parties ont été conſtruites, & pourquoi elles le ſont ainſi plutôt qu'autrement, d'où vient qu'elles occupent la place qui leur a été aſſignée plutôt que toute autre, en quoi proprement conſiſtent leur fonctions, & combien chaque organe particulier contribue à la conſervation du tout.

Pour embraſſer toutes ces connoiſſances, il ne faut laiſſer échaper aucune des occupations naturelles de l'animal, pendant qu'il ſe ſoutient dans l'état de ſanté, par exemple, comment il digere, fait ſes déjections, ce qu'il fait dans l'étable, de combien de repos il a beſoin, quel degré & quelle durée de mouvement il peut ſoutenir, quels ſont la boiſſon, le fourrage, la litiere qui lui conviennent, quelle doit être la température de l'air pour qu'il y demeure ſain, &c. tout cela doit être vu & conſidéré de la maniere propre à en donner les idées les plus diſtinctes. Ainſi un ſavant Médecin des beſtiaux doit être plus qu'un Savant ordinaire, il doit entendre plus d'un Art, ne pas ſe borner ſurtout à celui de parler bien, de faire des Diſcours ou même des Livres qu'on applaudiſſe. Il a beſoin d'une connoiſſance vive de tous les objets que nous avons indiqués; il doit être particulierement Oeconome auſſi expérimenté que judicieux avant que de ſe trouver en état de donner de juſtes explications des fonctions intérieures des parties de l'animal. Il doit auſſi viſiter lui-même le foin & le fourrage dans les greniers, parcourir les campagnes, errer dans les prairies, s'enfoncer dans les bois, côtoyer les eaux courantes, & pénétrer dans les ombrages des

bois les plus profonds. Il doit être le premier Berger & Gardien des troupeaux.

Mais, comme il eſt conforme aux regles de la prudence, lorſqu'on s'engage dans la recherche de choſes encore inconnues & obſcures, de commencer par les vérités connues & déjà démontrées, ou d'appeller à ſon ſecours les explications reçues des effets de la Nature, comme il eſt également permis de conclurre des cas manifeſtes à d'autres; on voit clairement que, ni le Naturaliſte circonſpect, ni l'Oeconome ſage & diligent ne ſuffiſent pas ici; mais que le Médecin expérimenté a ſeul l'avantage de pouvoir tirer & appliquer des conſéquences des cas ſemblables dans les maladies du bêtail.

En effet, de même que dans le jugement de toutes les maladies, on a déjà fait un grand pas lorſqu'on eſt bien inſtruit de la ſtructure intérieure & des fonctions naturelles de chacune des parties, qu'on ſçait, par exemple, quel eſt le méchaniſme de la circulation du ſang, celui de la reſpiration, celui de la digeſtion, & des autres opérations ſemblables qui ſont requiſes pour la ſanté & la vie; on comprend auſſi aiſément par là pourquoi toute la machine ſouffre quand un ſeul des viſceres intérieurs eſt attaqué, & ſouvent par la liaiſon de ces parties les unes avec les autres, on découvre ſans peine les rapports qu'elles ont entr'elles dans l'exercice de leurs fonctions.

Chez les créatures raiſonnables, qui ſont attentives à leurs ſenſations, & qui peuvent ſe faire connoître réciproquement l'état où elles ſe trouvent, il y a pluſieurs maladies dans leſquelles, au moyen de queſtions bien-faites, on peut démêler des choſes qui ſans cela demeureroient fort obſcures, & ſe débarraſſer de pluſieurs doutes. Le Médecin des beſtiaux eſt privé de ces avantages. Mais les plus habiles Médecins conviennent que, dans les maladies du corps humain, les accidens ſont quelquefois tellement compliqués, que lorſqu'avec le ſavoir le plus étendu, le jugement le plus ſain & les obſervations les plus exactes, ils veulent prononcer ſur la cauſe du mal, ils courent riſque de ſe tromper. Ils ſe tromperoient encore bien plus ſouvent, ou même

même ils n'arriveroient peut-être jamais à aucune certitude, mais ils ſe verroient toujours obligés de s'en tenir à des ſuppoſitions, ou à des vraiſemblances, s'ils n'avoient pas le courage d'interroger les cadavres, & en les ouvrant, en fouillant dans leurs entrailles, d'y chercher la cauſe du mal qui a cauſé la mort. Cela les a convaincus qu'il y a des vérités qu'on ne peut, pour ainſi dire, ſaiſir qu'avec les mains, & que c'eſt là l'unique moyen de parvenir à des aſſertions qui ne puiſſent être conteſtées.

Plus on rencontroit autrefois d'obſtacles dans ce genre, ou même plus il peut s'en rencontrer encore aujourd'hui, plus il convient d'accorder au Médecin des beſtiaux une liberté illimitée, en vertu de laquelle il puiſſe non ſeulement ouvrir les bêtes mortes du mal contagieux, mais auſſi celles qui en ſont actuellement attaquées, pour découvrir à l'œil & à la main propres ſens la cauſe du mal, & la mettre ſous les yeux de tous les aſſiſtans.

Mais, s'il veut tirer de ces expériences dont la certitude eſt convainquante, leur véritable utilité, s'il veut en déduire des conſéquences qui répandent du jour ſur les maladies, & qui puiſſent le guider dans les moyens qu'il peut employer, tant pour extirper la cauſe du mal que pour en guérir les ſymptômes actuels, il faut qu'il ſe familiariſe extrêmement avec la maladie de l'origine, des progrès & de l'iſſue de laquelle il rend compte, ou dont il doit entreprendre la cure.

Tout cela ne s'apprend, ni au Théatre Anatomique, ni en maniant la Pompe pneumatique, ni auprès des creuſets, ni dans le Cabinet ſur les Livres. Les rapports qu'on livre des maladies different toujours autant les uns des autres, que different entr'elles les capacités des Obſervateurs, dont l'un raconte plus qu'il n'a vu, & l'autre néglige ce à quoi il auroit du faire le plus d'attention.

Un bon Obſervateur doit tout voir de ſes propres yeux. S'ils ſont exempts de partialité, & qu'aucun préjugé n'offuſque encore ſon eſprit, s'il n'a adopté aucun ſyſteme, ſa vue ſera toujours ſuffiſante pour l'inſtruire.

Un habile Médecin des beſtiaux doit par conſéquent aſſiſter lui-même à leurs maladies, & les conſidérer avec l'œil & le génie d'un Obſervateur depuis le commencement juſqu'à la fin.

Mais, dans les commencemens, il laiſſe agir la Nature qu'il veut connoître & ſuivre ſeule, pour bien caractériſer le progrès & le cours du mal, & découvrir ce que la Nature peut effectuer par ſes propres forces. Et comme tous les effets de la Nature ſont exactement conformes aux loix du mouvement, & que chaque matiere a ſon tems déterminé où elle ſe développe, devient active, ou ceſſe d'agir; notre Phyſicien ne perd pas un inſtant de vue les périodes de la maladie, & fait ouvrir une piece de bêtail malade dès le moment où elle eſt attaquée, pour voir ce qui s'y paſſe d'abord, quelles ſont les parties où le mal réſide, & quelles ſont les fonctions que cela met en déſordre; d'où il infere ce qu'il y a de mieux à faire pour arrêter dans ſon principe cette contagion naiſſante.

Il fait pareillement ouvrir une autre piece pendant le cours du mal, ou après la fin du premier période; & par l'état des parties intérieures, il juge du tems qui eſt requis pour que la maladie atteigne ſon plus haut degré, & s'il eſt alors poſſible d'employer des moyens qui apportent au mal des changemens propres à empêcher que l'iſſue n'en ſoit funeſte.

On tue pour la troiſieme fois lorſque le mal eſt à ſon plus haut point, pour juger ſi la guériſon eſt encore poſſible, & quel eſt le remede qu'on pourroit employer pour s'aſſurer de procurer une iſſue favorable au mal.

On va plus loin encore; pour ſe mettre à l'abri de tout préjugé par rapport aux cauſes accidentelles des maladies contagieuſes, ne pas ſe laiſſer entraîner par le torrent des opinions régnantes & bâtir ſur des fondemens ſolides, on choiſit pendant la contagion, parmi les troupeaux qui ſont actuellement attaqués de quelque maladie généralement répandue, une ou deux pieces de bêtail encore parfaitement ſaines, pour eſſayer ſi l'on découvrira quelles ſont les diſpoſitions qui doi-

doivent préexiſter dans le corps pour participer au venin de la contagion, & dans lequel des organes il eſt à préſumer qu'elle commence proprement à s'introduire pour gagner & ſe répandre de là dans les autres; ce qui ſera rendu ſenſible par l'état affoibli de ces organes dont les fonctions altérées ne ſauroient réſiſter à la force du venin lorſqu'il vient à y pénétrer.

Quand on fait tuer & ouvrir une autre piece de bétail, qui donne déjà des indices extérieurs d'un commencement de mal, mais qui eſt encore debout, broute & rumine, de façon que c'eſt proprement alors que la maladie s'engendre, cette obſervation, quand même les ſens ne pourroient rien appercevoir, ne laiſſe pas de pouvoir conduire à des réflexions, qui, au défaut de connoiſſances plus diſtinctes, fourniront des vraiſemblances, propres à conduire toujours plus près de la découverte de la vraie nature du mal, & à nous mettre en état d'en avoir des idées plus claires, qui ſont ce qu'il y a de plus néceſſaire dans la cure. De cette façon on ſe conduira auſſi raiſonnablement qu'il eſt poſſible de le faire, juſqu'à ce qu'on ait des vues plus nettes & des ſecours plus efficaces.

Il n'a pas été difficile d'appercevoir combien les recherches que nous avons preſcrites juſqu'ici, different des prétendues inſpections des cadavres faites par les Phyſiciens & des rapports imparfaits qu'ils en dreſſent, ou des obſervations que de ſimples Oeconomes peuvent faire, celles-ci en particulier ne pouvant avoir lieu que quelques jours après la mort des beſtiaux; tems auquel la corruption a déjà fait de grands progrès, & ne permet que des obſervations imparfaites, dont les réſultats ne ſont rien moins que des vérités décidées.

Quand le Médecin s'eſt prévalu de tous les ſecours qui ſont à ſa portée & dont on a vu le détail ci-deſſus, il eſt en état de juger ſi & juſqu'à quel point ſont fondés les récits & les expériences des Oeconomes, des Médecins & des Livres au ſujet de la maladie des beſtiaux. Il ne s'embarraſſe point des conjectures de ceux qui ſont aſſez connoître

leur défaut de circonſpection, lorſque d'un ſeul cas ils tirent une conſéquence univerſelle, & croyent ſe frayer par là la route à la vérité.

Appuyé ſur les ſeules connoiſſances qui peuvent ſervir à pénétrer dans l'intérieur des choſes, le Médecin du bêtail tourne ſes vues à pouvoir établir ſur de ſolides fondemens de quelle maniere on peut parvenir à prévenir les effets du mal contagieux ſur le bêtail encore tout à fait ſain, ou qui paroit encore l'être, & ſur celui qui eſt déjà attaqué, & à quel but on doit tendre quand le mal eſt formellement déclaré & pendant le cours de ſes progrès.

N'admettant rien pour vrai ſans preuve, & ne partant jamais que d'Expériences bien conſtatées, pour oſer établir des principes & en tirer des conſéquences; le Médecin dont nous parlons trouve ainſi l'occaſion de ſe diſtinguer de la foule de ſes Confreres, qui ſont deſtitués & d'Expériences exactes, & de la connoiſſance des doctrines qui ſont un préalable néceſſaire à l'Art qu'ils profeſſent.

Ce n'eſt pas aſſez néanmoins qu'il connoiſſe les remedes & leurs parties conſtituantes, au moyen deſquelles ils déployent leur activité ſur le corps humain, il faut encore qu'il ſache quels effets ces remedes ſont capables de produire ſur chaque eſpece d'animal.

Ici il peut être guidé par la longue expérience de tant de cures différentes qui ont été employées dans la maladie des beſtiaux. Mais il réſulte de ces mêmes Expériences qu'on n'a encore rien pû déterminer de certain par rapport à la cure ſpécifique de cette maladie. C'eſt à chacun à répondre de ce qu'il a fait dans ce genre; & il ſe trouve que chacun eſt en état de produire des excuſes valables. L'un n'a pas eu les qualités néceſſaires à un Obſervateur, ni les connoiſſances préalables ſuffiſantes; l'autre a eu des occupations nombreuſes & indiſpenſables qui ne lui ont pas permis de ſe conſacrer tout entier à cet objet; & j'ai déjà fait voir que la ſcience de la Médecine des beſtiaux eſt une étude à part, qui demande un homme tout entier, & peut épuiſer la capacité du plus habile. On pourroit encore rapporter ici une troiſieme cauſe,

ou

ou même une quatrieme, du peu de fruit des inſtructions que le College de ſanté envoye aux Phyſiciens, ſavoir d'un côté qu'ils ſont ſouvent fort indolens & négligens, & de l'autre qu'ils trouvent dans les gens de la campagne tant de préjugés, d'opiniâtreté & de ſtupidité, qu'ils ne veulent pas ſuivre les arrangemens les plus exacts & les plus ſalutaires qu'ils leur propoſent, ni faire uſage des remedes qu'ils leur preſcrivent dans l'ordre convenable. Avec cela le Public n'accorde pas aux projets qu'on met ſur le tapis le tems néceſſaire pour faire les expériences déſtinées à les vérifier, & ſans leſquelles on ne ſauroit s'aſſurer quelle eſt l'efficace d'un moyen propoſé, s'il eſt ſalutaire, ſans force, ou nuiſible, & à quoi l'on doit attribuer l'inutilité des remedes ſalutaires & actifs qui, dans certains cas, ne produiſent pas les effets déſirés.

Le déſir d'avoir la gloire d'être l'inventeur d'un remede efficace contre la maladie des beſtiaux, a été la ſource de pluſieurs vaines tentatives, & a fait imaginer divers moyens chimériques, qui n'étoient fondés que ſur les viſions d'un cerveau creux ou d'une ratte gonflée. Le Public, le Campagnard en particulier, tout éperdu a fait plus d'attention aux fanfaronnades de ces Charlatans, qu'aux ſages meſures de ceux qui s'étoient mis au fait des caracteres eſſentiels du mal, & qui conſeilloient des remedes effectivement propres à dompter le venin, ou à empêcher ſes progrès, ou bien à augmenter les forces de la Nature au profit de l'animal ſouffrant, déduiſant toutes leurs conjectures des principes de l'art.

Les moyens choiſis avec le plus de circonſpection, & les projets les plus ſenſés ſont ordinairement ceux auxquels on fait le moins d'accueil, ou qu'on rejette même entierement. A peine les a-t-on fait connoître que d'autres viennent à la traverſe; les uns chaſſent les autres; & les expériences ne ſe font point dans l'ordre que demanderoient les différens périodes de la maladie: on veut éteindre le feu, lorſqu'il eſt en pleine flamme, ou bien l'on en change les étincelles en braſier. Il y a des cas où l'on s'apperçoit d'abord que ceux qui annoncent l'heureux effet de certains remedes ſe ſont fait illuſion, & que cela

la répugne à la nature même de la choſe; par exemple, qu'une ou deux doſes d'un remede quelconque puiſſent diſſiper l'inflammation intérieure, lorſqu'elle a déjà commencé à tourner en gangrene, ou que tous les vaiſſeaux ſont entierement détruits.

Dans de pareilles circonſtances il n'a pas été poſſible de s'aſſûrer par l'expérience de la vertu d'un remede. La multitude de ceux que l'on propoſe journellement, ſoit avec raiſon, ſoit ſans raiſon, & la plûpart d'après de fauſſes expériences, pluſieurs remedes ayant rendu de bons ſervices dans d'autres maladies épidémiques qui n'étoient pas la même que celle qui fait des ravages actuels, ou ayant été donnés mal à propos pour infaillibles; cette multitude devient à la fin telle qu'on en conclut l'incertitude univerſelle ou l'inefficace de tous les remedes, & que ne ſachant de quel côté ſe tourner, on perd toute eſpérance, on rejette tout ſecours, & l'on ne s'attend plus à voir jamais paroître un remede qui ait la force de dompter cette peſte des beſtiaux.

Quand on obſerve une choſe de la maniere dont le font communément ceux qui n'ont aucune teinture des Sciences expérimentales, on reſſemble aux Médecins de l'Antiquité, qui, faute d'avoir des connoiſſances ſuffiſantes de l'Anatomie, de la circulation du ſang, de la Chymie & de la Phyſique, quand leurs eſſais ne réuſſiſſoient pas, ne trouvoient rien de mieux à faire que d'exhorter les malades à recourir aux Dieux irrités, & à les appaiſer par le miniſtere des Prêtres.

On doit avoir de l'indulgence pour eux, vû la foibleſſe de leurs connoiſſances, qui ne ſuffiſoient pas pour entreprendre l'examen des choſes *a priori* & former des démonſtrations: ce qui ne leur permettoit pas de tirer des expériences qu'ils pouvoient déjà avoir faites, les avantages qu'Hippocrate a ſu tirer des ſiennes, auxquelles il a apporté toutes les qualités d'un bon Obſervateur, ſans être d'ailleurs imbû d'aucun ſyſteme propre à déranger la juſteſſe de ſes conſéquences, & à l'empêcher de découvrir la poſſibilité d'un venin qui infecte tout, auſſi bien que celle de lui oppoſer des digues & d'arrêter ſa furie. Qu'on puiſſe

puiſſe parvenir enfin à réuſſir dans de ſemblables recherches, c'eſt ce que témoignent entr'autres exemples, ceux du mal vénérien, & de la fievre miliaire des accouchées. Si d'habiles Médecins n'avoient pas fait de ces maux l'objet de leur application, s'ils n'avoient pas conſacré toutes les forces de leur eſprit, toute l'étendue de leurs connoiſſances, à bien connoître & à bien traiter ces fléaux de l'eſpece humaine, & qu'ils ſe fûſſent bornés à des expériences vagues; on ſeroit encore fort reculé & retardé par rapport à ces objets. Car c'eſt ici que l'habile Médecin ſe diſtingue de l'empirique, quoiqu'il ſache fort bien mettre à profit les expériences de celui-ci, toutes les fois qu'elles ſont faites avec intelligence & rapportées avec fidélité, les démêlant de toutes les inventions & les fauſſes opinions, qu'il rejette abſolument. Mais en même tems il ſaiſit d'un coup d'œil ce que l'autre ne comprendroit pas dans un an; il ſçait déterminer d'avance quelle ſera l'efficace des remedes propoſés, & pourquoi d'autres au contraire ſeroient nuiſibles, ne ſervant qu'à exalter le venin de la maladie, à en accélérer les progrès, & à en répandre la contagion. Il eſt auſſi en état de décider, ſi un préſervatif, quand même on l'éléveroit juſqu'aux nues, ne produira point des effets tout contraires à ceux qu'on en attend, en affoibliſſant la nature de l'animal, & en diſpoſant le ſang à s'imbiber de la contagion.

En attendant, il s'enſuit de tout ce que nous avons déjà dit, & même répété, comme digne d'être ſoigneuſement inculqué, que ces deux choſes ne ſauroient aller l'une ſans l'autre, ſavoir le talent de l'obſervation & l'art du raiſonnement. Celui qui fait & raſſemble des Expériences exactes, doit en peſer chaque circonſtance à la balance d'une ſaine Logique, diſtinguer ſoigneuſement ce qui doit être diſtingué, comparer ce qui doit être comparé, & ne pas faire un ſeul pas ſans la plus grande circonſpection.

Conſéquemment à ces regles, quiconque veut arriver dans l'*Art vétérinaire* à des aſſertions douées de quelque certitude, & former un ſyſteme régulierement conſtruit, ne doit ſe mettre à la pratique qu'après avoir acquis toutes les qualités & s'être ſervi de tous les

avantages que je viens de lui indiquer. Car, alors ſeulement, il ſera au fait de la ſtructure intérieure des animaux, lorſqu'ils ſont dans leur état naturel. Il ſçait quelle différence il y a entre l'état de leurs parties immédiatement avant la naiſſance du mal, & celui où elles ſe trouvent au commencement, dans le cours & juſqu'à la fin de la maladie.

Si avec cela il eſt au fait des remedes, de leurs parties conſtituantes, & de la maniere dont ils operent, il faut encore qu'il ſache quels ſont les ſucs ſur leſquels ils peuvent agir, & dont ils ſont propres à prévenir la deſtruction. Car le principe en vertu duquel la contagion attaque une bête à corne, & non un cheval ou une brebis, doit ſe trouver dans le mêlange même des parties du ſang de cette bête. C'eſt pourquoi, avant que notre Médecin puiſſe ſe mettre à la pratique de ſon art avec ſuccès, il eſt encore requis qu'il ſoumette à diverſes épreuves chymiques le ſang, le fiel, & les autres humeurs qui entrent dans le ſang, ou que diverſes ſécrétions en ſéparent, les examinant rélativement à certaines vues, & principalement pour voir en quoi les parties fluides different dans les bêtes à corne d'avec celles des autres animaux.

En conſéquence des mêmes principes, le Médecin renouvellera toutes ces expériences avec les ſucs d'une bête malade, pour apprendre à connoître la différence entre le ſang dans le cours de la maladie & dans l'état de ſanté, & pour découvrir à cette occaſion quels ſont les moyens propres à en prévenir la corruption. Alors il ſera en état d'entreprendre une cure préſervative du bêtail ſain qui ſe trouve dans quelque troupeau ou étable, où la contagion s'eſt déjà manifeſtée. Sa Pathologie lui fait connoître les indications auxquelles il doit rapporter ſon attention dans les commencemens de la maladie. Il eſt inſtruit de la vaſte multitude de tous les remedes que fourniſſent les trois Regnes de la Nature; il ſçait quelles ſont leurs parties conſtituantes; il peut rendre raiſon, pourquoi & ſous quelles conditions tel ou tel remede eſt en état de déployer telle ou telle efficace ſur le corps humain. Ce qu'il ignore, ce ſont les effets que les remedes produiront ſur les parties, tant flui-

fluides que ſolides du bêtail dont il entreprend la cure. Les expériences ſus-mentionnées, faites ſur le ſang & les humeurs du bêtail, tant ſain que malade, lui applaniſſent conſidérablement la voie dans cette cure, elles le dirigent dans les nouvelles expériences qui ſe préſentent à faire, & lui découvrent les remedes dont il peut ſe promettre le plus d'utilité. Il en choiſit donc un, le donne à l'animal auſſitôt qu'il eſt attaqué, le fait tuer douze heures après, & juge par ſon état intérieur de l'effet que ce remede eſt capable de produire au commencement du premier période de la maladie.

Il le donne enſuite à une autre bête, quand l'inſpection de la premiere a fait voir qu'il produiſoit des effets ſalutaires. Il adminiſtre de même, dans le cours de la maladie, des remedes appropriés à l'état de la bête, qu'il fait pareillement ouvrir. Et il continue de la ſorte pendant tous les périodes du mal. On peut dire que le Médecin doit commencer par devenir Boucher, avant que de bien exercer ſa profeſſion.

Tout Médecin des beſtiaux, à qui il eſt permis de ſuivre cette méthode, parvient beaucoup plus vîte & plus aiſément que les Médecins des hommes à une connoiſſance plus exacte & plus certaine, tant des cauſes prochaines du mal que des remedes qui lui conviennent & de leur véritable efficace. Il n'eſt obligé à aucune ſuppoſition gratuite; il n'eſt point ſéduit par ces fauſſes expériences qu'on ne ceſſe de débiter. Il voit tout de ſes propres yeux, & qui plus eſt, avec les yeux d'un Obſervateur judicieux; les préjugés ne l'embarraſſent point dans ſes raiſonnemens, & ne ſauroient l'écarter de la bonne voie. La Nature eſt ſon Maître; les diſſections lui fourniſſent des témoignages ſuffiſans pour l'inſtruire ſi les remedes qu'il a employés ont de la force, & comment ils la déployent; d'où il infere dans quelles circonſtances & dans quelles doſes ils doivent être mis en œuvre.

La douce voix de la Vérité eſt la ſeule à laquelle il prête l'oreille; les clameurs des Charlatans & des mauvais Obſervateurs ne font

point d'impreſſion ſur lui; l'amour de la Patrie & l'humanité dont il eſt rempli le mettent à l'abri de toutes les impoſtures. Il ne ſe laiſſe pas décourager non plus, lorſque la cure vient à manquer: il ſçait qu'on n'eſt pas en droit de lui en imputer la faute. Il ſe préſerve ſeulement de plus en plus de toute fauſſe expérience. Il ſçait que, plus les expériences ſeront juſtes, plus ſes connoiſſances ſeront diſtinctes, inébranlables & appliquables au ſyſteme qu'il ſe propoſe de conſtruire.

C'eſt ainſi qu'agiſſoit le Pere de la Médecine; & à quel point de ſolidité & de certitude cette ſcience ne ſeroit-elle pas parvenue, ſi ſes fils avoient ſuivi religieuſement ſes traces! Auroit-on jamais oſé leur conteſter la dignité d'une Science qui n'auroit jamais rien avancé qu'elle n'eût inconteſtablement établi ſur les principes les plus évidens?

Quiconque eſt aſſez maître de ſon amour-propre pour fouiller hardiment dans ſon ſein, ſera obligé de reconnoître que la Science à laquelle il s'eſt dévoué, quelle qu'elle ſoit, contient tant de choſes arbitraires & reçues ſur la foi d'autrui, qu'il perdra l'envie de reprocher à la Médecine ſon incertitude & ſes principes précaires. Peut-être même qu'on trouve dans celle-ci moins de préjugés que dans les autres, qui n'ont pas pour baſe des Expériences bien pures. Qu'on jette les yeux ſur le vaſte champ qui s'offre au Médecin. Qu'on lui rende la juſtice de l'enviſager comme un honnête homme, & de ne pas le confondre avec la foule des Empiriques ignorans, & des Charlatans audacieux.

Dès-là que toute vérité ſuppoſe la connoiſſance, perſonne ne doit rougir d'avouer que cette connoiſſance, au moins diſtincte, manque encore par rapport à la maladie des beſtiaux, & que le plus habile Médecin n'eſt ici qu'un Empirique intelligent, parce qu'il ne s'eſt pas encore trouvé dans le cas de conduire ſes meilleures ſpéculations à la certitude au moyen de bonnes Expériences.

Après cela, ſi l'on érigeoit une Ecole Vétérinaire, le premier qui ſe chargeroit d'y enſeigner, auroit-il honte de commencer par être Diſciple? L'aveu ingénu de ſon ignorance ne pourroit au contraire que lui faire honneur. Moins il ſçait à préſent, & mieux il ſent le beſoin qu'il a d'apprendre; plus on a lieu d'eſpérer qu'il atteindra par ſes efforts au degré de capacité qu'il ambitionne.

Un Docteur, qui ſe crée, pour ainſi dire, lui-même, & qui crée la doctrine, encore inconnue, qu'il doit enſeigner, qui ne travaille pas ſimplement pour lui-même, ni pour ſes contemporains, mais pour la poſtérité & pour les Nations les plus éloignées auſſi bien que pour ſes compatriotes; combien ne rend-il pas ſon nom cher & reſpectable? Ces beaux motifs pénetrent juſqu'au fond de ſon cœur; ils embraſent ſon ame de la flamme la plus noble. Il brûle du déſir de mériter ces monumens immortels que le Monde reconnoiſſant a autrefois érigés à Hippocrate. Il aſpire au droit de pouvoir ſe treſſer de ſes propres mains la couronne immarceſcible dont un Monarque auſſi ſage que grand, véritable Pere de la Patrie, a déclaré, avec autant de magnanimité que d'amour pour ſes peuples, qu'il orneroit le front du fidele Sujet que ſon zele & ſon application conduiroient à des découvertes importantes ſur ce ſujet? En faut-il davantage pour animer tous ceux qui ſont en état d'aſpirer à de ſi glorieuſes récompenſes?

Ce Docteur encore à venir de l'Ecole Vétérinaire ne doit pas être confondu avec le Médecin du bêtail, tel qu'il eſt actuellement, tout pêtri d'ignorance & de ſuperſtition, encore moins avec les impoſteurs qui, ayant dépouillé tout honneur & toute humanité, ne cherchent qu'à duper le public par les remedes qu'ils lui annoncent, & débitent effrontément des drogues dont ils n'ont aucune connoiſſance, ni aucune expérience. Un vrai Docteur doit ſe promettre de la faveur d'un Roi accoûtumé à protéger & à récompenſer les Arts, les Sciences & les nouvelles découvertes, tous les honneurs & tous les avantages qui peuvent pourvoir abondamment à ſes beſoins, & le faire jouir d'un rang dont il aura lieu d'être ſatisfait.

Au reſte, on s'appercevra ſans peine que l'exécution d'un plan de cette nature ne ſauroit être l'ouvrage d'un ſeul homme; mais que, comme pour conſtruire un édifice ſuperbe qui ſerve de monument à la gloire du Génie humain, on a beſoin de plus d'une ſorte d'ouvriers, l'un puiſant dans ſon eſprit créateur l'ordonnance du Palais entier & de tous ſes ornemens, l'autre l'enrichiſſant de magnifiques peintures, & tous les Artiſtes concourant à l'envi à l'embellir par des chefs-d'œuvre de leur Art, de ſorte que la perfection de l'édifice réſulte de la réunion de tous ces efforts; de même, pour ériger une Ecole Vétérinaire, il faut divers Entrepreneurs ou travailleurs, dont chacun y conſacre tout ce qu'il a de capacité naturelle & acquiſe, & ſoit en même rempli d'un déſir inné de ſe rendre utile à l'Univers. L'un, par exemple, aura le génie & l'application d'un bon Obſervateur; l'autre prendra plaiſir à la diſſection du corps des animaux; il voudra que ſes propres ſens lui faſſent connoître juſqu'aux fibres élémentaires dont les parties ſolides ſont compoſées; un troiſieme décompoſera les globules du ſang qui circule dans les vaiſſeaux du corps. Le but de ces recherches eſt de bien connoître toutes les opérations de la Nature, tout le méchaniſme des fonctions qui concernent la vie, la conſervation & la propagation de l'animal.

Un quatrieme prendra pour objet les campagnes, les prairies, les montagnes, les vallées & les rivieres; il en examinera ſoigneuſement toutes les richeſſes. Par là il jouira d'un des plaiſirs les plus vifs & les plus purs; celui de contempler les beautés du Spectacle de la Nature. Mais le coup d'œil de celui qui étudie la Nature perce bien au delà de la ſurface extérieure des choſes. C'eſt ſurtout par les yeux de l'eſprit & de l'entendement qu'il voit. Jamais il ne ſépare l'utile de l'agréable. Il éprouve les forces de toutes les plantes, & en général de tout ce que produiſent les trois Regnes de la Nature, pour voir quelles ſont celles qui peuvent concourir à ſes vues, conſerver ou rétablir la ſanté du bêtail. Il appelle à ſon ſecours les creuſets & les alembics. Il briſe & diviſe, réunit & crée de nouveaux corps; il s'approprie

proprie une eſpece de pouvoir deſpotique ſur la Nature. L'air lui-même ne ſauroit ſe ſouſtraire à ſon empire.

Comme l'habileté & le travail de l'Architecte réunit tout ce qui peut donner à ſes édifices la plus grande perfection & la plus longue durée, de même notre nouveau Docteur, en raſſemblant tout ce que la pénétration de ſon eſprit & la force de ſon application peuvent lui procurer de ſecours, peut ſe promettre de conſtruire un Ouvrage plus propre encore à braver les injures du tems, que ceux dont les pierres s'uſent & ſe déſuniſſent à la longue.

Ce Docteur préſomtif de la Science vétérinaire doit être bien exercé d'avance dans l'art des diſſections; ſa main doit avoir la plus grande dextérité à manier le ſcalpel; il doit ſaiſir ſur le champ & diſtinguer les uns des autres, les muſcles, les veines, les arteres, les nerfs & juſqu'aux moindres fibres; il doit aſſigner les fonctions de toutes ces parties dans chacun des organes auxquels elles appartiennent.

Le ſecond Docteur ſera un Obſervateur; & ce n'eſt point dans le Cabinet qu'on peut faire des Obſervations. Il faut que, dans le tems où le mal contagieux regne, il ſe tienne à la campagne, pour faire ſon Cours de Pathologie & de Thérapie dans les étables; il y joindra les connoiſſances qu'on peut acquérir dans les prairies, dans les bois & dans les campagnes.

Il ne ſe borne pas à obſerver les maladies du bêtail; mais ſes regards perçans ſe promenent de tous côtés, examinent de quelle nature ſont les ſoins qu'on donne aux Troupeaux, l'heure à laquelle ils ſortent de l'étable, celle où ils y rentrent, à quelle diſtance du village ils vont paître & s'abreuver, de quelle nature ſont ces pâturages & ces eaux, ſi l'on ne pourroit point y découvrir la cauſe prochaine ou éloignée du mal contagieux, & en ce cas quels ſont les projets à faire pour améliorer ce qui ſe paſſe dans la conduite & le ſoin du bêtail. Il ſe rappellera comment *Lanciſi*, un des plus grands hommes dans ſon genre, s'y eſt pris pour mettre l'air de Rome à l'abri de la contagion,

&

& empêcher qu'elle ne ſe renouvellât, comme elle faiſoit preſque tous les jours, parmi les habitans de cette ville.

Ses vues ne s'étendront pas à une ſeule eſpece de bêtail; elles les comprendront toutes: les chevaux, les brebis, les pourceaux n'échaperont pas à ſon œil vigilant. Partout il trouvera des difficultés propres à exciter ſon attention. Ce n'eſt pas aſſez d'être un Savant doué de la plus vive pénétration pour fournir avec ſuccès la carriere dont il s'agit ici. Il faut néceſſairement être Oeconome, ou avoir l'intention & la capacité de le devenir. C'eſt par ſes propres ſoins aſſidus & infatigables qu'un homme né avec des diſpoſitions naturelles aux Sciences & aux Arts devient tout à la fois Savant & Artiſte.

Si l'on veut conſtruire un Syſteme durable, on a encore beſoin d'un troiſieme Docteur, qui ſoit en état de tirer des Expériences iſolées, après les avoir réunies, des propoſitions univerſelles qu'il fournit à l'Obſervateur, pour le mettre en état de ſuppléer à ce qu'il avoit omis, & lui indiquer ce qui demande qu'il s'y arrête plus longtems, afin de fournir un Tout complet. En lui déférant la fonction d'un Législateur, ou d'un Juge Arbitre, je dois préſuppoſer en lui tout le fond des connoiſſances que j'ai exigées ſéparément des deux Docteurs précédens. Avec ce fond, c'eſt à lui qu'il convient, dans les cas douteux, d'aller lui-même ſur les lieux, de viſiter les étables & les granges, d'examiner les campagnes & les prairies, & de ſe mettre bien au fait de tous les procédés de l'Oeconome par rapport au ſoin des troupeaux. Il conſidere la ſituation des étables, pour voir s'il ſeroit poſſible de leur procurer un air plus ſain, & ſi l'on a ſuffiſamment ſoin de les entretenir propres. Il réfléchit ſur les arrangemens généraux les plus avantageux à prendre, quand le mal contagieux ſe manifeſte; il détermine les précautions requiſes pour empêcher qu'il ne ſe répande, pour en préſerver le bêtail qui eſt encore ſain, & pour traiter celui qui eſt malade avec le plus grand ſuccès poſſible.

On a vu que, pour ériger une *Ecole Vétérinaire*, il falloit trois Docteurs, & que c'étoit le moindre nombre qui fût indiſpenſable-

ment

ment néceſſaire dans les commencemens. Mais, comme on a requis tant de qualités & de talens d'eux, avant qu'ils puiſſent véritablement mériter ce titre & exercer cette fonction, il ſemble que nous ſoyons encore bien éloignés du tems où ils exiſteront, & ſeront en état d'en former d'autres. J'ai pourtant lieu de croire le contraire; car tous les Docteurs actuels, s'ils ſont ſinceres, rendront en ſecret ce témoignage à la vérité, qu'il ne tient qu'à eux d'apprendre en enſeignant.

Les connoiſſances anatomiques ſont les premieres qu'on doit acquérir, & elles reſſemblent aux lettres de l'alphabet, qu'il faut abſolument connoître, avant que de former des ſyllabes & de lire des mots. C'eſt donc à quoi les trois Docteurs doivent s'appliquer tous au commencement, ſous la direction d'un habile Proſecteur.

Il convient d'avoir un Edifice deſtiné à cet uſage, où tout ſoit dans l'état requis. Le Théatre où l'on fait les démonſtrations au public, & particulierement aux Phyſiciens & à tous les Etrangers, doit avoir un eſpace ſuffiſant, un bon air, & être pourvu d'une cheminée. Son expoſition doit être au Nord, auſſi bien que celle des chambres où l'on conſerve les préparations anatomiques.

Le Proſecteur conſacre ſes premiers ſoins à faire la recherche la plus exacte des parties intérieures de l'animal, qui paroiſſent être le ſiege du mal, ou dans leſquelles on ne manque jamais de trouver quelque défaut, à l'ouverture des bêtes mortes; telles ſont, par exemple, le troiſieme & le quatrieme ventricules.

Ainſi l'on n'a preſque jamais beſoin de l'animal entier. On en peut acheter tous les jours des parties ſéparées toutes fraîches chez les Bouchers.

Comme il n'y a rien de plus eſſentiel dans toutes les opérations anatomiques qu'une extreme propreté, il faut un Concierge qui ait ſoin des appartemens deſtinés à l'École vétérinaire & ſous la garde duquel ſoient, outre les Inſtrumens anatomiques, tous les uſtenciles qui peuvent ſervir à la cure des bêtes malades qu'on y conduiroit, comme

chauderons, caſſerolles, cuves & cuveaux, fourches à foin, haches, ſcies, couteaux, trépans, &c. Ce poſte ne conviendroit à perſonne mieux qu'à un Boucher, qui ſeroit entendu dans ſon mêtier, d'où il n'auroit qu'un pas à faire pour devenir une eſpece de Proſecteur.

Et comme la nouvelle Ecole qu'on projette ici, ne ſerviroit pas ſeulement à l'anatomie & aux leçons, mais qu'on y traiteroit de toutes les maladies des animaux qui ne ſont pas contagieuſes, & qu'on entreprendroit en même tems d'en faire la cure; il faudroit à l'Edifice un nombre ſuffiſant d'étables & une cour ſpacieuſe. Mais les étables doivent être adaptées aux diverſes eſpeces de bêtail, chevaux, vaches, cochons, brebis, & même à la volaille, avec des greniers pour le foin & le fourrage. S'il étoit poſſible d'y joindre encore une prairie & un jardin, il en réſulteroit un double uſage, ſavoir de procurer au bêtail malade de l'herbe fraîche, & des plantes convenables au mal, & de donner au bêtail ſain un air pur & un bon pâturage.

On mettroit dans le jardin toutes les ſortes d'herbes & de plantes qui peuvent convenir à la cure. Il conviendroit de faire choix de celles ſur leſquelles on auroit fait des expériences chymiques, & par l'examen des parties conſtituantes deſquelles on peut être aſſuré d'avance qu'elles ont les vertus néceſſaires pour agir contre les cauſes du mal.

La prairie ſeroit enſemencée d'herbes ſemblables, dont on auroit lieu de préſumer qu'elles fourniſſent une nourriture ſaine, qu'elles augmentent le lait, qu'elles engraiſſent le bêtail, & en même tems qu'elles réſiſtent à la putréfaction & domptent le venin.

On a occaſion, pendant tout le cours de l'année, de recueillir des roſées de toute eſpece, & de les ſoumettre à des expériences tant chymiques que phyſiques: à quoi l'on peut auſſi employer utilement le Microſcope, pour découvrir s'il n'y a point d'inſectes venimeux dont les plantes ſoient ſouillées, ou de leurs œufs, & ſi ces inſectes ne peuvent cauſer le mal contagieux, ou quelque maladie particuliere. De pareil-

pareilles recherches, quand on les fait avec des ſoins infatigables, fourniſſent des vues & des notions diſtinctes: & comme l'action de toutes les maladies contagieuſes conſiſte en inflammations rapides & en putréfaction, tout venin contagieux en produiſant par la fermentation intérieure un autre qui lui eſt analogue, ou qui le ſurpaſſe; de bonnes expériences peuvent conduire à découvrir la nature du venin, & à faire obſerver s'il a pris ſa ſource dans le pays même, ou s'il y a été apporté d'ailleurs.

Il eſt expédient d'avoir une œconomie de bétail en petit dans l'enceinte de l'Edifice ſusdit, afin d'apprendre à bien connoître la nature de l'animal, qui peut devenir dans la ſuite l'objet des recherches du Docteur. Cette connoiſſance doit être ſolide & appuyée ſur les principes d'une ſaine Phyſique: car on ſuppoſe toujours qu'un Docteur a commencé par ſe procurer à lui-même une conviction ſuffiſante des choſes qu'il enſeigne.

Le ſoin d'une ſemblable petite œconomie demande encore un valet & une ſervante, qui s'entendent à gouverner le bêtail. Il ſera auſſi tout à fait néceſſaire que deux des Docteurs ayent leur logement dans l'Edifice ſuſdit; en partie parce qu'un bon Obſervateur, qui ſe propoſe de découvrir des choſes encore inconnues, ou de répandre du jour ſur des cauſes qui n'ont été énoncées juſqu'ici qu'obſcurément, doit tout ſoumettre à ſes propres ſens; en partie parce que les domeſtiques doivent être contenus dans l'ordre, & mis hors d'état de chercher leur profit particulier, au lieu de concourir au but principal d'une ſemblable Ecole.

S'il s'agit de conſtruire pour elle un Edifice tout neuf, ou qu'on veuille en adapter à ſes uſages un qui ſoit déjà conſtruit, c'eſt à l'homme le plus entendu & le plus expert dans tous les détails de l'œconomie rurale, qu'il faut confier le ſoin de ces arrangemens.

Il faudra encore un Laboratoire chymique pour pouvoir y examiner tous les objets ci-deſſus indiqués & y préparer des médicamens

propres à guérir les maladies des beſtiaux. C'eſt pourquoi il doit être pourvu d'alembics, de retortes, de creuſets, de chaudrons, & de toutes ſortes d'uſtenciles chymiques.

Quand tout cela ſera pleinement achevé, que l'Ecole ſera ouverte & qu'on y fera de nouvelles découvertes, les Docteurs ſe feront un devoir de les communiquer d'abord au College Supérieur de ſanté, & d'aſſiſter pour cet effet eux-mêmes aux aſſemblées que ce College tient toutes les ſemaines, où on leur accordera le droit de ſéance. Les Docteurs en retireront d'ailleurs l'avantage d'être auſſitôt ſuffiſamment inſtruits de tout ce qui ſe paſſe dans les Provinces par rapport à la maladie des beſtiaux, juſqu'à quel point les gens de la campagne goûtent & exécutent les directions qu'on leur a fournies, & quels effets on remarque à cet égard.

Cela eſt d'autant plus néceſſaire que ce College eſt le Tribunal propre, auquel toutes les Provinces des Etats font rapport de ce qui s'y paſſe quant à la ſanté des hommes & des animaux, & dont ils reçoivent les inſtructions convenables. Une Ecole Vétérinaire trouveroit dans ce College des gens bien zélés pour ſes ſuccès, & qui, étant déjà verſés depuis longtems dans les matieres de ce genre, pourroient donner de bons conſeils & une aſſiſtance efficace.

Le Pere de la Patrie, qui joint aux plus grandes lumieres la plus grande bonté, l'auguſte Roi ſous la protection duquel nous avons le bonheur de vivre, voudroit, en érigeant une ſemblable Ecole Vétérinaire, parvenir au but le plus louable; c'eſt de rendre tous les vaſtes Etats ſoumis à ſa domination participans des grands avantages qui en réſulteroient. Suivant cela, le devoir naturel du College de ſanté, c'eſt de veiller à ce que toutes les regles ſuſdites ſoient non ſeulement obſervées dans tous leurs points, mais ſurtout à ce que les Docteurs donnent leurs leçons ſans interruption & que l'un des deux qui demeureront dans l'Ecole donne une heure par ſemaine à ſes Auditeurs, uniquement pour les mettre au fait des choſes dont la connoiſſance leur eſt néceſſaire.

Qui-

Quiconque tant des naturels du pays que des étrangers voudra recevoir des inſtructions dans cette Ecole, y ſera admis *gratis*; mais les Phyſiciens attachés au ſervice du Roi auront le privilege d'aſſiſter à toutes les préparations; les Docteurs ſeront auſſi obligés de leur indiquer & découvrir, préférablement à tout autre, les moyens & les ſecours qui peuvent faciliter la connoiſſance & la cure de la maladie des beſtiaux.

La célebre Académie des Sciences de Berlin, qui, entre tous les endroits par où elle ſe diſtingue ſi avantageuſement, eſt en poſſeſſion de connoître de toutes les nouvelles découvertes, & de tous les nouveaux plans, & de les confirmer par ſon approbation, lorſqu'elle juge que l'utilité publique s'y trouve, a déclaré qu'elle étoit diſpoſée à prendre une part conſidérable à des deſſeins auſſi intéreſſans, & à les favoriſer du ſecours de toutes ſes lumieres.

C'eſt à ſon jugement que je ſoumets toutes les conſidérations renfermées dans ce Mémoire, recourant à ſon indulgence & à ſon équité, qui ne me blâmeront pas de lui préſenter un travail dont je ſens moi-même les imperfections, mais auquel je n'ai pu donner que des momens dérobés à l'exercice de mes nombreuſes fonctions, ſans compter que juſqu'à préſent aucun Savant ne m'a frayé la route, & qu'il n'y a gueres que des Oeconomes qui ſe ſoient occupés de ces objets.

Le Directoire Général, qui a non ſeulement le ſoin de tout ce qui peut contribuer au bien du pays, mais qui travaille ſans ceſſe à le procurer de la maniere la plus efficace, a bien voulu déclarer généreuſement, qu'il ſupplieroit Sa Majeſté d'accorder à ceux qui auroient la capacité d'enſeigner dans la nouvelle *Ecole Vétérinaire*, des penſions proportionnées à l'importance des ſervices que le Public eſt en droit d'attendre d'eux, même des titres honorables.

SUR LA VITESSE DU SON.

PAR Mr. LAMBERT.

Il arrive quelquefois qu'une théorie très bonne en elle-même differe des réſultats de l'expérience, uniquement parce que les expériences ſont mal faites ou que la théorie y eſt mal appliquée. La théorie de la viteſſe du ſon nous en préſente un exemple remarquable & qui mérite d'être mis dans tout ſon jour. Cette viteſſe, déterminée par des obſervations fort exactes, ſe trouve être de 1040 juſqu'à 1080 pieds de Paris, dans une ſeconde de tems. La théorie ne la donne pas immédiatement par elle-même, mais moyennant d'autres obſervations, parce qu'elle la dérive de l'élaſticité de l'air. Et en faiſant les calculs que la théorie preſcrit, il ſemble que cette viteſſe ne devroit être que tout au plus de 900 pieds par ſeconde. Depuis *Newton*, qui le premier eut le talent de développer cette théorie, on a été généralement d'accord qu'elle donne la viteſſe du ſon conſidérablement trop petite. Mais, bien loin de rejetter la théorie comme fauſſe ou contradictoire, on ſe contenta de la ranger tout au plus au nombre de celles qu'on faiſoit ſervir d'exemple quand on étoit d'humeur de faire voir que les plus belles ſpéculations des Géometres ne donnoient qu'un à peu près & différoient toujours plus ou moins de l'expérience. Ce reproche cependant n'arrêtoit point les Géometres, qui frappés de la beauté de la théorie du ſon s'appliquerent à la perfectionner & à la pourſuivre juſques dans tous les détails qu'elle offre. Ils imaginerent diverſes raiſons aſſez plauſibles, pourquoi & comment les réſultats de leurs calculs ſont différens de ceux que donne l'expérience. D'abord ils trouverent que dans la théorie on ſuppoſe l'air pur & débarraſſé de toutes les par-

particules étrangeres dont il eſt toujours plus ou moins chargé, & qu'ils regardoient comme des véhicules propres à accélérer le ſon. Enſuite dans le calcul ils ſuppoſoient le diametre des particules de l'air comme infiniment petit en comparaiſon de leur diſtance mutuelle. Enfin dans le calcul ils admettoient que, dans le mouvement ondulatoire de l'air, l'éloignement de chaque particule de ſon point de repos ne differe qu'infiniment peu de celui de la particule qui la précede ou la ſuit immédiatement. J'ajouterai encore que, dans le calcul, on admet en toute rigueur, que la force élaſtique eſt en raiſon réciproque de la diſtance des particules, quoique, du moins dans un air fort comprimé, on ait lieu de croire qu'elle augmente un peu plus fortement. Voilà donc des raiſons entaſſées l'une ſur l'autre pour faire croire qu'en effet la viteſſe du ſon doit être beaucoup plus grande que ne la donne la théorie.

Mais avec tout cela elle ne devroit être que tant ſoit peu plus grande. Car, en peſant bien chacune de ces raiſons, on trouve ſans peine qu'elles ne peuvent altérer que très inſenſiblement la viteſſe du ſon. Il eſt vrai que le diametre des particules de l'air nous eſt inconnu. Mais pour peu qu'on réfléchiſſe que dans les machines pneumatiques des fentes preſqu'inviſibles ſont aſſez grandes pour donner à l'air comprimé un libre paſſage, on ſe convaincra aiſément, que les particules d'air doivent être d'une petiteſſe qui les rende inviſibles. Si l'on conſidere enſuite que l'air eſt de 15 juſqu'à 16 mille fois moins denſe que l'or, & que l'or nonobſtant ſa grande denſité a encore aſſez de pores pour imbiber beaucoup de vif argent, on voit aiſément que l'eſpace qui entoure une particule d'air eſt aſſez grand pour pouvoir être rempli tout au moins de 16000 autres particules d'un même diametre. Cette extreme rareté de l'air naturel peut ſans contredit nous faire regarder comme admiſſible la propoſition qui porte, que dans la théorie & dans le calcul du ſon on peut faire abſtraction du diametre des particules de l'air. Il eſt encore fort douteux d'ailleurs, ſi c'eſt aux particules de l'air elles-mêmes qu'il faut attribuer l'élaſticité que les phénomenes

nous

nous font voir, ou ſi elle ne doit pas être attribuée à la chaleur, au feu, ou à quelque matiere beaucoup plus ſubtile, ou même à quelque ſubſtance immatérielle. Car tant que nous nous en tenons à des matieres, quelque ſubtiles qu'elles ſoient, la queſtion, d'où provient leur élaſticité, revient toujours. Quoi qu'il en ſoit je rapporte ces poſſibilités uniquement pour faire voir que tandis que le mécaniſme de l'élaſticité n'eſt point encore démonſtrativement déraillé, on peut le concevoir de plus d'une façon en ſorte qu'il ſoit indépendant du diametre des particules de l'air. En effet la grande rareté de l'air nous doit faire conſidérer ſes particules comme très éloignées les unes des autres, & ſoutenues dans cet éloignement par des forces qui ſont, pour ainſi dire, étrangeres à ces particules.

Mais je ne m'arrêterai point à pourſuivre ici ces conſidérations, d'autant que dans la ſuite de ce Mémoire je n'aurai pas beſoin d'en faire uſage, ni d'en tirer aucun argument. Je paſſe donc à remarquer que les vapeurs & d'autres particules hétérogenes dont l'air eſt chargé, ne contribuent que très peu à changer la viteſſe du ſon, quoiqu'elles puiſſent en diminuer la force & en étouffer la clarté. En effet ces particules n'étant point élaſtiques, & ne ſe ſoutenant dans l'air que par une certaine force de cohéſion, à peu près comme de petits globules de vif argent ſurnagent l'eau, ces particules, dis-je, doivent être conſidérées commes de petites maſſes lourdes, dont l'inertie s'oppoſe au mouvement ondulatoire de l'air, en arrête une partie, la réfléchit & la diſperſe, à peu près comme elles interceptent & diſperſent la lumiere. C'eſt là tout l'effet qu'on doit en attendre, & tandis qu'elles oppoſent à l'air leur inertie, il eſt clair qu'au lieu d'accélérer le ſon, elles ſeroient plutôt capables de le retarder. Ce qui eſt ſûr, c'eſt qu'elles dérangent le mouvement ondulatoire de l'air & étouffent le ſon en l'arrêtant & le diſperſant. Auſſi les expériences faites par Mrs. *Maraldi*, *de la Caille* & *Caſſini* en 1738, de même que celles de M. *Bianconi* faites en 1740, nous font-elles voir que le brouillard le plus épais ne produit ſur le ſon d'autre effet que celui que je viens de dire, & que la viteſſe du ſon n'en eſt preſque point altérée.

Si donc

Si donc de tout ceci il s'enſuit que la théorie du mouvement du ſon eſt bonne autant qu'elle eſt belle, & que les petites quantités dont on y fait abſtraction, peuvent être omiſes ſans aucune erreur perceptible; & ſi enfin d'un autre côté les expériences par leſquelles on a déterminé la viteſſe du ſon, ſont ſuffiſamment exactes pour en être aſſuré à dix ou vingt pieds près ſur 1040 pieds, on doit naturellement être d'autant plus ſurpris de voir que, moyennant la théorie, on ne trouve que tout au plus 900 pieds. Le moyen de ſe tirer de cet embarras, ſans faire quelque nouveau faux-pas? Quant à moi j'en infere ſans balancer, que, tandis que les expériences ſont bien faites, & que la théorie eſt très bonne, il faut néceſſairement qu'elle ait été mal appliquée, ou que dans l'application qu'on en a faite, quelques circonſtances n'ayent point répondu aux conditions que préſuppoſe la théorie. Et c'eſt ce que je me propoſe de faire voir avec toute l'évidence requiſe.

Pour cet effet je commence par expoſer la regle que preſcrit la théorie, pour trouver la viteſſe du ſon. Et afin de le faire avec moins de circonlocutions, je ſuppoſerai, par maniere d'exemple, qu'il s'agiſſe de déterminer cette viteſſe à la ſurface de la mer. Voici maintenant la regle. Au lieu de l'atmoſphere qui exiſte & dont la denſité décroit à meſure qu'elle s'éleve, on en ſuppoſe une autre, laquelle, ſans avoir ni plus de poids ni plus de maſſe, ait dans toute ſa hauteur une denſité égale à celle qui effectivement a lieu à la ſurface de la mer. On prend la moitié de cette hauteur, & on calcule la viteſſe qu'acquerroit un corps tombant librement par cette moitié de la hauteur. Cette viteſſe eſt la même que celle du ſon qu'il s'agiſſoit de chercher.

Or je dis que cette regle, très bonne en elle-même, a éludé l'attente des Géometres, en ce qu'elle a été mal appliquée. On voit bien que pour en faire l'application il faut commencer par déterminer la hauteur de l'atmoſphere ſuppoſée également denſe. Il y a deux moyens pour cela. L'un c'eſt de peſer l'air, afin de trouver ſa gravité ſpécifique & ſon rapport à la gravité ſpécifique du vif argent, & afin de multiplier enſuite la hauteur du mercure dans le

barometre par le nombre qui exprimoit ce rapport. C'eſt ainſi, par exemple, qu'ayant trouvé l'air 850 fois plus leger que l'eau, & l'eau 14 fois plus legere que le vif argent, on en conclut que l'air étoit 11900 fois plus leger que le vif argent. Ce nombre étant multiplié par la hauteur du barometre, que nous ſuppoſerons de 28 pouces meſure de Paris, donne 333200 pouces ou $27766\frac{2}{3}$ pieds pour la hauteur de l'atmoſphere ſuppoſée également denſe. La moitié de ce nombre, qui eſt $13883\frac{1}{3}$, eſt la hauteur par laquelle un corps doit tomber pour acquérir une viteſſe égale à celle du ſon. Cette viteſſe ſe trouve être de 915 pieds. Je remarque encore, qu'à la ſurface de la mer, l'air eſt preſque toujours moins leger que ne l'indique le nombre 850 dont on ſe ſert communément.

L'autre moyen dont on pouvoit ſe ſervir, c'étoit de déterminer de combien de pieds il falloit monter, en commençant à la ſurface de la mer, pour que le barometre deſcendît d'une ligne. Ce nombre de pieds étant enſuite multiplié par le nombre de lignes qui exprime la hauteur du barometre, donne la hauteur de l'atmoſphere ſuppoſée également denſe. Or, en comparant toutes les obſervations faites ſur les Pyrénées, j'ai trouvé qu'à la ſurface de la mer il ne répond que tout au plus 72 pieds à une ligne de deſcente du barometre. Suppoſant donc la hauteur du barometre de 28 pouces ou de 336 lignes, & multipliant 336 par 72, on trouve le produit de 24192 pieds, dont la moitié 12096 donne la hauteur par laquelle un corps doit tomber pour acquérir une viteſſe égale à celle du ſon. Cette viteſſe ſe trouve n'être que de 855 pieds. Elle eſt plus petite que celle que nous avons trouvée par la premiere méthode, & la raiſon de la différence eſt, que l'air n'eſt pas 850 fois plus leger que l'eau, mais beaucoup moins.

J'ai rapporté ces deux façons de calculer la viteſſe du ſon moyennant la théorie, uniquement pour faire voir de quelle maniere la théorie avoit été appliquée, & quelles étoient les données dont on ſe ſervoit dans cette application. Or je dis que ces données ne ſont pas celles que la théorie exige & préſuppoſe. Car d'abord il eſt clair que

toute

toute cette théorie eſt fondée ſur la condition, que *l'air ſoit pur & uniformement élaſtique.* Il faut qu'il ſoit pur, non parce que les particules hétérogenes accélerent la viteſſe du ſon, car nous avons déja vu qu'il n'en réſulte aucun effet perceptible; mais il faut qu'il ſoit pur, pour qu'on puiſſe déterminer ſa denſité & la trouver exactement telle que la théorie la préſuppoſe. Afin de mieux faire ſentir combien cela importe, nous n'avons qu'à nous rappeller que c'eſt en peſant l'air que nous déterminons ſa denſité. Il eſt clair qu'un pied cube d'air peſera davantage à meſure qu'il ſera plus rempli de vapeurs & d'autres parties hétérogenes. Comme toutes ces parties ſont pluſieurs centaines de fois plus peſantes que l'air, & qu'elles n'y ſont ſuſpendues que par les forces de cohéſion, il s'enſuit premierement que, quoiqu'elles augmentent fort le poids du pied cube d'air, elles n'occupent preſque point d'eſpace, d'autant qu'elles ſe trouvent dans les interſtices que peut-être l'air même laiſſeroit vuides. De là il s'enſuit, en ſecond lieu, que l'air peut être très chargé de ces parties étrangeres, ſans qu'il ſoit obligé de leur ceder la place. De là il ſuit encore, en troiſieme lieu, que la denſité d'un pied cube d'air pur, conſidérée comme telle, reſte la même, quoiqu'on rempliſſe cet air de parties hétérogenes & étrangeres. Le poids & la denſité de ce mêlange augmentera ſans contredit, mais ce que j'appelle la denſité de l'air pur & ſon élaſticité, reſtera la même; du moins s'en faut-il de beaucoup qu'elle change en raiſon de l'augmentation du poids.

Si donc on pouvoit d'une façon quelconque déterminer le poids de toutes les parties hétérogenes qui ſe trouvent dans un pied cube d'air, il faudroit ſouſtraire ce poids de celui de tout le pied cube, afin d'avoir le poids d'un pied cube d'air pur. Ce poids étant enſuite comparé avec celui d'un pied cube de mercure, donneroit le rapport ou le nombre avec lequel il faudroit multiplier la hauteur du barometre, pour avoir celle de l'atmoſphere ſuppoſée également denſe.

Voici encore une autre maniere d'enviſager la choſe. Prenons d'abord l'atmoſphere telle qu'elle eſt, chargée de matieres étrangeres

& même de nuées & d'un brouillard des plus épais. Que la hauteur du barometre ſoit de 28 pouces, à la ſurface de la mer, & la viteſſe du ſon de 1040 pieds, comme elle réſulte des obſervations de Mrs. *Maraldi*, *la Caille* & *Caſſini de Thuri*. Suppoſons maintenant, que toutes ces particules aqueuſes & étrangeres ſe changent tout d'un coup en air pur & élaſtique. Il ne ſera pas difficile de prévoir ce qu'il en arrivera. Je dis 1°. que la hauteur du barometre & la viteſſe du ſon à la ſurface de la mer reſteront les mêmes; car ce changement n'altere ni le poids de toute la maſſe, ni l'élaſticité à la ſurface de la mer, à moins que dans les particules étrangeres il n'y en ait eu, qui de leur nature pouvoient altérer ou diminuer l'élaſticité de l'air, auquel cas leur changement en air pur produiroit une augmentation dans la viteſſe du ſon, ce qui favoriſeroit encore mieux ce que je me ſuis propoſé d'établir dans ce Mémoire. En ſecond lieu, je dis que chacune de ces particules étant changée en air pur ſe dilate dans un eſpace pluſieurs centaines de fois plus grand que celui qu'elle occupoit avant ce changement: & comme par ce changement elle devient élaſtique, il s'enſuit, en troiſieme lieu, qu'au lieu qu'auparavant elle n'avoit fait que comprimer l'air inférieur par ſon poids, elle éleve maintenant l'air ſupérieur par ſon élaſticité. La conſéquence en eſt, que toute l'atmoſphere, de même que celle qu'on ſuppoſe être également denſe, ſera élevée; de ſorte que, pour que le barometre baiſſe d'une ligne, il faudra monter beaucoup davantage qu'il ne le falloit auparavant, lorſque l'atmoſphere étoit encore chargée de particules, qui ſans l'élever ne faiſoient que l'abaiſſer par leur poids.

Voila donc l'état de l'atmoſphere tel qu'il eſt préſuppoſé dans la théorie du ſon. Cet état n'exiſte point, parce que l'air eſt toujours plus ou moins chargé de particules étrangeres. C'eſt donc par le calcul qu'il faudra réduire l'état réel de l'atmoſphere à cet état ſuppoſé, afin de trouver les données néceſſaires pour calculer la viteſſe du ſon, laquelle, dans l'un & l'autre de ces deux états, eſt la même à la ſurface de la mer, ou en tel autre endroit qu'on mettra pour baſe dans cette réduction.

J'a-

J'ajouterai encore, que, ſi au lieu de ſuppoſer que les particules étrangeres ſoient changées en air pur & élaſtique, on ſuppoſe ſimplement qu'elles ſoient anéanties; l'air pur qui reſte s'élevera néanmoins. Car par cet anéantiſſement l'atmoſphere ſe trouve débarraſſée d'un poids qui, ſans rien contribuer à ſa dilatation, ne faiſoit que l'abaiſſer en la comprimant. Et quoique, dans le cas de cet anéantiſſement, la hauteur du barometre à la ſurface de la mer diminue, de même que la denſité de l'air, la hauteur de l'atmoſphere ſuppoſée également denſe ne laiſſera pas d'être augmentée.

Voici encore une autre maniere de ſe figurer ce que je viens de dire. Concevons à la ſurface de la mer une filée verticale de particules: il eſt clair que dans cette filée deux particules voiſines quelconques ſont comprimées & rapprochées l'une de l'autre par la ſomme du poids de toutes celles qui ſe trouvent au deſſus d'elles. Conſidérons donc les deux particules les plus baſſes ou qui ſont contiguës à la ſurface de la mer, & leur diſtance multipliée par le nombre de toutes les particules qui ſe trouvent dans la filée, donnera la hauteur de l'atmoſphere ſuppoſée également denſe, dont on fait uſage pour calculer la viteſſe du ſon. Cependant cette hauteur ne ſera pas la véritable, dès que dans cette filée verticale il ſe trouve outre les particules d'air encore des particules aqueuſes ou d'autres encore plus peſantes. Car ces particules ne ſont pas équivalentes à un nombre égal de particules d'air, mais à un nombre beaucoup & même pluſieurs centaines de fois plus grand. Ce n'eſt donc pas au nombre, mais au poids de toutes les particules qu'il faut avoir égard, & il eſt clair qu'on pourroit le faire moyennant la hauteur du barometre, ſi le poids & la diſtance des deux particules d'air contiguës à la ſurface de la mer étoit donnée. On pourroit encore le faire immédiatement par des expériences, ſi, depuis la ſurface de la mer juſqu'à la hauteur par exemple de 100 pieds, l'air étoit ſans aucun mêlange de matieres hétérogenes. Car en élevant un barometre par ces 100 pieds, ſon abaiſſement marqueroit les poids de toutes les particules d'air qui ſe trouvent dans une colonne de 100

pieds, & cet abaiſſement auroit à toute la hauteur du mercure le même rapport que celui qui eſt entre les 100 pieds & la hauteur d'une atmoſphere ſuppoſée également denſe.

Mais comme l'atmoſphere eſt toujours chargée de vapeurs & d'autres particules étrangeres, nous ne pouvons pas nous ſervir de ce moyen pour trouver cette hauteur. Au contraire il eſt très poſſible de la trouver moyennant la viteſſe du ſon, ce qui ſervira en même tems pour faire une ſupputation de la quantité moyenne des vapeurs & des particules étrangeres dont l'air eſt chargé à la ſurface de la mer. Cette viteſſe a été trouvée en Angleterre par Mrs. *Halley*, *Flamſteed* & *Derham* de 1080 pieds de Paris, & en France en 1739 de 1040 pieds de Paris. Je m'en tiendrai à ce dernier nombre, & en en diviſant le quarré 1081600 par 31,2, je trouve 35816 pieds pour la hauteur de l'atmoſphere, ſuppoſée également denſe & débarraſſée de toutes particules étrangeres. Le calcul rapporté ci-deſſus pour l'air tel qu'il eſt, ne donnoit cette hauteur que de 24192 pieds, ce qui n'étant que la $\frac{2}{3}\frac{1}{7}$ partie du nombre précédent, fait voir que les particules étrangeres dont l'air eſt chargé, abaiſſent l'atmoſphere très conſidérablement, & en ſorte qu'à la ſurface de la mer, la hauteur du barometre reſtant la même, une colonne de 25 pieds de hauteur peſe tout autant que, dans une atmoſphere d'air pur, péſeroit une colonne de 37 pieds de hauteur & d'une même baſe. D'où il ſuit réciproquement, que le poids d'un pied cube d'air naturel eſt au poids d'un pied cube d'air pur comme 37 à 25. Donc, en ſuppoſant même que les particules étrangeres n'occupent que les interſtices de l'air pur, il s'enſuit que tout ce ſurplus du poids dérive de ces particules étrangeres, & que par conſéquent elles ſont la $\frac{1}{3}\frac{2}{7}$ partie ou environ le tiers de tout le poids d'un pied cube d'air pris à la ſurface de la mer; ce qui, le pied cube peſant 684 grains, donne 222 grains pour le poids des particules aqueuſes, métalliques, ſalines, terreſtres &c. qui ſe trouvent dans un pied cube d'air, & l'air pur ne ſera que de 684 — 222 = 462 grains.

Com-

Comme toutes ces particules, encore qu'on ne les ſuppoſe ni ſalines ni métalliques, mais ſimplement aqueuſes, ne laiſſent pas d'être 700 ou 800 fois plus peſantes qu'un nombre égal de particules d'air, on voit bien que ces particules étrangeres qui nagent dans l'atmoſphere doivent être fort diſperſées. Car ſoit dans un certain eſpace le nombre des particules d'air pur $= a$, leur poids $= pa$, celui des particules étrangeres $= b$, & leur poids ſera $= 800.pb$. Donc la ſomme ou le poids total $= (a + 800b)p$. Or nous avons vu que le poids des particules étrangeres eſt $\frac{2}{3}\frac{5}{7}$ de ce poids total, donc il ſera

$$800bp = \frac{2}{3}\frac{5}{7}(a + 800b)p$$

ce qui donne

$$a = 784b;$$

de ſorte que contre 784 particules d'air on ne pourra compter que tout au plus une particule étrangere & aqueuſe. On n'en comptera pas même une ſur 1000 ou 2000, ſi parmi ces particules étrangeres il s'en trouve beaucoup de ſalines & de métalliques; & il eſt clair que ce rapport croîtra à meſure qu'on s'éleve vers les régions ſupérieures de l'air.

MÉMOIRE
SUR LA
PARTIE PHOTOMÉTRIQUE
DE L'ART DU PEINTRE.

PAR Mr. LAMBERT.

La plus grande perfection que puiſſe atteindre un tableau, c'eſt de préſenter ſon objet comme ſi on le voyoit devant ſoi, ou dans un miroir, ou dans une Chambre obſcure. Ce qu'on exige ordinairement pour cet effet c'eſt la perſpective & le coloris. Mais cela ne paroit pas ſuffire. Un tableau qui à cet égard ne laiſſeroit rien à déſirer, doit encore être vu d'une certaine façon, pour qu'il repréſente l'objet, non comme peint ſur une toile, mais comme un objet réel placé à une certaine diſtance.

Léonard de Vinci, qui, tant pour la théorie que pour la pratique, peut être regardé comme le pere des grands Peintres qui ont vêcu depuis près de trois ſiecles, & qui, vu le nombre infini d'obſervations détaillées & très intéreſſantes qu'il nous a données dans ſes Ouvrages, laiſſe encore en arriere tous ceux qui depuis ont écrit ſur la peinture plutôt en Métaphyſiciens qu'en Peintres, *Léonard*, dis-je, étoit trop attentif à tous les phénomenes & trop clairvoyant, pour que cette obſervation pût lui échapper. La *Chambre obſcure*, dont l'invention eſt attribuée à *J. B. Porta*, ſemble lui avoir été inconnue. C'eſt auſſi pourquoi il s'en tient ſimplement au *miroir*, qu'il regarde comme le dernier terme de la perfection d'un tableau. Et encore à cet égard il a bien raiſon, puiſque même la *Chambre obſcure* doit être traitée

traitée d'une certaine façon, pour qu'elle puiſſe être comparable à un *miroir*. Et encore alors elle n'eſt comparable qu'à un miroir mal poli & plein de pouſſiere, comme je le ferai voir après que j'aurai rapporté l'obſervation de *Léonard*. D'abord il remarque qu'un objet peint ſur un tableau ne paroitra jamais avoir l'éloignement de l'objet réel qu'on a dépeint, ſurtout quand on enviſage l'objet peint, les deux yeux ouverts. Enſuite il rapporte que les Peintres de ſon tems, diſons auſſi les Peintres de nos tems, ſe dépitent ſouvent en voyant que ce qu'ils copient d'après nature n'a ni la vivacité ni le relief des objets eux-mêmes vus dans un miroir, nonobſtant qu'ils peignent les parties ſombres plus ſombres & les parties claires plus claires que le miroir ne les repréſente, ce qui, d'après un mot moitié barbare qu'on a mis en vogue, veut dire, nonobſtant qu'ils augmentent & renforcent la diſproportion des couleurs dans le *clair-obſcur*. La raiſon que *Léonard* en donne, eſt très ſenſée, quoique ſon traducteur françois, partiſan peut-être trop zélé de l'ineffable *clair-obſcur*, taxe *Léonard* d'obſcurité & ſoupçonne qu'il pourroit bien s'être trompé. Le traducteur allemand juge également à propos d'y joindre un éclairciſſement, qui revient à ce qu'il faut contempler le tableau de ſon véritable point de vue. Mais ce point de vue n'étant qu'un ſeul point, cette application revient à ce que dit *Léonard*, que le tableau, pour faire tout l'effet qu'on peut en attendre, ne doit être vu que d'un ſeul œil, tout comme d'un ſeul point de vue. Il faut même que ce qui environne le tableau, ſoit accommodé à ce but.

Comme, pour voir nettement des objets éloignés au delà de la portée de ma vue, je me ſers d'un verre concave, il m'eſt arrivé de faire bien ſouvent la même obſervation dont parle *Léonard*, & j'ai ſurtout remarqué que de cette maniere, en ne me ſervant que d'un œil, un tableau repréſente bien mieux les différens éloignemens des objets, & même qu'on y découvre mieux les défauts de perſpective & du coloris.

Mais, afin de mettre la vérité de cette Obſervation dans tout ſon jour, il faut encore lever le doute qui pourroit reſter & qui regarde le coloris du tableau. Car, pour ce qui regarde la perſpective, on ſait qu'elle peut donner à un tableau une perfection telle, que lors même qu'on ne fait que le crayonner, il repréſente les différens éloignemens & les reliefs. C'eſt donc le coloris qui doit achever de faire reſſembler un tableau à l'image que le miroir nous fait voir. Or le Peintre n'a pas à l'égard du coloris la même certitude qu'il a à l'égard de la perſpective. De là vient qu'on pourroit croire que c'eſt aux défauts du cololoris qu'il faudroit imputer le défaut dont les Peintres du tems de *Léonard* étoient ſi choqués. Auſſi faut-il dire qu'il n'y a gueres ou point de tableaux qui ne ſoient plus ou moins défectueux à cet égard; & il eſt bien ſûr auſſi que ces Peintres, en renforçant la diſproportion dans le *clair-obſcur*, non ſeulement ne redreſſerent point ce défaut, mais qu'ils l'augmenterent plutôt par là. Voici donc les obſervations que j'ai faites.

On ſait que la *Chambre obſcure* non ſeulement nous repréſente les objets en perſpective exactement comme on les verroit ſi on plaçoit l'œil au centre du verre objectif, mais qu'elle en repréſente encore le coloris dans un degré de clarté parfaitement proportionel, quoique plus petit, & par conſéquent tel que celui où les objets eux-mêmes ſeroient vus, s'ils étoient éclairés d'une lumiere moins claire, mais parfaitement proportionelle. De cette ſorte les défauts du coloris qu'on peut reprocher aux Peintres, diſparoiſſent abſolument lorſqu'il s'agit d'une *Chambre obſcure*. Et comme les défauts de perſpective n'y ont pas lieu non plus & qu'on n'y fait attention qu'à la partie de l'image qui paroit nette & diſtincte, il faudroit conclure que la *Chambre obſcure* peut abſolument & ſans reſtriction tenir lieu de *miroir*. Cependant d'autres conditions, très eſſentielles, ſont encore requiſes.

Car, ſi p. ex. dans une chambre, la fenêtre étant ouverte, on intercepte ſur un mur ou ſur un papier blanc l'image de la fenêtre & des objets extérieurs dans le foyer de la lentille qu'on leur oppoſe, on verra l'image & les couleurs des objets aſſez clairement, quand même

me la chambre ne ſeroit pas abſolument fermée à tout autre accès de lumiere. Mais on les verra comme peints ſur la ſurface du mur ou du papier blanc, au lieu que, tout de même qu'à l'égard du miroir, il faudroit voir cette image derriere la ſurface à une diſtance égale à celle des objets de la ſurface. Et quant à la ſurface elle-même, il n'en faudroit rien voir. Avec tout cela, & ſans paſſer pour être ignorant, on peut demander, ſi une telle reſſemblance entre la *chambre obſcure* & le *miroir* peut avoir lieu. On peut même, à peu près comme l'a fait *Léonard*, tirer de la Géométrie & de l'Optique des raiſons qui rendent cette reſſemblance abſolue, ſinon impoſſible, du moins très difficile & reſtreinte à des conditions fort limitées. Car, ſi un miroir plan repréſente les images des objets derriere ſa ſurface dans un éloignement égal à celui des objets eux-mêmes, ou pour me ſervir des termes optiques, dans le *point d'interſection du rayon viſuel & du cathete d'incidence*, c'eſt que c'eſt de ce point que ſemblent partir les rayons que le miroir réfléchit dans l'œil, & même dans les yeux d'autant de ſpectateurs que l'on voudra. Il n'en eſt pas de même dans la chambre obſcure, où le cathete d'incidence n'entre point en ligne de compte, & où le point d'où partent les rayons réfléchis ſe trouve, non derriere, mais ſur la ſurface elle-même qui intercepte l'image. Il eſt évident qu'il en eſt de même d'un tableau quelconque. Mais voyons un peu mieux d'où dérive cette différence, & juſqu'à quel point elle peut être levée.

En voyant dans un miroir l'image d'un objet, les deux yeux ouverts, les rayons qui tombent dans les yeux, ne ſont pas réfléchis ſur un même point de la ſurface du miroir, mais ſur deux points dont la diſtance peut être égale à celle qui eſt entre les yeux, quoiqu'elle ſoit moindre à meſure qu'on regarde plus de biais & que la diſtance de l'objet du miroir eſt plus petite. En fermant un œil, cette diſtance diſparoit & les rayons qui d'un point de l'objet tombent dans l'œil qu'on laiſſe ouvert, ne ſont que ceux qui ſont réfléchis d'un petit eſpace de la ſurface du miroir, dont la grandeur ne ſurpaſſe jamais l'ouverture de l'iris ou de la prunelle, & qui s'appetiſſe comme un point toutes

les fois que la lumière de l'image eſt fort vive ou qu'on regarde par un petit trou percé avec la pointe d'une épingle dans une lame mince de métal. Dans ces deux cas l'image continuera néanmoins de paroître derriere le miroir; mais, comme de chaque point de l'image l'œil ne reçoit qu'un ſeul rayon, qui par conſéquent n'eſt réflêchi que d'un ſeul point de la ſurface du miroir, on voit que dans ce cas l'image peut être conſidérée comme placée ſur la ſurface du miroir, & que par conſéquent la différence dont j'ai parlé ci-deſſus, ceſſe d'être perceptible. Voici maintenant comment en conſéquence de ce raiſonnement j'ai pu parvenir à faire qu'une *Chambre obſcure* faſſe un effet analogue à celui d'un *miroir*.

Planche I. Fig. 4. Je choiſis un verre convexe, dont le foyer étoit de $6\frac{1}{2}$ pouces & qui admettoit une ouverture d'un pouce. Je fis enſuite une boëte cylindrique, que je compoſai de quatre parties. Les deux plus grandes qui formoient le corps du cylindre étoient AKLB, & DNMH, enchaſſées l'une dans l'autre en ſorte que le cylindre pouvoit être allongé ou raccourci conformément à ce que demandoit la diſtance des objets. Je donnai au diametre AB $3\frac{1}{2}$ pouces, & je couvris en dedans le fond AB d'un papier blanc & uni. Dans l'autre fond DH je laiſſai une ouverture circulaire, dont le diametre étoit ST, & en y appliquant la lentille SCT, j'y mis enfin le couvercle OP, dans lequel ſe trouvoit enchaſſé le petit cylindre QEFR, ouvert aux deux bouts, & du diametre d'un pouce. Enfin, en GH, je laiſſai une ouverture d'environ un demi-pouce.

Or, en dirigeant le petit cylindre vers l'objet, & en appliquant l'œil à l'ouverture GH, j'allongeois ou raccourciſſois le grand cylindre juſqu'à ce que l'image de l'objet ſe peignît diſtinctement ſur le fond blanc AB, ou pour mieux dire, juſqu'à ce que je vîſſe cette image diſtinctement. L'événement répondit à l'attente. Je ne voyois plus du fond blanc que quelques inégalités qu'avoit le papier. Et l'image, bien loin de paroître comme plaquée ſur le fond AB, paroiſſoit derriere ce fond à ſa diſtance naturelle & dans ſa grandeur naturelle.

relle. Auſſi des perſonnes que je priois de regarder, ſans leur dire de quoi il s'agiſſoit, & dont quelques unes ne ſavoient pas ce que c'eſt qu'une chambre obſcure, me demanderent ſi j'y avois placé un miroir, parce qu'elles n'imaginoient pas autre choſe & que c'étoit comme ſi elles euſſent regardé dans un miroir couvert legèrement de pouſſiere ou mal nettoyé. Ce phénomene, que juſques-là je n'avois pas même ſoupçonné, & dont je ne me ſouviens pas qu'aucun Opticien ait parlé dans ſes Ecrits, ne laiſſoit pas de me paroître digne de quelque attention; & ſurtout je voyois par là, qu'en effet le miroir peut ſervir de dernier terme de perfection pour la peinture, au lieu qu'en raiſonnant de la façon que j'ai rapportée auparavant, on pourroit être porté à croire que la perfection des tableaux devroit reſter néceſſairement en arriere. Car, ſi même la *Chambre obſcure* n'eût pu être portée juſqu'à tenir lieu de *miroir*, il n'y auroit rien eu à eſpérer pour la peinture.

Rendons encore raiſon de la conſtruction de celle que j'employai. Le foyer de la lentille SCT étant de $6\frac{1}{2}$ pouces, on voit que c'eſt la longueur qu'il faut donner au cylindre CI pour des objets infiniment éloignés, & il eſt clair qu'il faut allonger le cylindre à meſure que les objets ſont plus proches. Et comme je puis voir diſtinctement les petits objets à la diſtance de $6\frac{1}{2}$, 7, 8 &c. pouces, c'eſt là une des raiſons pourquoi je pris une lentille de $6\frac{1}{2}$ pouces de foyer. A cette raiſon il s'en joint une autre, c'eſt que pour voir l'image dans ſa grandeur naturelle il falloit appliquer l'œil en GH à côté de la lentille. Enſuite je fis AB de $3\frac{1}{2}$ pouces, afin de n'intercepter ſur ce fond blanc que la partie de l'image qui pour être plus près de l'axe de la lentille paroit plus diſtincte. Car on voit bien qu'il falloit écarter tout ce qui pouvoit détromper l'œil. Par la même raiſon, j'appliquai le petit cylindre QF, afin d'écarter autant qu'il étoit poſſible toute lumiere étrangere. Et c'eſt de cette maniere que je parvins à mon but. Je réuſſis également en plaçant en AB un miroir. Mais ici il n'eſt queſtion que d'un fond blanc, ſur lequel l'image devoit ſe peindre. Voyons maintenant les conſéquences que ce phénomene nous offre.

La premiere qui s'enſuit immédiatement, eſt que ſi un tableau, quelque exact qu'il puiſſe être d'ailleurs, n'eſt pas comparable à un miroir, c'eſt que *Léonard* a bien raiſon de dire qu'il ne faut pas le contempler d'une façon quelconque. Car il eſt évident par ce que je viens de dire, qu'un ſemblable tableau placé en AB, & vu par le trou G, la lumiere y tombant par l'ouverture EG, d'où on a ôté la lentille, qu'un ſemblable tableau, dis-je, fera le même effet que ſi on voyoit dans un miroir les objets que le tableau repréſente. Il faut écarter toute lumiere étrangere, & même tout ce qui pourroit faire appercevoir la toile & la diſtance des points colorés qui s'y trouvent, & dont l'aſſemblage & la continuité forme l'image. J'ai fait des obſervations en conſéquence, & tout alloit beaucoup mieux que lorſque je contemplois les objets peints, d'une façon quelconque. Ainſi p. ex. en regardant par un petit trou d'une lame mince un payſage deſſiné en perſpective, en ſorte que par ce petit trou je ne voyois que le payſage, l'éloignement des objets qui s'y trouvoient deſſinés, ſe faiſoit voir d'une maniere beaucoup plus évidente & déciſive. Il en étoit de même lorſqu'ayant placé au fond d'un petit cylindre en AB un petit deſſin peint en perſpective, éclairé ſoit de côté ſoit derriere par la ſimple tranſparence du papier, je le regardois par une lentille placée en E, qui aggrandiſſoit ce deſſin; la perſpective faiſoit tout l'effet que je pouvois en attendre.

Or il eſt bien vrai qu'à proprement parler les tableaux ne ſont pas faits pour être contemplés de cette maniere. On ne remplit pas les galeries de cylindres, mais tout au contraire on y ſuſpend les tableaux en forme de tapiſſerie, de ſorte même qu'il y en a fort peu qu'il ne faille deſcendre quand on veut les voir de leur véritable point de vue. Mais ici il n'eſt pas queſtion de ce qui ſe fait. Il s'agiſſoit plutôt d'examiner, ſi c'eſt aux tableaux qu'il faut s'en prendre, quand ils ne ſont pas à tous égards l'effet d'un miroir, & s'ils peuvent atteindre ce degré de perfection, ou ſi un défaut eſſentiel les en exclut abſolument & ſous quelque condition que ce puiſſe être? A cet égard il ſuffit d'avoir

d'avoir montré qu'ils n'en ſont pas abſolument exclus, & qu'ils peuvent l'atteindre pourvu qu'on les conſidere enſuite d'une certaine façon. J'ajouterai encore qu'en effet il y a des cas où le ſpectateur eſt aſtreint à un ſeul point de vue, & où ce qui entoure naturellement un tableau peut tenir lieu de cylindre. Ces cas ſont p. ex. ceux des peintures placées au haut des voûtes d'une égliſe ou d'une chapelle, ou de celles qu'on fait au bout d'une longue allée pour en prolonger la perſpective &c. C'eſt dans ces ſortes de cas que l'art du Peintre peut ſe faire voir dans toute ſa force, ſans qu'on ait beſoin d'aucun préparatif. Dans d'autres cas un amateur de tableaux pourra ſans peine aider ſa vue, & ſe mettre en état de juger plus aiſément & plus ſurement, ſi l'effet du tableau approche de celui d'un miroir.

Mais voyons maintenant ce qui y eſt requis à l'égard du tableau même. J'ai dit ci-deſſus que c'eſt ſimplement la perſpective & le coloris. On voit bien qu'à cet égard je préſuppoſe que le tableau repréſente un objet quelconque, ſans avoir égard ni au choix qu'on peut ou doit faire, conformément à tel ou tel autre but qu'on ſe propoſe.

Denique ſit quodvis &c.

Je n'examine pas ici quel doit être l'objet. Il me ſuffit que le tableau le repréſente comme un miroir. Et pour cet effet je puis me borner à la perſpective & au coloris. C'eſt à ces deux égards que le tableau ne doit le céder en rien à la Chambre obſcure. Et ſi l'art peut être pouſſé juſques là, il fera ce que fait un miroir. Or c'eſt encore ici que *Léonard* a fait voir juſqu'où il pouſſoit ſa ſagacité. Je ne ſais ce qu'eſt devenu ſon *Traité de perſpective*, le premier qui ait été écrit ſur cette matiere; & dans lequel il doit ſe trouver un grand nombre d'obſervations très curieuſes & très intéreſſantes. Cependant, à conclure de ce qu'il en cite dans ſon *Traité ſur la peinture*, je vois qu'il a imaginé certaines expériences, ſinon pour établir, du moins pour confirmer les regles de la perſpective linéaire. Car il y en a auſſi qu'il démontre géométriquement. Mais ce ſont des regles particulieres. De ſorte qu'il ſemble que c'eſt ſurtout à *Albert Durer* que nous devons

les

les premiers Elémens de la perſpective démonſtrative, qui depuis a encore été conſidérablement enrichie & facilitée. *Léonard*, non content d'avoir trouvé du moins les véritables veſtiges de cette Science, ſe tourna de même du côté du coloris, & il fit à cet égard une infinité d'obſervations très eſſentielles, & qui demandoient un eſprit d'obſervation plus que médiocre. Il en donna même bien ſouvent des raiſons optiques telles, qu'il ſembloit devancer les connoiſſances qu'on a acquiſes depuis *Képler*. C'eſt ainſi p. ex. qu'il rapporte & qu'il explique parfaitement bien le phénomene de la couleur bleue des murs blancs, qui ſont à l'ombre ou à l'oppoſite du Soleil levant & couchant. Et non content d'obſerver les couleurs & d'en rendre raiſon ſuivant toutes leurs modifications, on voit qu'il a conçu l'idée de pouſſer ſes recherches juſqu'à aſſujettir le coloris à des meſures. Il en donne même des échantillons pour quelques cas plus ſimples. Et ſon traducteur allemand ſemble l'avoir fort mal compris, lorſque dans une Note il dit que ce n'eſt pas ſérieuſement que *Léonard* parle de 3 cuillers de noir à mêler avec 1 cuiller de blanc pour produire un gris noirâtre tel que l'objet l'exigeoit. *Léonard* tout au contraire en parle comme d'une procédure conforme à une *connoiſſance certaine & véritablement ſcientifique.* Son traducteur ſuppoſoit qu'il ſuffiſoit de s'en remettre au jugement des yeux. Mais *Léonard* eſtimoit trop la préciſion, pour s'en remettre à un jugement auſſi ſujet à caution que l'eſt celui des yeux, ſurtout lorſqu'il ne s'agiſſoit pas de produire ſur le tableau une couleur égale à celle d'un objet propoſé.

Quoique *Léonard* ait donc également indiqué les premieres traces de la *Science* du coloris, il n'a point trouvé de Succeſſeur qui les ait ſuivies, pour parvenir à une Science démonſtrative & géométrique. Ce n'eſt pas qu'enſuite on n'ait parlé & écrit ſur la peinture. Mais on a abandonné en grande partie la route de *Léonard* & d'*Albert Durer*, & on s'eſt tourné à enviſager les tableaux d'un certain côté métaphyſique, qui ouvroit le champ à un verbiage qui ne demandoit ni beaucoup d'étude ni beaucoup de préciſion, & qui ſans per-

perfectionner la partie pratique de la peinture, étoit néanmoins très propre pour en parler avec beaucoup d'apparence & ſans fin. *De Piles* eſt un des premiers qui introduiſirent ce nouveau langage, qu'il deſtina à être celui des connoiſſeurs, & on crut y trouver ce qu'enſuite on nomma *l'eſprit de la peinture.* Mais cet eſprit ſans corps eſt un phantôme, qui ſervit plutôt à détourner l'art de la peinture de ſon dernier point de perfection qu'à l'y conduire. Au lieu de la perſpective ſcientifique on parla du *clair-obſcur*, du *deſſin*, de la *compoſition*, des *ſites* &c. avec un grand appareil de paroles, qui ne diſoient plus ou moins que la même choſe, & on s'appliquoit à n'être pas moins abondant lorſqu'il s'agiſſoit du *coloris.* C'eſt ainſi que ce qui devoit être *ſcience* ſe convertit en *terminologie*, & qu'on parla d'autant plus qu'on entendoit moins.

Retournons donc ſur les veſtiges de *Léonard*, parce que c'eſt de là qu'il faut recommencer. Nous avons vu que le tableau ſera l'effet d'un *miroir*, quand la *perſpective* & le *coloris* ne le cedent point à la *Chambre obſcure.* Or la perſpective n'a point de difficulté, & je crois l'avoir rendue auſſi facile qu'elle peut l'être, juſques là que ſuivant les regles que j'ai publiées depuis 1759, il eſt plus facile de deſſiner en perſpective que de deſſiner un plan géométrique, & que ſuivant ces mêmes regles on peut réſoudre des problemes dont la ſolution géométrique eſt beaucoup plus difficile. Obſervons encore que ce n'eſt, ni *de Piles*, ni ceux qui l'ont ſuivi, à qui nous devons les progrès que la perſpective a faits, & très vraiſemblablement ce ne ſeront pas eux non plus à qui on ſera redevable de la connoiſſance véritablement ſcientifique du *coloris*, dont je vais encore donner les premiers élémens dans ce Mémoire, afin qu'on ſache une fois pour toutes ce qu'il y a à faire pour qu'un tableau puiſſe encore à cet égard aller de pair avec la *Chambre obſcure*, & juſqu'à quel point il eſt poſſible d'y réuſſir.

J'obſerve donc d'abord, qu'il ne ſuffit pas de ſavoir que chaque objet a des couleurs qui lui ſont particulieres, & que le Peintre doit s'appliquer à trouver des couleurs parfaitement ſemblables,

ſoit qu'il les trouve toutes faites dans la nature, ſoit que l'art du Chymiſte les lui procure, ſoit enfin qu'il les produiſe par quelque mêlange. C'eſt ſans doute par là qu'il faut commencer, & c'eſt auſſi en quoi l'art du Peintre peut encore être enrichi dans la ſuite par des recherches ultérieures, comme il l'a été conſidérablement depuis les tems de *Léonard*, quoiqu'on ait eu antérieurement à ces tems des couleurs qui n'ont encore pu être retrouvées. Telles ſont en grande partie celles qu'on voit dans les anciens manuſcrits, & que la durée & les viciſſitudes du tems n'ont pu ternir.

Mais j'ai dit que tout cela ne ſuffit pas, & il s'en faut de beaucoup que ce ſoit là ce qu'il y a de plus difficile. Qu'un Peintre ait une couleur qui ſoit abſolument la même que celle de l'objet, peut-il s'en ſervir ſans aucune reſtriction? Je dis que non. La couleur de l'objet, conſidérée en elle-même, eſt ſans contredit ce qu'elle eſt; mais, ſans changer de qualité, elle peut paroître plus ou moins claire à meſure que l'objet eſt expoſé à une lumiere plus ou moins grande. Et ſi la lumiere n'eſt pas parfaitement blanche ou qu'elle ſoit réfléchie par des objets de différente couleur, le Peintre ne ſauroit non plus ſe contenter de ce que ſa couleur eſt la même que celle de l'objet; il faut qu'il ſache encore lui donner le degré de clarté requis, & les altérations que l'objet fait voir; il faut encore qu'il ſache exprimer les nuances qui dépendent de la diverſité de la lumiere dont les différentes faces de l'objet ſont éclairées. Voici donc à quoi ſe réduit ce qu'il y a d'eſſentiel dans ce qui regarde le coloris.

Quelque diverſité qu'il puiſſe y avoir entre les lumieres qui éclairent les objets, le tableau doit être conſidéré comme expoſé à une ſeule lumiere, & nonobſtant cela il doit repréſenter ces objets comme ſi chacun d'eux étoit, dans le tableau même, expoſé à la lumiere à laquelle l'objet ſe trouve expoſé dans le moment auquel il eſt dépeint, ou auquel il eſt ſuppoſé être dépeint. Et voilà ce qui n'eſt pas peu difficile.

Ainſi p. ex. un mur d'un gris aſſez noirâtre, expoſé au Soleil, peut néanmoins paroître tout auſſi clair & auſſi blanc qu'un autre mur très

très blanc expoſé à l'ombre. Il y a une infinité d'autres cas ſemblables, qui different entr'eux par une infinité de degrés différens, & qui tous font voir que c'eſt peu de choſe que de ne donner aux objets qu'on peint que leur couleur naturelle, ou de la rendre peut-être plus claire ou plus ſombre d'une façon plus ou moins arbitraire. Mais voici un autre point qui augmente encore la difficulté.

La queſtion eſt de ſavoir ſi en effet le Peintre ſe trouve en état de donner à ſes couleurs tous les degrés de clarté & d'obſcurité qu'elles peuvent avoir dans la nature? Il s'en faut de beaucoup; car dans le tableau le Peintre n'a d'autre lumiere que la couleur blanche. Auſſi *Léonard* a déja fait la remarque, qu'on a beau peindre un mur blanc expoſé au Soleil, que jamais on ne lui donnera dans le tableau la même clarté, à moins qu'on n'expoſe le tableau au Soleil. Mais quand on l'y expoſe, les ombres du tableau deviennent trop claires. Et d'ailleurs les tableaux ſont faits pour être vus à la ſimple clarté du jour, laquelle en comparaiſon du Soleil n'eſt qu'une eſpece d'ombre, de ſorte que la clarté dans le tableau ſera inférieure à celle des objets.

Mais ce n'eſt pas encore là toute la difficulté. La *Chambre obſcure*, quelque grande que puiſſe être l'ouverture de l'objectif, ne repréſente non plus les objets qu'avec un degré de clarté qui eſt très inférieur à celui de la clarté des objets. Suivant ce que j'ai fait voir dans ma Photométrie, il faut un excellent objectif & un papier bien blanc pour que l'image qui s'y dépeint atteigne la centieme partie de la clarté des objets. Mais, comme toutes ces clartés diminuent dans une proportion égale, cela fait qu'elle ne laiſſe pas d'être comparable à un miroir. Car, outre que j'ai fait voir dans le même Ouvrage, qu'encore qu'un miroir ne réfléchiſſe que tout au plus la moitié de la lumiere incidente, la différente tranſparence de l'air & bien d'autres circonſtances font que nous ſommes fort accoutumés à voir les mêmes objets ſous différens degrés de clarté. Voïci donc maintenant en quoi la grande difficulté conſiſte.

Le Peintre ne pouvant exprimer dans ſon tableau tous les degrés de clarté, ſe voit obligé ou de ſe reſtreindre à des degrés moins différens, & alors il peut encore paſſablement bien réuſſir; ou bien il faut qu'il rapproche les degrés de clarté d'une façon proportionelle. Mais alors il ne copie plus les couleurs. Il faut qu'il eſtime de combien chacune doit être altérée. Or cette eſtime, comme je l'ait fait voir dans ma Photométrie, ne dépend plus du jugement des yeux, qui ne jugent que de l'égalité & non des rapports, & qui encore, quand il ne s'agit que de l'égalité, ne donnent un jugement précis qu'après qu'on aura pris le terme moyen de pluſieurs obſervations réitérées. Voilà donc pourquoi *Léonard*, dont l'attention & la pénétration ſont admirables, parloit de 3 cuilliers de noir à mêler avec un cuillier de blanc &c. & donnoit cette regle comme un échantillon de ce qu'il appelle *connoiſſance certaine & véritablement ſcientifique*, connoiſſance en effet qui eſt l'antipode de tous ces galimathias que depuis *de Piles* on a vu éclorre ſur le *coloris* & le *clair-obſcur*.

J'ai dit qu'il faut que le Peintre *rapproche* les degrés de clarté dont ſes couleurs ſont ſuſceptibles. J'aurois dit qu'il les *diminue proportionellement*, s'il en étoit comme de la *Chambre obſcure*, qui diminue tout proportionellement, & qui à l'égard des clartés n'a d'autre *zéro* que les *ténebres abſolues*. Mais ces ténebres ne ſont pas le *zéro* du Peintre. Car, quelque noire que puiſſe être la couleur dont il peut ſe ſervir pour déſigner un défaut abſolu de lumiere, ſon tableau eſt fait pour être vu à la clarté du jour, qui ne laiſſe pas de rendre ſa couleur noire poſitivement viſible, parce qu'il n'y a point de corps noir qui ne réfléchiſſe encore de la lumiere, comme il n'y en a point de blanc qui à la ſimple clarté du jour en réfléchiſſe autant que lorſqu'il eſt expoſé au Soleil. Ainſi ce qui chez le Peintre doit ſervir de baſe, c'eſt une *clarté moyenne*, & c'eſt de cette clarté qu'il doit également *rapprocher* ce qui eſt plus clair tout comme ce qui eſt moins clair, afin de retrécir dans les bornes que ſes couleurs lui permettent ce qui dans la nature ſe trouve reculé bien au delà. Voici maintenant les deux points auxquels cette difficulté ſe réduit.

D'a-

D'abord *il faut déterminer le rapport qui dans toutes les circonſtances ſe trouve entre la différente clarté des objets, expoſés à des lumieres quelconques.*

Enſuite il s'agit de déterminer le rapport entre les clartés des differens mélanges des couleurs dont le Peintre ſe ſert, par où il faut entendre la clarté abſolue, comme p. ex. il y a un blanc, un bleu, un jaune &c. abſolu. Cela eſt requis parce qu'un tableau eſt toujours ſuppoſé expoſé à une même lumiere, comme p. ex. la ſimple clarté du jour, quoiqu'il y ait néanmoins des cas où les différentes parties d'un tableau ne ſont point expoſées à une même lumiere. C'eſt ainſi que les décorations du théatre peuvent être éclairées par principes. On trouve pareillement des peintures & des tableaux, aux voûtes & aux parois des égliſes, des ſalles &c. Mais alors c'eſt au Peintre à ſe prévaloir des différentes poſitions des fenêtres, de ſorte que j'en fais ici abſtraction.

Les deux problemes que je viens de propoſer ſont purement *photométriques*, & on trouvera dans ma Photométrie des données, c'eſt à dire des principes, des expériences, des théoremes & des méthodes, qui non ſeulement font voir que ces deux problemes ſont réſolubles, mais que j'en ai fait l'application à un grand nombre de cas. Ainſi p. ex. ſi le Peintre ſe trouve dans le cas de peindre une maiſon blanche, dont l'un des côtés eſt expoſé au Soleil tandis que l'autre n'eſt éclairée que d'une partie du ciel, il s'agit ſans doute de déterminer le rapport de clarté entre ces deux faces de la maiſon. Ce probleme ſe réſout très facilement, parce que dans le même Ouvrage, j'ai fait voir qu'un objet blanc expoſé au Soleil en ſurpaſſe 6 fois en clarté un autre qui n'eſt expoſé qu'à la clarté de l'hémiſphere du ciel ſerein. Ce qui étant mis pour baſe, tout le reſte n'eſt qu'une application de quelques théoremes que j'ai donnés dans le même Ouvrage. On y trouvera de même les données pour la perſpective aérienne, & tout ce qu'il faut pour déterminer la clarté d'un objet quelconque éclairé par une ou pluſieurs lumieres, directes, briſées, réfléchies quelconques & d'une façon

quelconque, de ſorte que ſi la difficulté de faire aller un tableau de pair avec le *miroir* & la *Chambre obſcure* ſe réduit à cela, on trouvera le chemin entiérement applani, & on pourra faire à l'égard du *coloris* ce que la perſpective fait à l'égard du *deſſin*. L'unique différence qu'il y a, c'eſt que la partie photométrique de la peinture demande, pour pouvoir être enſuite immédiatement applicable, un nombre ſuffiſant d'expériences à faire à l'égard de chaque couleur dont les Peintres font uſage; au lieu que la perſpective s'arrête ſimplement à la regle & au compas. Mais ces expériences étant faites, elles le ſont une fois pour toutes, & dès lors cette partie photométrique de la peinture ira de pair avec la perſpective. Je ne ſais ſi jamais ces expériences auront lieu, mais je ſuis très aſſuré que ſi *Léonard* ne les a point faites, c'eſt uniquement parce que de ſon tems il n'a pu s'en aviſer. Il avoit beaucoup trop à cœur de faire reſſembler ſes tableaux à un miroir, pour qu'il eût pu s'abſtenir de ce qui acheve d'y contribuer eſſentiellement.

Quoique je renvoie ainſi entièrement le lecteur à ma Photométrie, je ne laiſſerai pas néanmoins d'ajouter à ce que je viens de dire, quelques remarques plus ou moins générales ſur le coloris des tableaux. La premiere regarde les degrés de clarté & de vivacité des couleurs & de leur mêlange. Une même couleur, ou pour mieux dire, une même eſpece de couleur peut être *claire*, elle peut être *forte*, elle peut être *vive*, & enfin elle peut être *ſombre*. Toutes ces différences ſont très connoiſſables en ce qu'elles frappent la vue. Mais il n'eſt pas ſi facile de dire ce qui les produit. Ainſi p. ex. en mêlant du *blanc* dans une couleur quelconque, on la rendra plus *claire*, mais il ne s'enſuit pas que pour rendre à ce mêlange la couleur primitive, il faille y mettre autant de *noir* qu'on y avoit mis de *blanc*. C'étoit la phyſique de l'Ecole, qui n'eſt plus de miſe. Car on n'en viendra à bout que de l'une de ces deux manieres ſuivantes. Ou il faut ſéparer le blanc, ce qui n'eſt pas toujours poſſible, ou bien il faut ajouter au mêlange une couleur de la même eſpece, mais plus forte que celle qu'on avoit d'abord mêlée avec du blanc; ce qui n'eſt faiſable que lorſ-

lorſqu'en effet on peut avoir cette couleur plus forte. Au défaut de ces deux moyens il n'en reſte d'autre que d'ajouter au mêlange une telle quantité de la même couleur qu'on y avoit miſe d'abord, que l'effet du blanc devienne imperceptible.

J'ai dit que le blanc rend une couleur quelconque plus claire. On comprend que je ne parle pas ici de ces mêlanges chymiques, qui produiſent un effet tout différent de celui que les couleurs des ingrédiens ſembloient promettre, parce que les acides qui s'y trouvent changent & déplacent les moindres particules & les forces qui modifient la réflexion des couleurs priſmatiques de la lumiere incidente. Je parle ici des mêlanges, qui n'altérent rien en tout cela. L'expérience fait voir qu'il y en a, & c'eſt au Peintre à les connoître. Je reviens donc à dire que le *blanc* rend les couleurs plus *claires*, & c'eſt préciſément parce qu'il les rapproche de la clarté du blanc, & par conſéquent de la lumiere qui naturellement parlant eſt blanche. Mais en même tems il faut ajouter auſſi qu'il les affoiblit. Car il eſt évident que p. ex. un rayon bleu mêlé avec dix rayons blancs, n'offre plus une couleur bleue auſſi *forte* que ſi ces dix rayons étoient également bleux. De là vient auſſi qu'un bleu très clair dans les étoffes s'appelle *bleu-mourant*, quoique du reſte il y ait une autre extrémité qui pourroit également mériter ce nom, ce ſeroit celle du bleu qui ſe perd dans le noir.

Une couleur claire quelconque offre à nos yeux plus de rayons blancs que de ceux de la couleur elle-même, & à cet égard il n'importe qu'elle ſoit naturellement telle, ou qu'on y ait mêlé du blanc. Et en tout cela je ſuppoſe que pour juger par la vue de ces degrés de clarté, on expoſe les couleurs à une même lumiere. Mais en les expoſant à des lumieres différentes, il s'y joint encore une autre différence de clarté, & c'eſt celle dont j'ai parlé ci-deſſus. Voyons quel en ſera l'effet par rapport au coloris des tableaux. Qu'une couleur ſombre ſoit expoſée au Soleil, ou du moins à un plus grand jour qu'une autre couleur de la même eſpece, mais plus claire; il ſe peut faire que l'une & l'autre paroiſſent également claires. Mais cette égalité ne vient pas de

ce que la couleur expoſée au Soleil ou à un plus grand jour, réfléchit plus de rayons blancs. Elle en réfléchit plus, mais en même tems elle réfléchit auſſi plus des rayons colorés dont elle porte le nom. Si donc le Peintre, pour lui donner plus de clarté dans ſon tableau, produit cette clarté parce qu'il y mêle du blanc, il eſt évident qu'il altere la proportion des rayons blancs & colorés, en ce qu'il ne renforce que les rayons blancs, ſans renforcer proportionellement les rayons colorés, comme cela ſe fait dans l'objet. Il s'enſuit que les objets expoſés à une lumiere à peu près égale, s'exprimeront toujours mieux dans les tableaux que ceux qui ſont expoſés à des lumieres très différentes. C'eſt auſſi le conſeil que donne *Léonard*, qui, ſans avoir connu la théorie des couleurs de *Newton*, n'a pas laiſſé d'être très bon Opticien empirique. Il s'enſuit encore qu'un tableau qui repréſente des objets expoſés à des lumieres très différentes, doit plus que tous les autres être vu d'une certaine façon. Et c'eſt ſurquoi j'ai eu occaſion de faire des obſervations qui m'ont frappé.

Par ce que je viens de dire on voit encore ce que j'entens par *couleur forte*. Une couleur eſt forte dans un degré abſolu, quand elle ne réfléchit abſolument que les rayons colorés dont elle porte le nom. Ce ſeroit là une couleur priſmatique. Mais il n'en exiſte dans aucun corps terreſtre. Cependant c'eſt toujours le degré qui peut ſervir de baſe pour les calculs. On pourra voir là deſſus les expériences que je rapporte dans ma Photométrie, & dont il réſulte p. ex. qu'en exprimant par l'unité les rayons rouges qui ſont réfléchis d'un papier épais & bien blanc, le bleu de montagne, couleur qu'on tire des mines, en réfléchit $\frac{1}{20}$, le verd de gris $\frac{1}{8}$, le jaune $\frac{1}{8}$, le minium $\frac{3}{5}$ & le cinnabre $\frac{4}{7}$, de ſorte que ces deux couleurs, quoique rouges, ne ſont pas encore ſi rouges que le papier blanc eſt blanc. Auſſi le minium a-t-il beaucoup de jaune, & le cinnabre tire-t-il ſur le bleu. Je n'ai trouvé qu'une cire d'Eſpagne bien belle & bien rouge, qui ait été auſſi rouge qu'un papier blanc eſt blanc. Mais auſſi n'ai-je pas répété l'expérience pour tous les objets rouges qui peuvent ſe préſenter, de ſorte que je ne doute pas qu'on n'en trouve encore bien d'autres.

Quant

Quant aux couleurs que j'ai appellées *ſombres*, j'entens par là celles où il entre du noir, c'eſt à dire celles qui, quoiqu'elles ne réflêchiroient que les rayons dont elles portent le nom, ne les réflêchiſſent que des points iſolés de leur ſurface, en les abſorbant dans tous les autres points. Or c'eſt ce qu'on obtient par le noir, tout comme on obtient les couleurs claires par le blanc. Il y a cependant une grande différence dans la proportion du mêlange. Le verd m'a toujours paru très bien admettre le noir, ſans ceſſer de paroître encore verd. Mais le jaune tire d'abord ſur le brun, le rouge approche d'une couleur fort laide, & dans le bleu le noir prédomine très facilement; juſques là qu'un noir qui tire ſur le brun ſe corrige en y mêlant du bleu. C'eſt donc à quoi il faut avoir égard, quand il s'agit de ramener à des meſures les différens degrés des couleurs qu'on veut rendre plus ſombres. J'ajoute qu'outre le noir, il y a encore d'autres mêlanges à faire pour les produire.

Enfin les *couleurs vives*, ou la vivacité d'une couleur, ſemblent être ce qu'il y a de plus difficile à expliquer. Une couleur peut être *claire*, elle peut être *forte*, ſans que pour cela elle ſoit vive. On approche de cette vivacité quand la clarté ſe joint à la force. Mais il ſemble qu'il y faut encore un certain *luſtre*, qui rende la couleur plus ou moins *reſplendiſſante*, en lui donnant de *l'éclat*. C'eſt ainſi que la couleur des métaux ſemble avoir une denſité, qui ne ſe rencontre gueres dans les couleurs des Peintres. De là la difficulté de peindre des vaſes de métaux polis. Il en eſt de même de la vivacité des couleurs de pluſieurs fleurs, des ailes de pluſieurs papillons &c. Quand on les voit peintes, on les trouve très belles; mais à côté de l'objet lui-même, toute la beauté de la peinture ſemble ternie, parce qu'elle n'atteint pas le luſtre, l'éclat & ſurtout auſſi le changeant du coloris de l'objet.

Une couleur quelconque ſe renforce quand il y tombe de la lumiere réflêchie d'un autre objet de la même couleur. C'eſt encore une remarque que *Léonard* a déjà faite, & qu'il explique très bien, ſans avoir connu l'Optique de *Newton*, & quoique l'Optique de ſon

tems ſe trouvât encore dans un état pitoyable. J'ai fait voir dans ma Phoſométrie, comment par ces ſortes de réflexions on peut trouver dans chaque couleur compoſée ou mêlée, celle qui y prédomine, de même que le degré de blancheur qu'il faut lui attribuer & qui ſert de baſe lorſqu'il s'agit de comparer ſa clarté à celle d'un autre mêlange.

Voyons encore comment les couleurs compoſées peuvent être réduites à un langage intelligible. C'eſt ſur cela que Mr. *Mayer*, le même qui s'eſt rendu ſi célebre par ſes Tables Lunaires, a eu une idée qui me paroit heureuſe. Son Mémoire, comme pluſieurs autres très intéreſſans, qui devoient paroître dans la continuation des Commentaires de la Société Royale de Gœttingue, n'a point encore paru, & probablement ne paroitra pas ſitôt. Je n'en ai vu qu'un extrait qui, joint à ce qu'il en a dit il y a 20 ans & plus dans ſon *Atlas Mathématique*, m'en a donné quelque idée. Mr. *Mayer* établit 3 couleurs principales, qui ſont le rouge, le jaune & le bleu. Il tâche de les avoir auſſi approchantes des mêmes couleurs priſmatiques qu'il eſt poſſible. Enſuite il met pour baſe, qu'une couleur qui en eſpece ne differe d'une autre que d'une douzieme partie, ſe confond aſſez ſenſiblement avec cette autre couleur. C'eſt ce qui l'engage à faire de ces trois couleurs tous les mêlanges dont la différence n'eſt pas au deſſous d'une douzieme partie. Il calcule donc en combien de manieres le nombre 12 peut être la ſomme de 1, de 2, de 3 nombres entiers, & de toutes ces manieres il mêle ſes trois couleurs. C'eſt ce qui lui donne le triangle

r^{12}				
$r^{11}b^1$	$r^{11}j^1$			
$r^{10}b^2$	$r^{10}b^1j^1$	$r^{10}j^2$		
r^9b^3	$r^9b^2j^1$	r^9bj^2	r^9j^3	
r^8b^4	$r^8b^3j^1$	$r^8b^2j^2$	r^8bj^3	r^8j^4

&c.

qu'il

qu'il continue juſqu'à r^{9}, b^{12}, j^{12}. Et pour étaler tous ces mêlanges aux yeux, il peint chaque caſe de ce triangle avec le mêlange qui y eſt marqué, p. ex. la caſe $r^{9}b^{2}i^{1}$ avec le mêlange qui réſulte de 9 parties de *rouge*, de 2 parties de *bleu* & d'une partie de *jaune;* car c'eſt ce que ces lettres & ces nombres indiquent. De cette façon il obtient 91 mêlanges différens, d'un même degré de force & de clarté. Ce nombre enſuite augmente conſidérablement en faiſant avec chacun de ces mêlanges une combinaiſon tout à fait ſemblable du *blanc* & du *noir*. Ainſi il paroit que ſur 91 triangles ſemblables un Peintre peut étaler toutes ſes richeſſes en fait de couleurs, & pour chaque objet il y trouvera la couleur répondante, & l'ordre qui regne dans ces triangles fait qu'il ſuffit de ſavoir la caſe pour connoître d'abord les ingrédiens. Le Pere *Caſtel* nous a donné des obſervations aſſez ſemblables, mais dans celles de Mr. *Mayer* il y a plus de ſyſtématique. L'unique choſe qu'il y faudroit encore diſcuter par des expériences immédiates, c'eſt de voir ſi la couleur des mêlanges ſuit le rapport des ingrédiens. Car, ſuivant ce que j'ai remarqué ci-deſſus, on peut avoir ſujet d'en douter. Une même portion de noir mêlé ſéparément avec une quantité égale de verd & de bleu, m'a paru faire un effet différent. Enſuite il s'agit encore de voir ſi c'eſt d'après le poids ou d'après le volume qu'il faut eſtimer les portions qui doivent entrer dans le mêlange. Car la gravité ſpécifique des couleurs eſt extrêmement différente.

Ces doutes étant une fois levés, il me paroit que ces triangles pourront tenir lieu de *chromatometre*, ou de *chromatoſcope*, & qu'on pourra s'en ſervir avec beaucoup de ſuccès dans tous les cas où les objets qu'on dépeint ne ſont point éclairés de lumieres extrêmement différentes. Car juſqu'à préſent ce n'eſt qu'en tâtonnant & par une longue routine que les Peintres parviennent à attrapper le mêlange répondant à la couleur qu'un objet leur préſente; & j'ai fait voir ci-deſſus, qu'ils ne réuſſiſſent avec certitude que dans les cas où ils ne ſont pas obligés à rapprocher les degrés de clarté, puiſque l'œil ne juge que

de l'égalité & non des rapports d'inégalité. Ajoutons encore que ces triangles une fois faits, l'effet de chaque couleur y paroit dans l'état de la couleur déjà ſéchée. Or on ſait qu'il y a des couleurs qui changent plus ou moins en ſéchant. Et il eſt clair que cela augmente la difficulté de trouver en tâtonnant le mêlange qui convient à la couleur de l'objet, pendant qu'on peint. Car ſi le mêlange change de couleur ou de clarté en ſéchant, ou il faudra perdre ſon tems pour attendre qu'il ſoit ſec, ou bien ce ne ſera plus l'œil qui jugera de l'égalité.

Voyons maintenant juſqu'à quel point le Peintre peut ſe voir obligé de rapprocher dans ſon tableau la clarté qu'il donne aux objets? Si, ſelon Mr. *Mayer*, il eſt vrai que l'œil confond des couleurs qui different entr'elles au deſſous d'une douzieme partie, la meſure que nous cherchons ſeroit trouvée. Mr. *Mayer* ſavoit deſſiner, & ſes obſervations aſtronomiques font voir qu'il avoit la vue fort ſenſible, de ſorte que comme je ne doute point qu'il n'ait fait là-deſſus des expériences, il eſt très croyable que la moindre différence perceptible entre les couleurs ne ſera gueres plus grande. Dans la Photométrie j'ai rapporté les différences que j'ai obſervées à l'égard des clartés qui dépendent du plus ou moins de lumiere incidente. Le réſultat en eſt, qu'une différence de clarté qui ne m'a plus été perceptible, pouvoit aller à une 24me ou 30me partie de la clarté elle-même, dans les cas où les deux clartés différoient *par ſaut:* mais dans les cas où elles différoient *par nuance*, elle alloit juſqu'à la 15me partie, & elle augmentoit à meſure que les clartés elles-mêmes diminuoient. Il eſt très probable qu'il en eſt de même lorſque les couleurs different en qualité, de ſorte que ſi p. ex. la différence entre le bleu & le noir peut être diviſée en 12 ou 15 degrés connoiſſables, celle qui eſt entre le blanc & le noir pourra bien être diviſée en 30 ou plus de degrés connoiſſables, à condition que les mêlanges qu'on fait à cet égard different *par ſaut*. Car s'ils different *par nuance*, ce nombre de degrés pourroit bien ſe réduire à la moitié. Du reſte on juge bien qu'en tout cela je parle des cas où on voit les deux couleurs l'une à côté de l'autre, & expoſées à une même lumie-

lumiere, en un mot, que ſi on veut faire ces ſortes d'expériences, il faut prendre toutes les précautions que j'indique dans ma *Photométrie*. Ainſi p. ex. dans une éclipſe de Soleil preſque totale, une petite portion du Soleil qui paroit encore, ne laiſſe pas de produire un certain jour qui fait croire que la diminution de clarté n'eſt point proportionelle à la partie du diſque ſolaire non couverte par la Lune. C'eſt que dans l'eſpace de plus d'une ou de 2 heures on s'accoutume à une diminution qui eſt ſi lente, comme peu à peu on voit clair dans une cave bien obſcure.

Mais, pour dire plutôt trop que trop peu, j'accorderai qu'on diſtingue deux couleurs qui ne different que d'une 30me partie, de ſorte que du blanc au noir il y ait trente degrés intermédiaires qui ſoient encore connoiſſables. *Ce blanc & ce noir, que je ſuppoſe être les plus forts que le Peintre puiſſe avoir, ſeront donc les limites entre leſquelles il faut qu'il reſſerre les degrés de clarté des objets qu'il dépeint.* S'il ne mêle que ce blanc & ce noir, il produira 30 degrés différens intermédiaires, dont celui du milieu ou le 15me ſera un gris qu'on pourra nommer abſolu. Mais, quand du blanc au noir il doit paſſer par quelque autre couleur, ſoit ſimple ſoit compoſée, cette couleur conſtituera ce degré intermédiaire, mais ce ne ſera pas toujours le 15me. Car j'ai déjà obſervé que le bleu eſt beaucoup plus affecté du noir qu'il ne l'eſt du blanc, de ſorte que ſi p. ex. le bleu que je ſuppoſe être fort, s'éloigne de 20 degrés du blanc, il ne s'éloignera du noir que de 10 degrés. Le verd s'approchera fort du 15me degré, le jaune peut-être du 10e, en ce qu'il eſt plus près du blanc que du noir. Le rouge tout au contraire ne différera gueres du bleu, en ce qu'entre le blanc & le rouge il y a plus de degrés intermédiaires qu'entre le rouge & le noir. Dans tout ceci entre pour beaucoup la clarté de la lumiere incidente. Car de nuit, au clair des étoiles, un habit bleu, un autre qui eſt noir, & un d'écarlate ne ſe diſtinguent plus. Tout cela paroit également noir, tandis qu'un habit jaune ou verd ſe diſtingue mieux. Il y a les mêmes remarques à faire ſur les

couleurs qui réſultent des mêlanges. Le bleu a beaucoup de force pour obſcurcir le rouge, juſques-là qu'on peut en faire un mêlange qui approche fort de la couleur du fer, tel qu'il ſort du feu ou d'entre les mains du forgeron. Une ſemblable couleur ne differe plus du noir que de peu de degrés.

Je ne rapporte tout ceci qu'en gros. Car les expériences à faire, pour déterminer exactement tous ces degrés, ſe trouvent indiquées dans ma Photométrie. On voit par là que, ſi quelques Peintres ont paſſablement bien réuſſi à reſſerrer les degrés de clarté qui ſe trouvent dans les objets dans les limites que les couleurs du tableau admettent, & s'ils les ont reſſerrés d'une façon ſenſiblement proportionelle, c'eſt plutôt par routine & par des tentatives réiterées qu'ils y ſont parvenus, que par ſcience. On voit auſſi d'où vient qu'il y a tant de tableaux où le coloris s'écarte d'une ſemblable proportionalité, non d'une douzieme ou 30me partie, mais du double, du triple & ſouvent bien davantage. Voyons maintenant ce que c'eſt que de rapprocher les clartés des objets.

Suivant ce que je viens de dire, les degrés de clarté que le Peintre peut exprimer dans le tableau, ne vont pas au delà de 30; & même c'eſt être aſſez libéral que d'en accorder autant qui ſoient connoiſſables. Mais les degrés de clarté dans les objets peuvent aller depuis les ténebres de la nuit juſqu'à l'éclat du Soleil. Or j'ai fait voir dans la Photométrie, qu'il faudroit 500000 étoiles fixes de la premiere grandeur pour produire un clair de pleine Lune, & que de même 500000 pleines Lunes produiroient à peine une clarté égale à celle d'un jour ſerein, & enfin qu'en ſuppoſant même cette clarté égale à celle d'un papier blanc ou du plâtre expoſé au Soleil, elle n'égale pas la 110000me partie de la clarté du Soleil même. Quel nombre immenſe de degrés, dont chacun ne ſurpaſſe l'autre que d'une trentieme partie! On juge aiſément que c'eſt peine perdue que de les reſſerrer tous dans le petit intervalle de trente degrés dont les couleurs du Peintre ſont ſuſceptibles. Auſſi les Peintres le ſavent-ils bien. De là des tableaux deſtinés ſéparément pour des ob-

objets éclairés des étoiles, de la Lune, d'une chandelle, d'un flambeau, d'une flamme, de quelque fenêtre, d'une rue étroite, de l'aurore, du plein jour, du Soleil. Il eſt évident que par une ſemblable repartition on diminue la difficulté, & outre cela l'unité du tableau la demande. La clarté du jour efface les étoiles, la Lune, les chandelles, enfin tout ce qui ſert à chaſſer les ténebres de la nuit. Mais avec tout cela les degrés de clarté que cette repartition admet encore dans un même tableau, vont bien au delà de 30. C'eſt ainſi qu'une chandelle, une flamme &c. eſt toujours 1000, 10000, 100000 fois plus claire que les objets qu'elle éclaire, quoique placés à des diſtances aſſez modiques. Le jour qui par une fenêtre entre dans une chambre y produit des clartés fort différentes, & il y a toujours des endroits qui ne ſont éclairés que par réflexion. Un payſage éclairé du Soleil offre des différences de clarté, qui ne ſont pas moins grandes. Ainſi on a toujours à reſſerrer ces différens degrés dans les limites de 1 à 30, & même dans des limites plus étroites, dès qu'il ne doit entrer dans le tableau ni du blanc ni du noir. Mais ce qui augmente la difficulté, c'eſt qu'il faut reſſerrer proportionellement.

Or ce ne ſont pas les yeux qu'on peut conſulter là deſſus, puiſqu'ils ne décident pas des rapports d'inégalité. C'eſt d'un côté le calcul & de l'autre des expériences particulierement accommodées à ce but, qui doivent conduire l'art du Peintre, & lui fournir les données dont il a beſoin pour ne point tâtonner en aveugle. Si parmi les objets qu'il veut repréſenter dans ſon tableau, il s'en trouve un blanc bien éclairé & un noir ou une ombre preſque tout à fait noire, ce ſeront là les degrés extremes entre leſquels tous les autres doivent être reſſerrés: & ce ſont en même tems les degrés extremes que ſes couleurs admettent. Mais ſi, au contraire, il n'y a que des objets colorés, & que les ombres ne ſoient pas fortes, il n'entrera dans ſon tableau ni blanc ni noir, & tout le coloris ſe trouvera reſſerré dans des limites plus étroites. Il ne ſauroit donner à ſes couleurs une lumiere qui les blanchiſſe, ni obſcurcir les ombres juſqu'à les noircir. Suppoſons donc p. ex. qu'il y ait différens objets d'une même eſpece de

cou-

couleur, comme d'un même rouge, d'un même verd, &c. mais expoſés à des lumieres différentes, s'il donne à ceux qui ont le plus de lumiere leurs couleurs naturelles, ce ſont ces couleurs qui ſerviront de baſe, & celles qu'il donne aux objets moins éclairés devront être rendues plus ſombres à raiſon du moins de lumiere. Ce rapport des lumieres incidentes ſe calcule d'après les principes photométriques, & il ſuffit même fort ſouvent de ne faire ce calcul qu'en gros, parce qu'une douzieme partie de plus ou de moins ne produit point d'erreur ſenſible. Mais le Peintre n'eſt pas néceſſairement aſtreint à donner la couleur naturelle aux objets qui ont le plus de lumiere. Il peut la donner à ceux qui en ont moins. Par là il pourra élargir les limites que ſes couleurs lui preſcriront, autant qu'il ſera admiſſible, de blanchir & de noircir ſes couleurs. Mais ce qui eſt généralement requis, c'eſt qu'après avoir mis pour baſe un degré de lumiere incidente pour une couleur quelconque qu'il veut repréſenter ſans l'altérer, cette même lumiere doit être miſe pour baſe à l'égard de toutes les autres couleurs. C'eſt ce que demande la proportionalité qui à tous égards doit régner dans le coloris du tableau, comme elle regne dans la Chambre obſcure. Enſuite, en prenant les objets qui ont le moins de lumiere incidente, il déterminera le degré le plus bas de couleur ſombre qu'il puiſſe donner à ces objets dans ſon tableau. S'ils ne paroiſſent noirs qu'à force d'être ſombres, il ne pourra non plus les peindre d'un noir abſolu, dans lequel l'œil ne diſtingueroit plus rien, tandis qu'il diſtingue encore les parties de ces objets. Et comme dans ces cas il ſe trouvera ſouvent reſtreint à des limites de 12, 10, ou même de moins de degrés, il eſt clair qu'il ſuffit de ne faire qu'en gros le calcul ou la ſupputation des degrés de la lumiere incidente.

Il y a d'autres cas où le Peintre ne devine & n'attrappe que très difficilement & après pluſieurs tentatives inutiles la couleur apparente d'un objet, ſurtout lorſqu'il s'y mêle des lumieres réfléchies des objets diverſement colorés. Dans ces cas les tables chromatoſcopiques dont j'ai parlé ci-deſſus & la Chambre obſcure lui pourront être d'un grand

grand ſecours. Car en plaçant ces tables ou les caſes qu'on ſuppoſe approcher de la couleur de l'objet, dans l'endroit de l'image que forme la Chambre obſcure, cette image tombant ſur ces caſes altérera toutes les couleurs qui ne ſont point celle de l'objet; mais celle de l'objet non ſeulement ne ſera point altérée, mais elle paroitra plus forte & plus belle. La comparaiſon qu'on pourroit faire à la ſimple vue & ſans Chambre obſcure ne réuſſit avec quelque degré de certitude que lorſque la table eſt expoſée à une même lumiere incidente, puiſque la différence de lumiere altere aſſez ſenſiblement l'apparence des couleurs.

Il arrive auſſi que des Peintres, en compoſant un tableau à fantaiſie ou dans un certain but, tâchent de copier chaque piece ſéparément d'après nature, ou d'après quelque tableau déjà fait: tout cela pour exprimer les détails individuels. Mais, outre que bien ſouvent on peche alors contre la perſpective linéaire, il arrive encore plus ſouvent que l'objet qu'on dépeint n'a pas le degré de lumiere qu'exige la place qu'on lui aſſigne dans le tableau. C'eſt donc encore à cet égard que le Peintre doit ſavoir calculer, ou faire du moins une ſupputation de la lumiere que chaque objet de ſon tableau exige. Il doit ſavoir quelles ombres & quelles clartés ſont produites par les lumieres qui ſe trouvent dans le tableau même, de même que par celles que les objets du tableau ſuppoſent être dans le voiſinage, & dont ils ne laiſſent pas d'être pareillement éclairés. Et ſi parmi ces lumieres qui n'entrent point elles-mêmes dans le tableau, il y en a qui dépendent du choix du Peintre, c'eſt encore à lui à les choiſir & à faire en ſorte qu'il ne bleſſe point l'unité, ce qui arriveroit ſi chaque objet paroiſſoit indiquer des lumieres différentes. Comme c'eſt ſurtout par devant que les objets du tableau doivent paroître éclairés, du moins s'ils ſont peints pour qu'on y puiſſe démêler quelque choſe, il s'enſuit que la principale lumiere ne paroit pas dans le tableau. Et quand même elle pourroit y trouver place, on fait mieux de l'omettre ou de la couvrir par quelque objet qu'on place devant. Car la clarté de la lumiere étant 1000, 10000, 100000 &c. fois plus claire que l'objet qui en eſt éclairé, on

voit que le Peintre reſte trop en arriere quand il veut reſſerrer cette proportion entre celle de 1 à 30, & même à moins de 30. On comprend par là d'où vient que dans des tableaux où on voit le Soleil, la Lune, une flamme &c. ces lumieres font ſi peu d'effet, que le Soleil & la Lune y paroiſſent comme une tache blanche, & qu'on a de la peine à ſe figurer que quelques traits rougeâtres de pinceaux doivent repréſenter une flamme. Il vaudroit tout autant y ſubſtituer quelque hiéroglyphe; on s'y méprendroit beaucoup moins. Je dirai donc que ſi le Peintre doit reſſerrer les clartés dans les limites de 30, ce ne ſeront que les clartés des objets éclairés, comparées entr'elles & non avec les lumieres qui les éclairent.

La diſproportion entre les lumieres & les objets eſt d'autant plus grande, que la grandeur apparente de la lumiere eſt plus petite. De là vient que le jour, ou la clarté du ciel, vu par une fenêtre, de même que la flamme d'un grand feu de cuiſine, eſt beaucoup plus comparable aux objets qui en ſont éclairés, que ne l'eſt la clarté du Soleil, de la Lune & d'une chandelle. De là vient auſſi que la flamme & la fenêtre s'expriment dans les tableaux plus tolérablement & ſe rapprochent mieux de la clarté des objets que ne le font le Soleil, la Lune & la chandelle. Avec tout cela la diſproportion ne laiſſe pas d'être encore fort perceptible, & *Léonard* a bien raiſon de dire que la lumiere la plus convenable au Peintre c'eſt celle du plein jour, du ciel couvert de nuages blanchâtres.

Diſons encore un mot des tableaux & des peintures qui ſe font d'une même couleur, comme p. ex. les eſtampes, ce qui ſe peint avec de l'encre de la Chine, ce qui eſt ſimplement crayonné &c. Comme ici le coloris proprement dit manque, on voit bien qu'il n'y eſt pas queſtion du miroir. J'ai contemplé des payſages tracés avec la plume en perſpective, de la façon que j'ai dit ci-deſſus. Quoiqu'il s'y trouvât des jardins en fleur, tout cela reſſembloit parfaitement à des campagnes dénuées de toute verdure & couvertes de neige, & des perſon-

ſonnes qui les ont vues de la même maniere, en portoient le même jugement. Avec tout cela la perſpective linéaire ne laiſſoit pas de faire tout ſon effet, & l'éloignement paroiſſoit aller, comme il devoit, à quelques lieues. On peut même dire que le coloris faiſoit ſon effet; car dans l'hyver un payſage ne préſente que du blanc & du noir. L'unique contraſte qu'il y avoit, c'eſt qu'on eût préféré de voir le jardin dans ſa verdure, pour jouir pour ainſi dire des agrémens de la belle ſaiſon.

Ainſi quoique dans les eſtampes le coloris n'entre point en ligne de compte, & qu'il faſſe plutôt un effet contraire, une eſtampe ne laiſſe pas que de demander des ombres. On n'y a que du blanc & du noir, & les couleurs ne s'y expriment que tout au plus entant qu'ils ont une clarté mitoyenne entre le blanc & le noir. Les ombres s'y expriment par des hachures ſimples, doubles, triples, quadruples &c. & ces hachures elles-mêmes peuvent être plus ou moins fortes, & plus ou moins ſerrées. Enſuite, la maniere dont elles ſont tirées n'eſt pas tout-à-fait indifférente; car c'eſt à la perſpective à déterminer les plis & les courbures qu'elles doivent prendre pour repréſenter le plus naturellement qu'il eſt poſſible les reliefs, les ſites, les faces, les convexités & les concavités des objets. Et c'eſt ce que la perſpective peut faire même indépendamment des ombres. C'eſt ainſi qu'en traçant en perſpective ou ſtéréographiquement la Terre vue de la Lune, en ſorte qu'on n'y marque que les méridiens, l'équateur & ſes paralleles de dix en dix degrés, cette projection, ſurtout lorſque le Soleil ſe trouve entre les deux colures, fait tout l'effet qu'on doit en attendre, en ce que la Terre y paroit, non comme un diſque ou comme une figure géométrique, mais comme une boule parfaitement ronde. J'ai obſervé auſſi qu'en deſſinant une montagne en ſorte que par de ſimples traits, mais exactement ſuivant les regles de la perſpective, on y trace les routes que l'eau ſe formeroit en découlant de toute part, cette montagne, quelque figure qu'on lui donne, préſentera ſa véritable figure. On y réuſſit encore aſſez bien en la deſſinant ſuivant ſes coupes horizontales. Et en combinant ces deux manieres, on y réuſſit le mieux. Il ne faut

pas diſconvenir que ce travail eſt long, & qu'on y perd facilement patience. Mais ici il n'eſt queſtion que de la poſſibilité.

Il en eſt de même ſi le Graveur doit, ſinon meſurer, du moins eſtimer la force & la diſtance qu'il donne à ſes hachures, tant pour deſſiner que pour ombrer ſes objets. La poſſibilité qu'il y a, c'eſt qu'on peut, & même plus facilement qu'à l'égard des couleurs, aſſujettir au calcul la force de l'ombre que chaque hachure produit, quand elle eſt vue à une diſtance requiſe, où ce qu'il y a de blanc & de noir ſe confond. Car, en diviſant la ſomme des petits eſpaces blancs par l'eſpace entier, on trouve le degré de lumiere qui répond à la hachure. La largeur des hachures les rend plus fortes, en ce qu'il s'y attache plus d'encre ou de couleur noire. Ce qui fait que, toutes choſes d'ailleurs égales, les hachures fortes doivent être plus diſtantes les unes des autres, & que par là auſſi elles doivent être vues à une plus grande diſtance.

Fig. 1.

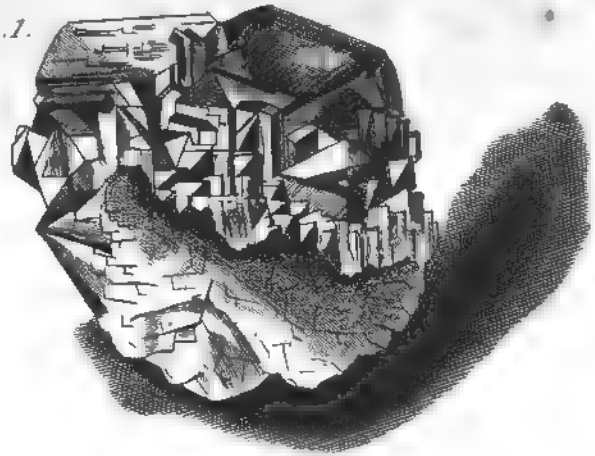


Fig 2.

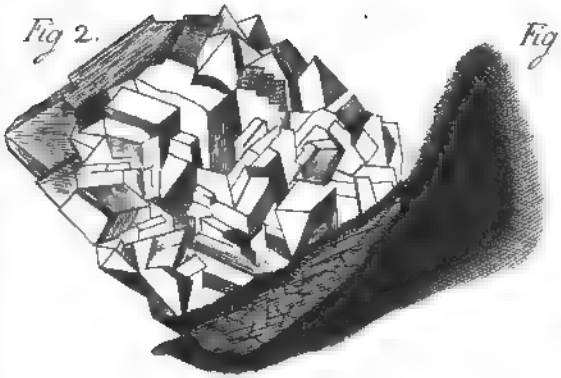


Fig 3

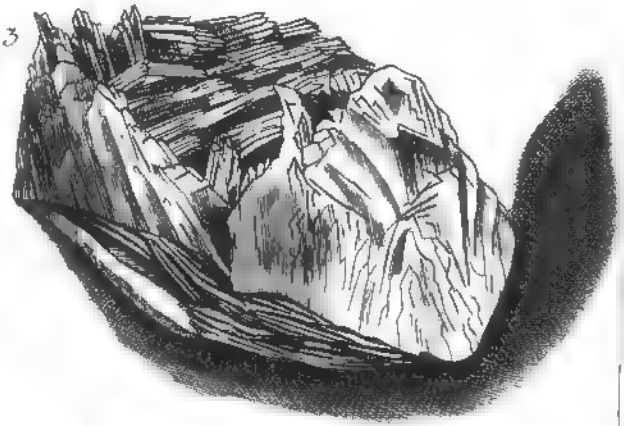
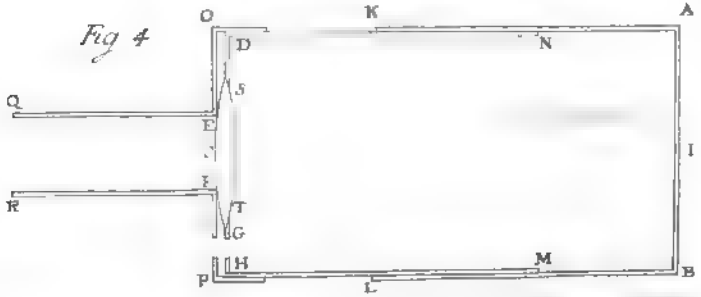


Fig 4



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

ADDITIONS

AU MÉMOIRE

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

IMPRIMÉ DANS LE VOLUME DE 1767.

PAR MR. DE LA GRANGE. (*)

J'ai donné dans ce Mémoire une méthode générale pour réſoudre les équations numériques de tous les degrés; matiere ſur laquelle on n'avoit encore que des tentatives & des eſſais. Ma méthode ne laiſſe, ce me ſemble, rien à déſirer: non ſeulement elle fournit un moyen ſûr de reconnoître combien de racines réelles poſitives ou négatives, égales ou inégales, il y a dans une équation quelconque; elle donne encore le moyen d'approcher d'auſſi près que l'on veut, & le plus qu'il eſt poſſible en nombres rationels, de la vraie valeur de chaque racine; & c'eſt à quoi ſe réduit, ſi je ne me trompe, tout ce que l'on peut ſouhaiter dans la réſolution des équations.

Ayant eu occaſion de penſer encore à cette matiere, j'ai fait de nouvelles réflexions qui peuvent ſervir à perfectionner & ſimplifier ma méthode dans pluſieurs cas; ce ſont ces réflexions que je vais expoſer ici: elles me paroiſſent aſſez importantes pour mériter quelque attention de la part des Géometres.

§. 1.

(*) Lû à l'Académie le 25 Août 1769. & le 8 Mars 1770.

§. 1.

Sur les racines imaginaires des équations.

Remarque I.

Sur la maniere de reconnoître quand toutes les racines d'une équation ſont réelles.

(1) Dans l'art. 8 de ce Mémoire j'ai donné des formules générales pour déduire d'une équation quelconque, une autre équation dont les racines ſoient les carrés des différences entre les racines de l'équation propoſée. Or, ſi toutes les racines d'une équation ſont réelles, il eſt évident que les carrés de leurs différences ſeront tous poſitifs; par conſéquent l'équation dont ces carrés ſeront les racines, & que nous appellerons dorénavant pour abréger, *équation des différences*, cette équation, dis-je, n'ayant que des racines réelles poſitives, aura néceſſairement les ſignes de ſes termes alternativement poſitifs & négatifs; de ſorte que, ſi cette condition n'a pas lieu, ce ſera une marque ſure que l'équation primitive a néceſſairement des racines imaginaires.

(2) De plus, comme on ſait (voyez les Mémoires de cette Académie pour l'année 1746, & ceux de la Société de Turin pour l'année 1760,) que les racines imaginaires vont toujours deux à deux, & qu'elles peuvent ſe mettre ſous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, α & β étant des quantités réelles, il s'enſuit que la différence de deux racines imaginaires correſpondantes ſera néceſſairement de la forme $2\beta\sqrt{-1}$, de ſorte que le carré de cette différence ſera $-4\beta^2$, c'eſt à dire, une quantité réelle & négative. Donc, ſi l'équation propoſée a des racines imaginaires, il faudra néceſſairement que l'équation *des différences* ait au moins autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans la propoſée.

C'eſt ce que j'avois déjà remarqué dans le §. 2. du Mémoire cité; mais voici une conſéquence qui m'avoit échappé alors & qui peut être d'une grande utilité dans la recherche des racines imaginaires.

(3) Nous

(3) Nous venons de voir que chaque couple de racines imaginaires de la propoſée doit donner au moins une racine réelle négative dans l'équation des différences. Or il eſt démontré, (voyez les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1741,) qu'une équation quelconque ne ſauroit avoir plus de racines poſitives qu'elle n'a de changemens de ſignes, ni plus de racines négatives qu'elle n'a de ſuccеſſions du même ſigne. Donc le nombre des racines imaginaires dans une équation quelconque ne pourra jamais être plus grand que le double de celui des ſucceſſions de ſigne dans l'équation des différences.

(4) De là & de ce que nous avons dit ci-deſſus, il s'enſuit que ſi l'équation des différences a tous ſes termes alternativement poſitifs & négatifs, l'équation primitive aura néceſſairement toutes ſes racines réelles; ſinon elle aura néceſſairement des racines imaginaires. Ainſi on pourra toujours juger par ce moyen s'il y a ou non des racines imaginaires dans une équation quelconque donnée.

Remarque II.

Où l'on donne des regles pour déterminer le nombre des racines imaginaires des équations.

(5) Soient a, b, c, d &c. les racines réelles d'une équation quelconque, & $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$ &c. les racines imaginaires; les carrés des différences de ces racines ſeront

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (a-d)^2 \text{ &c.}$$
$$(b-c)^2,\ (b-d)^2 \text{ &c.}\quad (c-d)^2 \text{ &c.}$$
$$-4\beta^2,\quad -4\delta^2, \text{ &c.}$$
$$(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - b + \beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha - b - \beta\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - c + \beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha - c - \beta\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - d + \beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha - d - \beta\sqrt{-1})^2$$
&c.

$(\gamma - a + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - a - \delta\sqrt{-1})^2$
$(\gamma - b + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - b - \delta\sqrt{-1})^2$
$(\gamma - c + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - c - \delta\sqrt{-1})^2$
$(\gamma - d + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - d - \delta\sqrt{-1})$
&c.
$(\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$
$(\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$
&c.

leſquels ſeront par conſéquent les racines de l'équation des différences.

Soit m le degré de l'équation propoſée, qui eſt égal au nombre des racines, a, b, c, &c. $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$ &c.; celui de l'équation des différences ſera $\frac{m(m-1)}{2} = n$ (art. 8. du Mém. cité); or ſoit p le nombre des racines réelles a, b, c &c., & $2q$ celui des racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$ &c. en ſorte que $m = p + 2q$, il eſt facile de voir par la table précédente que parmi les n racines de l'équation des différences il y en aura néceſſairement $\frac{p(p-1)}{2}$ de réelles & poſitives, q de réelles & négatives, & $2q(p + q - 1)$ d'imaginaires.

(6) Qu'on faſſe maintenant le produit de toutes ces racines, & il eſt viſible que le produit des $\frac{p(p-1)}{2}$ racines poſitives ſera toujours poſitif, que celui des q racines négatives ſera poſitif ou négatif, ſuivant que le nombre q ſera pair ou impair, qu'enfin le produit des $2q(p + q - 1)$ racines imaginaires ſera toujours poſitif; en effet, ces dernieres racines étant deux à deux de la forme $(A + B\sqrt{-1})^2$, $(A - B\sqrt{-1})^2$, leurs produits deux à deux ſe-

ront

ront de la forme $(A^2 + B^2)^2$, & par conſéquent poſitifs: donc le produit de toutes ces racines enſemble ſera toujours auſſi poſitif.

Donc le produit total ſera néceſſairement poſitif ou négatif, ſuivant que q ſera pair ou impair.

Mais le dernier terme d'une équation eſt, comme l'on ſait, égal au produit de toutes ſes racines avec le ſigne + ou — ſuivant que le nombre de ces racines eſt pair ou impair.

Donc le dernier terme de l'équation des différences dont le degré eſt n ſera néceſſairement poſitif, ſi n & q ſont tous deux pairs ou tous deux impairs, & négatif ſi l'un de ces nombres eſt pair & l'autre impair.

(7) Or ſi n & q ſont tous deux pairs ou impairs, $n - q$ ſera néceſſairement pair, & ſi n & q ſont l'un pair & l'autre impair, $n - q$ ſera néceſſairement impair; mais à cauſe de $n = \frac{m(m-1)}{2}$, & de $m = p + 2q$, on a $n - q = \frac{p(p-1)}{2} + 2q(p + q - 1)$, de ſorte que $n - q$ ſera toujours pair ou impair ſuivant que $\frac{p(p-1)}{2}$ le ſera.

Donc le dernier terme de l'équation des différences ſera néceſſairement poſitif ou négatif, ſuivant que le nombre $\frac{p(p-1)}{2}$ ſera pair ou impair, c'eſt à dire, ſuivant que le nombre des combinaiſons des racines réelles de la propoſée priſes deux à deux ſera pair ou impair.

(8) Suppoſons 1°. que ce dernier terme ſoit poſitif, il faudra en ce cas que $\frac{p(p-1)}{2}$ ſoit pair; donc ou $\frac{p}{2} = 2\lambda$, &

$p = 4\lambda$, ou $\frac{p-1}{2} = 2\lambda$ & $p = 4\lambda + 1$; d'où il s'enſuit que dans ce cas le nombre des racines réelles de la propoſée ſera néceſſairement multiple de 4 ſi ce nombre eſt pair, c'eſt à dire, ſi le degré de l'équation eſt pair, ou multiple de 4 plus 1 ſi le degré de l'équation eſt impair. Ainſi il ſera impoſſible que l'équation ait 2, ou 3, ou 6, ou 7 &c. racines réelles.

2°. Suppoſons que le dernier terme de l'équation des différences ſoit négatif, il faudra alors que $\frac{p\,(p-1)}{2}$ ſoit impair; donc ou $\frac{p}{2} = 2\lambda + 1$ & $p = 4\lambda + 2$, ou $\frac{p-1}{2} = 2\lambda + 1$, & $p = 4\lambda + 3$; d'où il s'enſuit que dans ce cas le nombre des racines réelles de la propoſée ſera néceſſairement multiple de 4 plus 2 ſi le degré de l'équation eſt pair, ou multiple de 4 plus 3 ſi ce degré eſt impair. De ſorte qu'il ſera impoſſible que l'équation ait en ce cas 1, ou 4, ou 5, ou 8, ou 9 &c. racines réelles.

(9) Ainſi, par l'inſpection ſeule des ſignes de l'équation des différences, on ſera en état de juger 1°. ſi toutes les racines de l'équation propoſée ſont réelles ou non. 2°. Si le nombre des racines réelles eſt un de ceux-ci, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 &c., ou bien s'il eſt un de ceux-ci 2, 3, 6, 7, 10, 11 &c. ce qui ſuffira pour déterminer le nombre des racines réelles & des imaginaires dans les équations qui ne paſſent pas le cinquieme degré, & dans toutes les équations où l'on ſaura d'avance que les racines imaginaires ne ſauroient être plus de quatre.

Peut-être qu'en pouſſant plus loin cette théorie, on pourroit trouver des regles ſûres pour déterminer le nombre des racines réelles dans les équations de degré quelconque, les méthodes que l'on a propoſées juſqu'à préſent pour cet objet étant ou inſuffiſantes, comme celles de *Newton*, *Maclaurin* &c. ou impraticables, comme celles de *Stir-*

Stirling & de l'Abbé de *Gua*, qui ſuppoſent la réſolution des équations des degrés inférieurs.

Remarque III.

Où l'on applique la théorie précédente aux équations du ſecond, troiſieme, & quatrieme degré.

(10) Soit l'équation propoſée du ſecond degré comme

$$x^2 - Ax + B = 0$$

l'équation des différences ſera du degré $\frac{2.1}{2} = 1$; & on trouvera par la méthode de l'art. 8. du Mémoire cité que cette équation ſera

$$v - a = 0$$

où l'on aura $4a = A^2 - 4B$.

Ainſi les racines ſeront toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires ſuivant que l'on aura $A^2 - 4B > 0$, ou < 0; & elles ſeront égales lorſque $A^2 = 4B$.

(11) Soit propoſée l'équation générale du troiſieme degré

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

l'équation des différences ſera ici du degré $\frac{3.2}{2} = 3$, & on trouvera par la même méthode

$$v^3 - av^2 + bv - c = 0$$

où

$$4a = 2(A^2 - 3B)$$

$$16b = (A^2 - 3B)^2$$

$$4^3c = \frac{4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2}{3}.$$

Donc, pour que les racines ſoient toutes réelles, il faudra que l'on ait

1°. $A^2 - 3B > 0$

2°. $4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0$.

Si l'une de ces deux conditions manque, l'équation aura deux racines imaginaires.

(12) Soit maintenant propoſée l'équation générale du 4ème degré

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

dont le ſecond terme eſt évanoui pour plus de ſimplicité; le degré de l'équation des différences ſera $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$; de ſorte que cette équation ſera

$$v^6 - av^5 + bv^4 - cv^3 + dv^2 - ev + f = 0$$

où l'on trouvera par la même méthode

$4a = -8B$

$16b = 22B^2 + 8D$

$4^3 c = -18B^3 + 16BD + 26C^2$

$4^4 d = 17B^4 + 24B^2D - 7.16D^2 + 3.16BC^2$

$4^5 .e = -4B^5 - 2.27C^2B^2 - 8.27C^2D + 3.4^3BD^2 - 2.4^2B^3D$

$4^6 .f = 4^4D^3 - 2.^3 4^2B^2D^2 + 4.^2 3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4$.

Donc 1°. ſi la quantité

$$4D^3 - 2.^3 4^2B^2D + 4.^2 3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4$$

eſt négative la propoſée aura néceſſairement deux racines réelles & deux imaginaires; mais, ſi cette quantité eſt poſitive, alors la propoſée aura toutes ſes racines réelles ou toutes imaginaires.

Or toutes les racines ſeront réelles ſi les valeurs de tous les coëfficiens a, b, c, d, e, f ſont poſitives; donc elles ſeront toutes imaginaires ſi le dernier coëfficient f étant poſitif, quelqu'un des autres ſe trouve négatif.

Sup-

Suppoſons donc le coëfficient f poſitif, en ſorte que l'on ait

$$4D^3 - 2.^3 4^2 B^2 D^2 + 4.^2 3^2 C^2 BD + 4^2 B^4 D - 4C^2 B^3 - 3^3 C^4 > 0$$

& on trouvera que tous les autres coëfficiens ſeront auſſi poſitifs ſi l'on a en même tems

$$B < 0, \quad \& \; B^2 - 4D > 0,$$

& qu'au contraire quelqu'un d'eux deviendra néceſſairement négatif ſi

$$B > 0, \quad \text{ou } B^2 - 4D < 0.$$

Ainſi dans le premier cas les quatre racines de l'équation ſeront toutes réelles, & dans le ſecond elles ſeront toutes imaginaires.

On pourroit de même trouver les conditions qui rendent les racines des équations du cinquieme degré toutes réelles, ou en partie réelles & en partie imaginaires; mais comme dans ce cas l'équation des différences monteroit au degré $\frac{5.4}{2} = 10$, le calcul deviendroit extrêmement prolixe & embaraſſant.

Remarque IV.

Sur la maniere d'avoir les racines imaginaires des équations.

(13) Nous avons vu dans la Remarque 2de que chaque couple de racines imaginaires correſpondantes $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ donne néceſſairement dans l'équation des différences une racine réelle négative $-4\beta^2$; d'où il s'enſuit qu'en cherchant les racines réelles négatives de cette équation, on trouvera néceſſairement les valeurs de $-4\beta^2$, d'où l'on aura celles de β, à l'aide deſquelles on pourra enſuite trouver les valeurs correſpondantes de α, comme nous l'avons enſeigné dans l'art. 17. du Mémoire cité; de ſorte qu'on aura par ce moyen l'expreſſion de chaque racine imaginaire de l'équation propoſée; ce qui eſt ſouvent néceſſaire, ſurtout dans le calcul intégral. Voici ſeulement une obſervation qui peut ſervir à répandre un plus grand jour ſur cette théorie, & à diſſiper en même tems les doutes qu'on pourroit ſe former ſur ſon exactitude & ſa généralité.

(14)

(14) Lorſque les parties réelles α, γ &c. des racines imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$\alpha - \beta\sqrt{-1},$$
$$\gamma + \delta\sqrt{-1},$$
$$\gamma - \delta\sqrt{-1},$$
&c.

ſont inégales tant entr'elles qu'avec les racines réelles a, b, c &c. il eſt évident par la table de la Remarque préc. que l'équation des différences n'aura abſolument d'autres racines réelles négatives que celles-ci $-4\beta^2$, $-4\delta^2$ &c. de ſorte que le nombre de ces racines ſera le même que celui des couples de racines imaginaires dans l'équation propoſée.

Mais, s'il arrive que parmi les quantités α, γ &c. il s'en trouve d'égales entr'elles, ou d'égales aux quantités a, b, c &c. alors l'équation des différences aura néceſſairement plus de racines négatives que la propoſée n'aura de couples de racines imaginaires.

En effet, ſoit $a = \alpha$, & les deux racines imaginaires $(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$, deviendront $-\beta^2$, & $-\beta^2$, & par conſéquent réelles négatives.

De ſorte que, ſi l'équation propoſée ne contient, par exemple, que les deux imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, & $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, l'équation des différences contiendra, dans le cas de $\alpha = a$, outre la racine réelle négative $-4\beta^2$, encore ces deux-ci $-\beta^2$, $-\beta^2$, égales entr'elles.

D'où l'on voit que lorſque l'équation des différences a trois racines réelles négatives, dont deux ſont égales entr'elles, alors la propoſée peut avoir ou trois couples de racines imaginaires ou une ſeulement.

Si la propoſée contient quatre racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, alors l'équation des

des différences contiendra d'abord les deux racines réelles négatives $-4\beta^2$, $-4\delta^2$; enſuite ſi $\alpha = a$, elle aura encore ces deux-ci $-\beta^2$, $-\beta^2$; ſi $\gamma = b$, elle aura de même ces deux autres-ci $-\delta^2$, $-\delta^2$; enfin, ſi on avoit $\alpha = \gamma$, alors les quatre racines imaginaires $(\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1})^2$, $(\alpha-\gamma-(\beta-\delta)\sqrt{-1})^2$, $(\alpha-\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1})^2$, $\alpha-\gamma-(\beta+\delta)\sqrt{-1})^2$ deviendroient $-(\beta-\delta)^2$, $-(\beta-\delta)^2$, $-(\beta+\delta)^2$, $-(\beta+\delta)^2$, c'eſt à dire réelles négatives, & égales deux à deux.

(15) De là il eſt facile de conclure

1°. Que lorſque toutes les racines réelles négatives de l'équation des différences ſont inégales entr'elles, alors la propoſée aura néceſſairement autant de couples de racines imaginaires qu'il y aura de ces racines.

Et dans ce cas nommant $-w$ une quelconque de ces racines, on aura d'abord $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$; cette valeur étant enſuite ſubſtituée dans les deux équations (H) de l'art. 17. du Mémoire cité, on cherchera leur plus grand commun diviſeur en pouſſant la diviſion juſqu'à ce que l'on parvienne à un reſte où α ne ſe trouve plus qu'à la premiere dimenſion; & faiſant ce reſte égal à zéro, on aura la valeur de α correſpondante à celle de β; par ce moyen chaque racine négative $-w$ donnera deux racines imaginaires $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, & $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

2°. Que ſi parmi les racines réelles négatives de l'équation des différences il y en a d'égales entr'elles, alors chaque racine inégale, s'il y en a, donnera toujours, comme dans le cas précédent, une couple de racines imaginaires; mais chaque couple de racines égales pourra donner auſſi deux couples de racines imaginaires, ou n'en donner aucune; ainſi deux racines égales donneront ou quatre racines imaginaires ou aucune; trois racines égales donneront ou ſix ou deux racines; quatre racines égales donneront ou huit ou quatre racines imaginaires, & ainſi de ſuite.

(16) Or ſoient par exemple $-w$, & $-w$ deux racines égales négatives de l'équation des différences, on fera $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ comme ci-deſſus, & ſubſtituant cette valeur de β dans les équations (H) de l'art. cité, on cherchera leur commun diviſeur en ne pouſſant la diviſion que juſqu'à ce que l'on parvienne à un reſte où α ne ſe trouve qu'à la ſeconde dimenſion, à cauſe que la valeur de β eſt double, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'endroit cité.

Ainſi, faiſant ce reſte égal à zéro, on aura pour la détermination de α une équation du ſecond degré, laquelle aura par conſéquent ou deux racines réelles ou deux imaginaires.

Dans le premier cas, nommant ces deux racines α' & α'', on aura les quatre racines imaginaires $\alpha' + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha' - \beta\sqrt{-1}$, $\alpha'' + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha'' - \beta\sqrt{-1}$; dans le ſecond cas, les valeurs de α étant imaginaires contre l'hypotheſe, ce ſera une marque que les deux racines égales $-w$, $-w$, ne donneront point de racines imaginaires dans la propoſée.

(17) S'il y avoit dans l'équation des différences trois racines égales & négatives $-w$, $-w$, $-w$, alors faiſant $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$, on pouſſera ſeulement la diviſion des équations juſqu'à ce que l'on parvienne à un reſte où α ſe trouve à la troiſieme dimenſion; de ſorte que ce reſte étant fait $= 0$, on aura une équation du 3eme degré en α, d'où l'on tirera, ou trois valeurs réelles de α, ou une réelle & deux imaginaires: dans le premier cas on aura ſix racines imaginaires; dans le ſecond on n'en aura que deux, les valeurs imaginaires de α devant toujours être rejettées comme contraires à l'hypotheſe, & ainſi de ſuite.

§. 2.

§. 2.

Sur la maniere d'approcher de la valeur numérique des racines des équations.

(18) On a vu dans le §. 3. du Mémoire cité comment on peut réduire les racines des équations numériques à des fractions continues, & combien ces ſortes de réductions ſont préférables à toutes les autres: nous allons encore faire ici quelques remarques pour donner à cette théorie toute la généralité & la ſimplicité dont elle peut être ſuſceptible.

Remarque I.

Sur les fractions continues périodiques.

(19) Nous avons déjà remarqué dans l'art. 18. du même Mémoire, que lorſque la racine cherchée eſt égale à un nombre commenſurable, la fraction contiue doit néceſſairement ſe terminer, de ſorte que l'on pourra avoir l'expreſſion exacte de la racine; mais il y a encore un autre cas où l'on peut auſſi avoir l'expreſſion exacte de la racine, quoique la fraction continue qui la repréſente aille à l'infini. Ce cas a lieu lorſque la fraction continue eſt périodique, c'eſt à dire, telle que les mêmes dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre à l'infini; par exemple, ſi on avoit la fraction

$$p + \frac{1}{q + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{p + \&c.}}}}$$

il eſt clair qu'en nommant x la valeur de cette fraction on auroit

$x = p + \frac{1}{q + \frac{1}{x}}$ ce qui donne cette équation $qx^2 - pqx - p = 0$, par laquelle on pourra déterminer x; il en ſeroit de même ſi la période étoit d'un plus grand nombre de termes, & l'on trouveroit toujours pour la détermination de x une équation du ſecond degré. Il peut

auſſi arriver que la fraction continue ſoit irréguliere dans ſes premiers termes, & qu'elle ne commence à devenir périodique qu'après un certain nombre de termes; dans ces cas on pourra trouver de la même maniere la valeur de la fraction, & elle dépendra pareillement toujours d'une équation du ſecond degré; car ſoit, par exemple, la fraction

$$p + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \text{&c.}$$

nommons toute la fraction x, & y la partie qui eſt périodique, ſavoir $r + \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \text{&c.}$ on aura $x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{y}$,

d'où l'on tire $y = \frac{x-p}{1-q(x-p)}$; mais l'on a $y = r + \frac{1}{s} + \frac{1}{y}$,

ce qui donne $sy^2 - rsy - r = 0$; donc, ſubſtituant pour y ſa valeur en x, on aura

$$s(x-p)^2 - rs(x-p)(1-q(x-p)) - r(1-q(x-p))^2 = 0$$

équation qui étant développée & ordonnée par rapport à x, montera au ſecond degré.

(20) On voit par ce que nous venons de dire que le cas dont il s'agit doit avoir lieu toutes les fois que dans la ſuite des équations transformées (a), (b), (c), (d) &c. de l'art. 18. du Mémoire cité il s'en trouvera deux qui auront les mêmes racines; car ſi la racine z, par exemple, de l'équation (c) étoit la même que la racine x de l'équation (a), on auroit $x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{x}$ ce qui eſt le cas que nous avons examiné ci-deſſus; & ainſi des autres. Donc, quand on voit que dans une fraction continue certains nombres reviennent dans le mê-

le même ordre, alors pour s'aſſurer ſi la fraction doit être réellement périodique à l'infini, il n'y aura qu'à examiner ſi les racines des deux équations, qui ont la même valeur entiere approchée, ſont parfaitement égales, c'eſt à dire, ſi ces deux équations ont une racine commune; ce qu'on reconnoitra aiſément en cherchant leur plus grand commun diviſeur, lequel doit néceſſairement renfermer toutes les racines communes aux deux équations, s'il y en a; or, comme nous avons vu que toute fraction continue périodique ſe réduit à la racine d'une équation du ſecond degré, il s'enſuit que le plus grand diviſeur commun dont nous parlons ſera néceſſairement du ſecond degré.

(21) Suppoſons donc qu'on ait reconnu que parmi les différentes équations transformées il s'en trouve deux qui aient la même racine, alors la fraction continue cherchée ſera néceſſairement périodique à l'infini, de ſorte qu'on pourra la continuer auſſi loin qu'on voudra en répétant ſeulement les mêmes nombres; mais voyons comment on pourra dans ce cas continuer auſſi la ſuite des fractions convergentes de *l'art.* 23. *du Mém. cité ſur la réſol. des équat. num.*, ſans être obligé de les calculer toutes l'une après l'autre par les formules données.

(22) Pour cet effet, nous ſuppoſerons que l'on ait en général

$$x = \lambda' + \frac{1}{x'},\ x' = \lambda'' + \frac{1}{x''},\ x'' = \lambda''' + \frac{1}{x'''}\ \&c.$$

en ſorte que x étant la racine cherchée, x', x'', x''' &c. ſoient celles des équations transformées que nous avons déſignées ailleurs par y, z, u &c.; & l'on aura

$$x = \lambda' + \frac{1}{\lambda''} + \frac{1}{\lambda'''} + \&c.$$

Donc, faiſant comme dans l'art. cité

$$\left.\begin{array}{ll} l = 1 & L = 0 \\ l' = \lambda' & L' = 1 \\ l'' = \lambda'' l' + l & L'' = \lambda'' L' \\ l''' = \lambda''' l'' + l' & L''' = \lambda''' L'' + L' \\ l^{IV} = \lambda^{IV} l''' + l'' & L^{IV} = \lambda^{IV} L''' + L'' \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(A)}$$

on aura ces fractions convergentes vers x

$$\frac{l}{L}, \frac{l'}{L'}, \frac{l''}{L''}, \frac{l'''}{L'''}, \frac{l^{IV}}{L^{IV}} \text{ \&c.}$$

(23) Maintenant l'équation $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$ donnera $xx' = x'\lambda' + 1 = x'l' + 1$; mettons au lieu de x' dans le ſecond membre de cette équation ſa valeur $\lambda'' + \frac{1}{x''}$ & multipliant par x'' on aura $xx'x'' = (\lambda''l' + l)\, x'' + l' = l'''x'' + l'$; on trouvera de même en ſubſtituant dans le ſecond membre de cette équation $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ à la place de x'', $xx'x''x''' = l'''x''' + l''$, & ainſi de ſuite.

Pareillement l'équation $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$ donnera $x'x'' = \lambda''x'' + 1 = L''x'' + L'$; enſuite ſubſtituant dans le ſecond membre $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ à la place de x'', & multipliant par x''', on aura $x'x''x''' = (\lambda''L'' + L')\, x''' + L'' = L'''x''' + L''$, & ainſi de ſuite.

D'où il s'enſuit qu'on aura en général, quelle que ſoit la fraction continue, ſoit périodique ou non,

$$\left.\begin{array}{l} xx'x''x''' \ldots x^{\ell} = l^{\ell}x^{\ell} + l^{\ell-1} \\ x'x''x''' \ldots x^{\ell} = L^{\ell}x^{\ell} + L^{\ell-1} \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(B)}$$

(24)

(24) Cela posé, supposons que l'on ait trouvé, par exemple $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$, c'est à dire que la racine de la $(\mu+\nu)^{\text{ème}}$ transformée soit égale à celle de la transformée $\mu^{\text{ème}}$; alors on aura aussi $x^{\mu+\nu+1} = x^{\mu+1}$, $x^{\mu+\nu+2} = x^{\mu+2}$ &c. $x^{\mu+2\nu} = x^{\mu}$ &c. & en général $x^{\mu+n\nu+\pi} = x^{\mu+\pi}$; donc aussi $\lambda^{\mu+\nu+1} = \lambda^{\mu+1}$, $\lambda^{\mu+\nu+2} = \lambda^{\mu+2}$ &c. & en général $\lambda^{\mu+n\nu+\pi} = \lambda^{\mu+\pi}$; de sorte que l'on aura

$$x = \lambda' + \frac{1}{\lambda''} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{\mu+1}} + \frac{1}{\lambda^{\mu+2}} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{\mu+\nu}} + \frac{1}{\lambda^{\mu+1}} + \&c.$$

(25) Maintenant si on suppose en général $\varrho = \mu + n\nu + \pi$, il est facile de voir que les deux équations (B) de l'art. préc. deviendront

$$x x' x'' \ldots\ldots x^{\mu} \times x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots\ldots x^{\mu+\pi} \times (x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots\ldots x^{\mu+\nu})^{n}$$
$$= l^{\varrho} x^{\mu+\pi} + l^{\varrho-1}, \quad \&$$
$$x' x'' \ldots\ldots x^{\mu} \times x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots\ldots x^{\mu+\pi} \times (x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots\ldots x^{\mu+\nu})^{n}$$
$$= L^{\varrho} x^{\mu+\pi} + L^{\varrho-1}.$$

Or on a, en faisant dans les formules (B) de l'art. préc. $\varrho = \mu$,

$$x x' x'' \ldots\ldots x^{\mu} = l^{\mu} x^{\mu} + l^{\mu-1}$$
$$x' x'' \ldots\ldots x^{\mu} = L^{\mu} x^{\mu} + L^{\mu-1},$$

De

De plus, à cauſe de $x^\mu = \lambda^{\mu+1} + \frac{1}{x^{\mu+1}}$, $x^{\mu+1} = \lambda^{\mu+2} + \frac{1}{x^{\mu+2}}$ &c., il eſt clair que ſi on fait

$$\left.\begin{array}{ll} h = 1 & H = 0 \\ h' = \lambda^{\mu+1} & H' = 1 \\ h'' = \lambda^{\mu+2}h' + h & H'' = \lambda^{\mu+2}H' \\ h''' = \lambda^{\mu+3}h'' + h' & H''' = \lambda^{\mu+3}H'' + H' \\ h^{IV} = \lambda^{\mu+4}h''' + h'' & H^{IV} = \lambda^{\mu+4}H''' + H'' \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}\right\} \text{- - - (C)}$$

on aura en général

$$\text{(D) - -} \begin{cases} x^\mu x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+r} = h^r x^{\mu+r} + h^{r-1} \\ x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+r} = H^r x^{\mu+r} + H^{r-1}. \end{cases}$$

Donc on aura

$$x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\pi} = H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1}$$

&, à cauſe de $x^{\mu+r} = x^\mu$ (hyp.)

$$x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+r} = H^r x^\mu + H^{r-1}.$$

(26) De ſorte qu'en faiſant ces ſubſtitutions dans les deux équations ci-deſſus, on aura

$$(l^\mu x^\mu + l^{\mu-1})(H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1})(H^r x^\mu + H^{r-1})^n = l^\varrho x^{\mu+\pi} + l^{\varrho-1}; \text{ \&}$$

$$(L^\mu x^\mu + L^{\mu-1})(H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1})(H^r x^\mu + H^{r-1})^n = L^\varrho x^{\mu+\pi} + L^{\varrho-1}.$$

(27) Or les équations (D) étant diviſées l'une par l'autre donnent

$$x^\mu = \frac{h^r x^{\mu+r} + h^{r-1}}{H^r x^{\mu+r} + H^{r-1}} \text{ - - - (E)}$$

d'où

d'où l'on tire

$$x^{\mu+\sigma} = \frac{H^{\sigma-1}x^{\mu} - h^{\sigma-1}}{h^{\sigma} - H^{\sigma}x^{\mu}}.$$

Donc, faiſant $\sigma = \pi$, on aura $x^{\mu+\pi} = \frac{H^{\pi-1}x^{\mu} - h^{\pi-1}}{h^{\pi} - H^{\pi}x^{\mu}}$;

& de là $H^{\pi}x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1} = \frac{h^{\pi}H^{\pi-1} - H^{\pi}h^{\pi-1}}{h^{\pi} - H^{\pi}x^{\mu}}$; mais il eſt facile de voir par la nature des quantités h, h', h'' &c. H, H', H'' &c. que l'on a

$H'h - h'H = 1$, $H''h' - h''H' = -1$, $H'''h'' - h'''H'' = 1$ &c.

d'où l'on aura en général

$$h^{\pi}H^{\pi-1} - H^{\pi}h^{\pi-1} = \pm 1$$

le ſigne ſupérieur ayant lieu lorſque π eſt un nombre pair, & l'inférieur lorſque π eſt impair.

Donc, faiſant ces ſubſtitutions dans les deux équations de l'art. 26, on aura

$$\pm (l^{\mu}x^{\mu} + l^{\mu-1})(H'x^{\mu} + H'^{-1})^{n} =$$
$$(l^{\varepsilon}H^{\pi-1} - l^{\varepsilon-1}H^{\pi})x^{\mu} + l^{\varepsilon-1}h^{\pi} - l^{\varepsilon}h^{\pi-1};$$
$$\pm (L^{\mu}x^{\mu} + L^{\mu-1})(H'x^{\mu} + H'^{-1})^{n} =$$
$$(L^{\varepsilon}H^{\pi-1} - L^{\varepsilon-1}H^{\pi})x^{\mu} + L^{\varepsilon-1}h^{\pi} - L^{\varepsilon}h^{\pi-1};$$

les ſignes ambigus dépendant du nombre π, comme nous l'avons vu ci-deſſus.

(28) Maintenant, ſi dans l'équation (E) de l'art. préc. on fait $\sigma = \nu$, on aura à cauſe de $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ (hyp.) $x^{\mu} = \frac{h'x^{\mu} + h'^{-1}}{H'x^{\mu} + H'^{-1}}$; d'où l'on tire l'équation en x^{μ}

$$H'(x^{\mu})^{2} - (h' - H'^{-1})x^{\mu} - h'^{-1} = 0 \cdots (F)$$

laquelle donne

$$x'' = \frac{h' - H'^{-1} + \sqrt{((h' - H'^{-1})^2 + 4H'h'^{-1})}}{2H'}.$$

Soit pour abréger

$$P = \frac{h' - H'^{-1}}{2H'}, \quad Q = P^2 + \frac{h'^{-1}}{H'}$$

en ſorte que l'on ait $x'' = P + \sqrt{Q}$, & ſubſtituant cette valeur dans les deux dernieres équations de l'art. 27, on aura

$$\pm (l''P + l''^{-1} + l''\sqrt{Q})\,(H'P + H'^{-1} + H'\sqrt{Q})^n$$
$$= l^{\varepsilon}H^{\pi-1} - l^{\varepsilon-1}H^{\pi})(P + \sqrt{Q}) + l^{\varepsilon-1}h^{\pi} - l^{\varepsilon}h^{\pi-1};$$
$$\pm (L''P + L''^{-1} + L''\sqrt{Q})\,(H'P + H'^{-1} + H'\sqrt{Q})^n$$
$$= L^{\varepsilon}H^{\pi-1} - L^{\varepsilon-1}H^{\pi})(P + \sqrt{Q}) + L^{\varepsilon-1}h^{\pi} - L^{\varepsilon}h^{\pi-1};$$

d'où, à cauſe de l'ambiguité du radical $\sqrt{Q}$, on tirera quatre équations par leſquelles on pourra déterminer l^{ε}, $l^{\varepsilon-1}$, L^{ε}, $L^{\varepsilon-1}$.

(29) En effet, ſuppoſons pour abréger

$$l''P + l''^{-1} = f''$$
$$L''P + L''^{-1} = F''$$

&

$$H'P + H'^{-1} = K',$$

on trouvera ces quatre équations

$$l^{\varepsilon}H^{\pi-1} - l^{\varepsilon-1}H^{\pi} =$$
$$\pm \frac{(f'' + l''\sqrt{Q})(K' + H'\sqrt{Q})^n - (f'' - l''\sqrt{Q})(K' - H'\sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}}$$
$$l^{\varepsilon-1}h^{\pi} - l^{\varepsilon}h^{\pi-1} =$$
$$\pm \frac{(P+\sqrt{Q})(f'' - l''\sqrt{Q})(K' - H'\sqrt{Q})^n - (P-\sqrt{Q})(f'' + l''\sqrt{Q})(K' + H'\sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}}$$

&

$$\&\quad L^{\varrho}H^{\pi-1} - L^{\varrho-1}H^{\pi} =$$

$$\pm\frac{(F^{\mu}+L^{\mu}\sqrt{Q})(K'+H'\sqrt{Q})^{\nu}-(F^{\mu}-L^{\mu}\sqrt{Q})(K'-H'\sqrt{Q})^{\nu}}{2\sqrt{Q}}$$

$$L^{\varrho-1}h^{\pi} - L^{\varrho}h^{\pi-1} =$$

$$\pm\frac{(P+\sqrt{Q})(F^{\mu}-L^{\mu}\sqrt{Q})(K'-H'\sqrt{Q})^{\nu}-(P-\sqrt{Q})(F^{\mu}-L^{\mu}\sqrt{Q})(K'-H'\sqrt{Q})^{\nu}}{2\sqrt{Q}}.$$

Donc, ſi on ajoute la 1ere multipliée par h^{π} à la 2de multipliée par H^{π}, & de même la 3eme multipliée par h^{π} à la 4eme multipliée par H^{π}, & qu'on faſſe pour abréger

$$-H^{\pi}P + h^{\pi} = G^{\pi}$$

on aura, à cauſe de $h^{\pi}H^{\pi-1} - H^{\pi}h^{\pi-1} = \pm 1$ (art. 27)

$$l^{\varrho}=\frac{(f^{\mu}+l^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi}+H^{\pi}\sqrt{Q})(K'+H'\sqrt{Q})^{\nu}-(f^{\mu}-l^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi}-H^{\pi}\sqrt{Q})(K'-H'\sqrt{Q})^{\nu}}{2\sqrt{Q}}$$

$$L^{\varrho}=\frac{(F^{\mu}+L^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi}+H^{\pi}\sqrt{Q})(K'+H'\sqrt{Q})^{\nu}-(F^{\mu}-L^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi}-H^{\pi}\sqrt{Q})(K'-H'\sqrt{Q})^{\nu}}{2\sqrt{Q}}$$

ϱ étant $= \mu + n\nu + \pi$.

(30) Ainſi, lorſqu'à l'aide des quantités λ', λ'', λ''' &c. $\lambda^{\mu+1}$, on aura calculé, par les formules (A) & (C), les quantités l, l', l'' &c. L, L', L'' &c. juſqu'à l^{μ} & L^{μ}, & les quantités h, h', h'' &c. H, H', H'' &c. juſqu'à h^{ν} & H', on pourra par les formules précédentes trouver les valeurs de l^{ϱ} & de L^{ϱ}, c'eſt à dire, les termes de la fraction $\frac{l^{\varrho}}{L^{\varrho}}$, quel que ſoit l'expoſant du quantieme ϱ; car pour cela il n'y aura qu'à retrancher μ de ϱ, & diviſer la différence par ν, le quotient ſera le nombre n qui entre dans les formules précédentes comme expoſant, & le reſte ſera le nombre π, qui ſera par conſéquent toujours moindre que ν.

(31) Au reſte, ſi on vouloit trouver en général l'équation du ſecond degré par laquelle peut-être déterminée la racine x de l'équation propoſée lorſqu'on a $x^{\mu+1} = x^{\mu}$ comme dans l'art. 24; il n'y auroit qu'à remarquer que les équations (B) de l'art. 23. étant diviſées l'une par l'autre donnent en général

$$x = \frac{l^{\varrho} x^{\varrho} + l^{\varrho-1}}{L^{\varrho} x^{\varrho} + L^{\varrho-1}} \quad \ldots\ldots \quad (G)$$

d'où l'on tire en faiſant $\varrho = \mu$

$x^{\mu} = \frac{L^{\mu-1} x - l^{\mu-1}}{l^{\mu} - L^{\mu} x}$; donc ſubſtituant cette valeur de x^{μ} dans l'équation (E) de l'art. 27, on aura celle-ci

$$H'(L^{\mu-1}x - l^{\mu-1})^2 - (h' - H'^{-1})(L^{\mu-1}x - l^{\mu-1})(l^{\mu} - L^{\mu}x) - h'^{-1}(l^{\mu} - L^{\mu}x)^2 = 0,$$

c'eſt à dire

$$(H'(L^{\mu-1})^2 + (h' - H'^{-1})L^{\mu-1}L^{\mu} - h'^{-1}(L^{\mu})^2)x^2 - (2H'L^{\mu-1}l^{\mu-1} + (h' + H'^{-1})(L^{\mu-1}l^{\mu} + l^{\mu-1}L^{\mu}) - 2h'^{-1}l^{\mu}L^{\mu})x + H'(l^{\mu-1})^2 + (h' - H'^{-1})l^{\mu-1}l^{\mu} - h'^{-1}(l^{\mu})^2 = 0,$$

& cette équation ſera néceſſairement un diviſeur de l'équation propoſée.

Remarque II.

Où l'on donne une maniere très-ſimple de réduire en fractions continues les racines des équations du ſecond degré.

(32) Conſidérons l'équation générale du ſecond degré

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

dans laquelle E, E' & ε ſont ſuppoſés des nombres entiers, tels que $\varepsilon^2 + EE' > 0$, pour que les racines ſoient réelles; cette équation étant réſolue donne

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + EE')}}{E'}$$

où

où le radical peut être pris poſitivement ou négativement. Suppoſons que la racine cherchée ſoit poſitive, & ſoit λ' le nombre entier qui ſera immédiatement plus petit que la valeur de x; on fera donc $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$, & ſubſtituant cette valeur dans l'équation propoſée, on aura une équation transformée dont l'inconnue ſera x'; or, ſi après avoir fait la ſubſtitution on multiplie toute l'équation par x'^2, qu'enſuite on change les ſignes & qu'on ſuppoſe pour abréger

$$\varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$$
$$E'' = E + 2\varepsilon\lambda' - E'\lambda'^2,$$

on aura la transformée

$$E''x'^2 - 2\varepsilon' x' - E' = 0$$

laquelle donnera

$$x' = \frac{\varepsilon' + V(\varepsilon'^2 + E'E'')}{E''};$$

on cherchera donc le nombre entier λ'' qui ſera immédiatement plus petit que cette valeur de x', & on fera $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$ & ainſi de ſuite.

Maintenant je remarque que la quantité $\varepsilon'^2 + E'E''$ qui eſt ſous le ſigne dans l'expreſſion de x' devient, en ſubſtituant les valeurs de ε' & de E'', & ôtant ce qui ſe détruit, celle-ci $\varepsilon^2 + EE'$, qui eſt la même que celle qui eſt ſous le ſigne dans l'expreſſion de x; d'où il eſt facile de conclure que la quantité radicale ſera toujours la même dans les expreſſions de x, x', x'' &c.

(33) Donc, ſi on fait pour abréger

$$B = \varepsilon^2 + EE'$$

& qu'on prenne (le ſigne $\prec$ dénote qu'il faut prendre le nombre entier qui eſt immédiatement moindre)

$$\lambda' \prec \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'}, \quad \varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$$

$$E'' = E + 2\varepsilon\lambda' - E'\lambda'^2, \quad \lambda'' \prec \frac{\varepsilon' + \sqrt{B}}{E''}, \quad \varepsilon'' = \lambda'' E'' - \varepsilon'$$

$$E''' = E' + 2\varepsilon'\lambda'' - E''\lambda''^2, \quad \lambda''' \prec \frac{\varepsilon'' + \sqrt{B}}{E'''}, \quad \varepsilon''' = \lambda''' E''' - \varepsilon''$$

$$E^{IV} = E'' + 2\varepsilon''\lambda''' - E'''\lambda'''^2, \quad \lambda^{IV} \prec \frac{\varepsilon''' + \sqrt{B}}{E^{IV}}, \quad \varepsilon^{IV} = \lambda^{IV} E^{IV} - \varepsilon'''$$

&c. &c. &c.

on aura

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'} = \lambda' + \frac{1}{x'}$$

$$x' = \frac{\varepsilon' + \sqrt{B}}{E''} = \lambda'' + \frac{1}{x''}$$

$$x'' = \frac{\varepsilon'' + \sqrt{B}}{E'''} = \lambda''' + \frac{1}{x'''}$$

&c.

d'où

$$x = \lambda' + \frac{1}{\lambda''} + \frac{1}{\lambda'''} + \text{&c.}$$

Quant au radical $\sqrt{B}$, il faudra toujours lui donner le même ſigne qu'on lui a ſuppoſé dans la valeur de la racine cherchée x.

On peut obſerver encore que, comme l'on a trouvé $\varepsilon'^2 + E'E'' = \varepsilon^2 + EE' = B$, on aura $E'' = \frac{B - \varepsilon'^2}{E'}$, & de même

E'''

$$E''' = \frac{B - \epsilon'''^2}{E''}, \quad E^{IV} = \frac{B - \epsilon'''^2}{E'''} \text{ &c.}$$

Ainſi on pourra, ſi on le juge plus commode, employer ces formules à la place de celles qu'on a données plus haut pour avoir les valeurs de E'', E''' &c.

(34) Maintenant je dis que la fraction continue qui exprime la valeur de x, ſera toujours néceſſairement périodique.

Pour pouvoir démontrer ce théoreme, nous commencerons par démontrer en général que, quelle que ſoit l'équation propoſée, on doit toujours néceſſairement arriver à des équations transformées dont le premier & le dernier terme ſoient de ſignes différents. En effet, nous avons vu *dans l'art.* 19. *du Mém. ſur la réſol. des équat. num.* qu'on doit toujours néceſſairement arriver à une équation transformée qui n'ait qu'une ſeule racine plus grande que l'unité, après quoi chacune des transformées ſuivantes n'aura auſſi qu'une ſeule racine plus grande que l'unité; ſoit donc

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \text{&c.} + k = 0,$$

une de ces transformées qui n'ont qu'une ſeule racine plus grande que l'unité, & ſoit s la valeur entiere approchée de u, on fera, pour avoir la transformée ſuivante, $u = s + \frac{1}{w}$ ce qui étant ſubſtitué, donnera cette transformée, dans laquelle il eſt aiſé de voir que le premier terme ſera

$$(as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \text{&c.} + k)\, w^m$$

& que le dernier ſera a. Or, puiſque la vraie valeur de u dans la transformée précédente tombe entre ces deux-ci $u = s$ & $u = \infty$, entre leſquelles il ne ſe trouve aucune autre valeur de u (hyp.), il s'enſuit qu'en faiſant ces deux ſubſtitutions dans l'équation en u, on aura néceſſairement des réſultats de ſigne contraire; car il eſt facile de concevoir qu'il n'y aura en ce cas qu'un ſeul des facteurs de cette équation qui

qui pourra changer de ſigne en paſſant d'une valeur de u à l'autre (art. 5. Mém. cité). Mais la ſuppoſition de $u = \infty$ donne le réſultat au^m (tous les autres termes devenant nuls vis-à-vis de celui-ci) lequel eſt de même ſigne que le coëfficient a; donc il faudra que la ſuppoſition de $u = s$ donne un réſultat de ſigne contraire à a; mais ce réſultat eſt égal à $as^m + bs^{m-1} = cs^{m-2} +$ &c. $+ k$; donc, puiſque cette quantité eſt en même tems le coëfficient du premier terme de l'équation transformée en w, dont le dernier terme eſt a, il s'enſuit que cette transformée aura néceſſairement ſes deux termes extrêmes du même ſigne.

Et on peut prouver de la même maniere que cela aura lieu à plus forte raiſon dans toutes les transformées ſuivantes.

(35) Cela poſé, puiſque l'équation propoſée

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

donne les transformées (art. 32)

$$E''x'^2 - 2\varepsilon' x' - E' = 0$$
$$E'''x''^2 - 2\varepsilon'' x'' - E'' = 0$$
&c.

il s'enſuit de ce que nous venons de démontrer dans l'art. préc., qu'on parviendra néceſſairement à des transformées comme

$$E^{\gamma+1}(x^\gamma)^2 - 2\varepsilon^\gamma x^\gamma - E^\gamma = 0$$
$$E^{\gamma+2}(x^{\gamma+1})^2 - 2\varepsilon^{\gamma+1} x^{\gamma+1} - E^{\gamma+1} = 0$$
&c.

dont les premiers & derniers termes ſeront de mêmes ſignes; de ſorte que les nombres E^γ, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$ &c. ſeront tous de même ſigne. Or on a (art. 33) $B = (\varepsilon^\gamma)^2 + E^\gamma E^{\gamma+1} = (\varepsilon^{\gamma+1})^2 + E^{\gamma+1}E^{\gamma+2} =$ &c.; donc, puiſque E^γ, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$ &c. ſont de même ſigne, les produits $E^\gamma E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+1}E^{\gamma+2}$ &c. ſeront néceſſairement poſitifs; d'où il s'enſuit 1°. que l'on aura $(\varepsilon^\gamma)^2 < B$, $(\varepsilon^{\gamma+1})^2 < B$ &c.; c'eſt à dire

à dire (en faiſant abſtraction du ſigne) $\varepsilon^{\nu} < \sqrt{B}$, $\varepsilon^{\nu+1} < \sqrt{B}$ & ainſi de ſuite à l'infini. 2°. que l'on aura auſſi, à cauſe que les nombres E, E′, E″ &c. ſont tous entiers, $E^{\nu} < B$, $E^{\nu+1} < B$, $E^{\nu+2} < B$ & ainſi de ſuite. Donc, comme B eſt donné, il eſt clair qu'il n'y aura qu'un certain nombre de nombres entiers qui pourront être moindres que B & que $\sqrt{B}$; de ſorte que les nombres E^{ν}, $E^{\nu+1}$, $E^{\nu+2}$ &c. ε^{ν}, $\varepsilon^{\nu+1}$, $\varepsilon^{\nu+2}$ &c. ne pourront avoir qu'un certain nombre de valeurs différentes, & qu'ainſi dans l'une & l'autre de ces ſéries, ſi on les pouſſe à l'infini, il faudra néceſſairement que les mêmes termes reviennent une infinité de fois; & par la même raiſon il faudra auſſi qu'une même combinaiſon de termes correſpondans dans les deux ſéries revienne une infinité de fois; d'où il s'enſuit qu'on aura néceſſairement, par exemple,

$$E^{\nu+\delta+\nu'} = E^{\nu+\delta} \quad \& \quad \varepsilon^{\nu+\delta+\nu'} = \varepsilon^{\nu+\delta},$$

ou bien, en faiſant $\nu + \delta = \mu$, $E^{\mu+\nu'} = E^{\mu}$, & $\varepsilon^{\mu+\nu'} = \varepsilon^{\mu}$; donc, à cauſe de $B = (\varepsilon^{\mu})^2 + E^{\mu}E^{\mu+1} = (\varepsilon^{\mu+\nu'})^2 + E^{\mu+\nu'}E^{\mu+\nu'+1}$, on aura auſſi $E^{\mu+\nu'+1} = E^{\mu+1}$; mais on a

$$x^{\mu} = \frac{\varepsilon^{\mu} + \sqrt{B}}{E^{\mu+1}}, \quad \& \quad x^{\mu+\nu'} = \frac{\varepsilon^{\mu+\nu'} + \sqrt{B}}{E^{\mu+\nu'+1}},$$

donc $x^{\mu+\nu'} = x^{\mu}$; donc la fraction continue ſera néceſſairement périodique (art. 24).

(36) En effet on voit par les formules de l'art. 33. que ſi l'on a $E^{\mu+\nu'} = E^{\mu}$, & $\varepsilon^{\mu+\nu'} = \varepsilon^{\mu}$, on aura $E^{\mu+\nu'+1} = E^{\mu+1}$, $\lambda^{\mu+\nu'+1} = \lambda^{\mu+1}$, $\varepsilon^{\mu+\nu'+1} = \varepsilon^{\mu+1}$, & ainſi de ſuite, de ſorte qu'en général les termes des trois ſéries E, E′, E″ &c. ε, ε', ε'' &c. λ', λ'' &c. qui auront pour expoſant $\mu + n\nu + \pi$, ſeront les mêmes que les termes précédens dont les expoſans ſeront $\mu + \pi$, en prenant pour n un nombre quelconque entier poſitif.

Ainſi chacune de ces trois ſéries deviendra périodique à commencer par les termes E^{μ}, ε^{μ} & $\lambda^{\mu+1}$, & leurs périodes ſeront de ν

termes, après leſquels les mêmes termes reviendront dans le même ordre, à l'infini.

(37) Nous venons de démontrer qu'en continuant la ſérie des nombres E, E′, E″ &c. on doit néceſſairement trouver des termes conſécutifs qui ſoient de même ſigne, & qu'enſuite la ſérie doit néceſſairement devenir périodique; or je dis que dès que, dans la même ſérie, on ſera parvenu à deux termes conſécutifs, comme E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, qui ſoient de même ſigne, on ſera aſſuré que l'un de ces deux termes ſera déjà un des termes périodiques, lequel reparoitra néceſſairement dans chaque période.

En effet, comme E^{γ} & $E^{\gamma+1}$ ſont de même ſigne, il eſt clair que la transformée

$$E^{\gamma+1}(x^{\gamma})^2 - 2\varepsilon^{\gamma}x^{\gamma} - E^{\gamma} = 0$$

aura néceſſairement une racine poſitive & l'autre négative, de ſorte qu'elle n'en pourra avoir qu'une ſeule qui ſoit plus grande que l'unité; donc toutes les transformées ſuivantes auront néceſſairement leurs termes extremes de ſignes différens (art. 34.) par conſéquent tous les nombres E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$ &c. ſeront de mêmes ſignes, de ſorte que chacun d'eux ſera moindre que B, & que chacun des nombres ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$ &c. ſera moindre que $\sqrt{B}$ (art. 35).

(38) Or, comme on a $B = (\varepsilon^{\gamma})^2 + E^{\gamma}E^{\gamma+1}$, il eſt viſible que les nombres E^{γ}, $E^{\gamma+1}$ ſeront ou tous les deux moindres que $\sqrt{B}$, ou que ſi l'un eſt plus grand, l'autre en ſera néceſſairement moindre, de ſorte qu'il y en aura au moins toujours un qui ſera moindre que $\sqrt{B}$.

Suppoſons que ce ſoit E^{γ}, & je vais prouver que les nombres E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$ &c. ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$ &c. ſeront tous néceſſairement du même ſigne que le radical $\sqrt{B}$. En effet, puiſque les racines x', x'', x''' &c. des équations transformées doivent être toutes plus grandes que l'unité par la nature de la fraction continue, on aura donc

auſſi

auſſi $x^\gamma > 1$, $x^{\gamma+1} > 1$, & ainſi de ſuite; donc $\frac{\varepsilon^\gamma + \sqrt{B}}{E^{\gamma+1}} > 1$, $\frac{\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+2}} > 1$ &c. & comme $B = (\varepsilon^\gamma)^2 + E^\gamma E^{\gamma+1} = (\varepsilon^{\gamma+1})^2 + E^{\gamma+1}E^{\gamma+2} =$ &c. on aura $\frac{\varepsilon^\gamma + \sqrt{B}}{E^{\gamma+1}} = \frac{E^\gamma}{\sqrt{B} - \varepsilon^\gamma}$, $\frac{\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+2}} = \frac{E^{\gamma+1}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma+1}}$ & ainſi des autres; donc auſſi

$$\frac{E^\gamma}{\sqrt{B} - \varepsilon^\gamma} > 1, \quad \frac{E^{\gamma+1}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma+1}} > 1, \text{ &c.}$$

Or, comme ε^γ, $\varepsilon^{\gamma+1}$ &c. ſont plus petites que $\sqrt{B}$, il eſt clair que quel que ſoit le ſigne de ces nombres ε^γ, $\varepsilon^{\gamma+1}$ &c. les dénominateurs $\sqrt{B} - \varepsilon^\gamma$, $\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma+1}$ &c. ſeront néceſſairement du même ſigne que $\sqrt{B}$; donc il faudra que les numérateurs E^γ, $E^{\gamma+1}$ &c. ſoient auſſi tous du même ſigne que $\sqrt{B}$.

Maintenant ſuppoſons pour plus de ſimplicité $\sqrt{B}$ poſitif, en ſorte que E^γ, $E^{\gamma+1}$ &c. doivent être auſſi tous poſitifs, & je dis que ε^γ, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$ &c. le ſeront auſſi. Car, ſoit s'il eſt poſſible $\varepsilon^\gamma = -\eta$ (η étant un nombre poſitif) & comme $E^\gamma < \sqrt{B}$ (*hyp.*), on aura à plus forte raiſon $E^\gamma < \sqrt{B} + \eta$; donc $\frac{E^\gamma}{\sqrt{B} - \varepsilon^\gamma} = \frac{E^\gamma}{\sqrt{B} + \eta}$, ſera < 1, au lieu que cette quantité doit être > 1; donc ε^γ doit être poſitif. Soit enſuite, s'il eſt poſſible, $\varepsilon^{\gamma+1} = -\eta'$, & comme l'on a par les formules de l'art. 33, $\varepsilon^{\gamma+1} = \lambda^{\gamma+1}E^{\gamma+1} - \varepsilon^\gamma$, on aura $\lambda^{\gamma+1}E^{\gamma+1} = \varepsilon^\gamma - \eta'$; donc, à cauſe que ε^γ & η' ſont des nombres poſitifs moindres que $\sqrt{B}$, & que $\lambda^{\gamma+1}$ eſt auſſi un nombre entier poſitif, il eſt clair que $E^{\gamma+1}$ devra être moindre que $\sqrt{B}$; & dans ce cas on prouvera comme ci-devant que $\varepsilon^{\gamma+1}$ devra être poſitif; & ainſi de ſuite.

Si $\sqrt{B}$ étoit pris négativement, on prouveroit de la même maniere que ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$ &c. devroient être négatifs; & même, ſans faire un nouveau calcul, il n'y aura qu'à remarquer que les formules de l'art. cité demeurent les mêmes en y changeant les ſignes de toutes les quantités E, E′, E″ &c. ε, ε', ε'' &c. & du radical $\sqrt{B}$; de ſorte qu'on pourra toujours regarder ce radical comme poſitif, en prenant les quantités E, E′, E″ &c. ε, ε', ε'' &c. avec des ſignes contraires.

(39) Cela poſé, je dis que ſi deux termes correſpondans quelconques des ſuites E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$ &c. ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$ &c. ſont donnés, tous les précédens dans les mêmes ſuites ſeront néceſſairement donnés auſſi.

Suppoſons, par exemple, que $E^{\gamma+3}$ & $\varepsilon^{\gamma+3}$ ſoient donnés, (on verra aiſément que la démonſtration eſt générale, quels que ſoient les termes donnés,) & voyons quels doivent être les termes qui précedent ceux-ci, en vertu des formules de l'art. 33. & des conditions de l'art. préc. On aura d'abord

$$\varepsilon^{\gamma+3} = \lambda^{\gamma+3}E^{\gamma+3} - \varepsilon^{\gamma+2}; \quad \text{donc}$$
$$\varepsilon^{\gamma+2} = \lambda^{\gamma+3}E^{\gamma+3} - \varepsilon^{\gamma+3}$$

mais on doit avoir $\varepsilon^{\gamma+2} < \sqrt{B}$; donc il faudra que l'on ait

$$\lambda^{\gamma+3} < \frac{\varepsilon^{\gamma+3} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+3}}.$$

On aura de même

$$\varepsilon^{\gamma+1} = \lambda^{\gamma+2}E^{\gamma+2} - \varepsilon^{\gamma+2}$$

d'où, à cauſe de $\varepsilon^{\gamma+1} < \sqrt{B}$, on tirera

$$\lambda^{\gamma+2} < \frac{\varepsilon^{\gamma+2} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+2}}$$

mais il faut, par la nature de la fraction continue, que $\lambda^{\gamma+2}$ ſoit un nombre entier poſitif; donc il faudra que l'on ait $\varepsilon^{\gamma+2} + \sqrt{B} > E^{\gamma+2}$; or on a auſſi $E^{\gamma+2}E^{\gamma+3} = B - (\varepsilon^{\gamma+2})^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon^{\gamma+2})$

$\varepsilon^{\gamma+2}$) ($\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma+2}$); donc $\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma+2} < E^{\gamma+2}$; ſavoir, en mettant pour $\varepsilon^{\gamma+2}$ ſa valeur ci-deſſus, $\sqrt{B} = \lambda^{\gamma+3}E^{\gamma+3} + \varepsilon^{\gamma+3} < E^{\gamma+2}$; d'où

$$\lambda^{\gamma+3} > \frac{\varepsilon^{\gamma+3} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+3}} - 1.$$

Donc, puiſque le nombre $\lambda^{\gamma+3}$ doit être entier, il eſt clair qu'il ne pourra égal qu'au nombre entier qui ſera immédiatement plus petit que $\frac{\varepsilon^{\gamma+3} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+3}}$; ainſi $\lambda^{\gamma+3}$ ſera donné, & de là $\varepsilon^{\gamma+2}$ le ſera auſſi, & comme $E^{\gamma+2} = \frac{B - (\varepsilon^{\gamma+2})^2}{E^{\gamma+3}}$, il eſt clair que $E^{\gamma+2}$ ſera auſſi donné. Maintenant on aura

$$\varepsilon^{\gamma} = \lambda^{\gamma+1}E^{\gamma+1} - \varepsilon^{\gamma+1}$$

& par conſéquent, à cauſe de $\varepsilon^{\gamma} < \sqrt{B}$,

$$\lambda^{\gamma+1} < \frac{\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+1}}.$$

Donc, pour que $\lambda^{\gamma+1}$ ſoit entier poſitif tel qu'il doit être, il faudra que $\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B} > E^{\gamma+1}$; par conſéquent, à cauſe de $E^{\gamma+1}E^{\gamma+2} = B - (\varepsilon^{\gamma+1})^2$, il faudra que $\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma+1} < E^{\gamma+2}$, ou bien en mettant pour $\varepsilon^{\gamma+1}$ ſa valeur ci-deſſus, $\sqrt{B} - \lambda^{\gamma+2}E^{\gamma+2} + \varepsilon^{\gamma+2} < E^{\gamma+2}$; d'où l'on tire

$$\lambda^{\gamma+2} > \frac{\varepsilon^{\gamma+2} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+2}} - 1.$$

De ſorte que le nombre $\lambda^{\gamma+2}$ ne pourra être que le nombre entier qui ſera immédiatement plus petit que la quantité donnée $\frac{\varepsilon^{\gamma+2} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+2}}$; donc ce nombre ſera donné, & par là les nombres $\varepsilon^{\gamma+1}$, & $E^{\gamma+1}$ le ſeront auſſi.

Enfin, puiſque E^γ eſt (hyp.) $< \sqrt{B}$, on aura à plus forte raiſon $\varepsilon^\gamma + \sqrt{B} > E^\gamma$; & de là, à cauſe de $E^\gamma E^{\gamma+1} = B - (\varepsilon^\gamma)^2$, $\sqrt{B} - \varepsilon^\gamma < E^\gamma$, ou bien, en ſubſtituant pour ε^γ ſa valeur trouvée ci-deſſus, $\sqrt{B} - \lambda^{\gamma+1} E^{\gamma+1} + \varepsilon^{\gamma+1} < E^\gamma$; ce qui donne

$$\lambda^{\gamma+1} > \frac{\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+1}} - 1.$$

Donc le nombre $\lambda^{\gamma+1}$ ne pourra être que le nombre entier qui eſt immédiatement moindre que la quantité donnée $\frac{\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+1}}$; & par conſéquent ce nombre ſera entierement donné, & par conſéquent les nombres ε^γ & E^γ le ſeront auſſi.

(40) Or nous avons vu (art. 35.) qu'en continuant les ſéries E^γ, $E^{\gamma+1}$ &c. ε^γ, $\varepsilon^{\gamma+1}$ &c. il arrivera néceſſairement que deux termes correſpondans comme $E^{\gamma+\delta}$, $\varepsilon^{\gamma+\delta}$, reparoîtront après un certain nombre d'autres termes, en ſorte que l'on aura, par exemple,

$$E^{\gamma+\theta+\delta} = E^{\gamma+\delta}, \quad \varepsilon^{\gamma+\theta+\delta} = \varepsilon^{\gamma+\delta}.$$

Donc, par ce que nous venons de démontrer (art. préc.), on aura auſſi en remontant

$$E^{\gamma+\theta+\delta-1} = E^{\gamma+\delta-1}, \quad \varepsilon^{\gamma+\theta+\delta-1} = \varepsilon^{\gamma+\delta-1}$$
$$E^{\gamma+\theta+\delta-2} = E^{\gamma+\delta-2}, \quad \varepsilon^{\gamma+\theta+\delta-2} = \varepsilon^{\gamma+\delta-2}$$
&c. &c.
$$E^{\gamma+\theta} = E^\gamma, \quad \varepsilon^{\gamma+\theta} = \varepsilon^\gamma.$$

(41) De là je conclus en général que lorſque dans la ſérie des nombres E, E′, E″ &c. on en trouvera deux conſécutifs de même ſigne, celui des deux qui ſera moindre que $\sqrt{B}$ ſera déjà néceſſairement périodique.

Ainſi, ſi dans l'équation propoſée

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

les

les coëfficiens E & E′ étoient de même ſigne, alors la ſérie ſeroit périodique dès le premier, ou le ſecond terme.

(42) Si l'on a $\epsilon = 0$, en ſorte que $x = \sqrt{\frac{E}{E'}}$, alors on aura $B = EE'$; d'où l'on voit que des deux nombres E, E′, le plus petit ſera moindre que $\sqrt{B}$, & le plus grand ſera néceſſairement plus grand que $\sqrt{B}$; donc, dans ce cas, ſi le nombre $\frac{E}{E'}$ dont il s'agit d'extraire la racine carrée eſt plus petit que l'unité, la ſérie ſera périodique dès le premier terme E; & s'il eſt plus grand que l'unité, la période ne pourra pas commencer plus bas qu'au ſecond terme.

(43) On avoit remarqué depuis longtems que toute fraction continue périodique pouvoit toujours ſe ramener à une équation du ſecond degré, mais perſonne que je ſache n'avoit encore démontré l'inverſe de cette propoſition, ſavoir que toute racine d'une équation du ſecond degré ſe réduit toujours néceſſairement en une fraction continue périodique. Il eſt vrai que M. *Euler*, dans un excellent Mémoire imprimé au Tome XI. des nouveaux Commentaires de Pétersbourg, a obſervé que la racine carrée d'un nombre entier ſe réduiſoit toujours en une fraction continue périodique; mais ce théoreme qui n'eſt qu'un cas particulier du nôtre, n'a pas été démontré par M. *Euler*, & ne peut l'être, ce me ſemble, que par le moyen des principes que nous avons établis plus haut.

(44) Nous avons donné plus haut des formules générales pour trouver aiſément tous les termes des fractions convergentes vers la racine d'une équation donnée, lorſqu'on a reconnu que la fraction continue qui exprime cette racine eſt périodique.

Or, dans le cas où l'équation eſt du ſecond degré, & où l'on ſe ſert de la méthode de l'art. 33, on pourra ſi l'on veut ſimplifier beaucoup les calculs des art. 24. & ſuiv. pour trouver les termes l^t & L^t de chacune des fractions convergentes vers x.

En

En effet, ayant $x^{\mu} = \frac{\sqrt{B} + \varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}}$ & $x^{\mu+\pi} = \frac{\sqrt{B} + \varepsilon^{\mu+\pi}}{E^{\mu+\pi+1}}$,

où ε^{μ}, $\varepsilon^{\mu+\pi}$, $E^{\mu+1}$ & $E^{\mu+\pi+1}$ ſont connues, (π étant $< \nu$), il n'y aura qu'à ſubſtituer ces valeurs dans les deux équations de l'art. 26, & faiſant pour abréger

$$\frac{l^{\mu}\varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + l^{\mu-1} = f^{\mu}$$

$$\frac{L^{\mu}\varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + L^{\mu-1} = F^{\mu}$$

$$\frac{H'\varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + H'^{-1} = K'$$

$$H^{\pi}\varepsilon^{\mu+\pi} + H^{\pi-1}E^{\mu+\pi+1} = G^{\pi},$$

on aura

$$\left(f^{\mu} + \frac{l^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K' + \frac{H'\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{\kappa}$$
$$= l^{\varrho}\varepsilon^{\mu+\pi} + l^{\varrho-1}E^{\mu+\pi+1} + l^{\varrho}\sqrt{B}$$
$$\left(F^{\mu} + \frac{L^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K' + \frac{H'\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{\kappa}$$
$$= L^{\varrho}\varepsilon^{\mu+\pi} + L^{\varrho-1}E^{\mu+\pi+1} + L^{\varrho}\sqrt{B}$$

d'où, à cauſe de l'ambiguité du ſigne du radical $\sqrt{B}$, on tire ſur le champ

$$l^{\varrho} = \frac{\left(f^{\mu}+\frac{l^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi}+H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K'+\frac{H'\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{\kappa} - \left(f^{\mu}-\frac{l^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi}-H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K'-\frac{H'\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{\kappa}}{2\sqrt{B}}$$

$$L^{\varrho} = \frac{\left(F^{\mu}+\frac{L^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi}+H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K'+\frac{H'\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{\kappa} - \left(F^{\mu}-\frac{L^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi}-H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K'-\frac{H'\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{\kappa}}{2\sqrt{B}}$$

ϱ étant comme plus haut $= \mu + n\nu + \pi$.

(45) On peut auſſi remarquer que la valeur de L^ϱ peut ſe déterminer par le moyen de celles de l^ϱ & $l^{\varrho-1}$, ſans avoir beſoin d'un nouveau calcul.

En effet, ayant $x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'} = \frac{E}{\sqrt{B} - \varepsilon}$, & de même $x^\varrho = \frac{E^\varrho}{\sqrt{B} - \varepsilon^\varrho}$, on aura par l'équation (G) de l'art. 31,

$$\frac{E}{\sqrt{B} - \varepsilon} = \frac{l^\varrho E^\varrho + l^{\varrho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\varrho)}{L^\varrho E^\varrho + L^{\varrho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon)}$$

ſavoir

$$E(L^\varrho E^\varrho + L^{\varrho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\varrho)) = l^\varrho E^\varrho(\sqrt{B} - \varepsilon)$$
$$+ l^{\varrho-1}(B + \varepsilon\varepsilon^\varrho - (\varepsilon^\varrho + \varepsilon)\sqrt{B}),$$

de ſorte qu'en comparant la partie rationelle avec la rationelle, & l'irrationelle avec l'irrationelle, on aura

$$L^{\varrho-1} = \frac{l^\varrho E^\varrho - l^{\varrho-1}(\varepsilon^\varrho + \varepsilon)}{E} \quad \&$$

$$L^\varrho E^\varrho - L^{\varrho-1}\varepsilon^\varrho = \frac{-l^\varrho E^\varrho\varepsilon + l^{\varrho-1}(B + \varepsilon\varepsilon^\varrho)}{E}$$

d'où à cauſe de $B - (\varepsilon^\varrho)^2 = E^\varrho E^{\varrho+1}$, on aura

$$L^\varrho = \frac{l^\varrho(\varepsilon^\varrho - \varepsilon) + l^{\varrho-1}E^{\varrho+1}}{E}.$$

Or ϱ étant $= \mu + \kappa\nu + \pi$, on aura $\varepsilon^\varrho = \varepsilon^{\kappa+\pi}$, $E^{\varrho+1} = E^{\kappa+\pi+1}$; de ſorte que ε^ϱ, & $E^{\varrho+1}$ ſeront connus, quel que ſoit le quantieme ϱ.

(46) Suppoſons, pour donner un exemple de l'application des formules précédentes, qu'on demande la racine carrée de $\frac{11}{3}$ par une fraction continue.

Faiſant $x = \sqrt{\frac{11}{3}}$, on aura l'équation $3x^2 - 11 = 0$; donc (art. 32) $E = 11$, $E' = 31$, $\varepsilon = 0$; ainſi on fera (art. 33.) le calcul ſuivant, en prenant $B = 33$,

$E = 11$ $\qquad$ $\varepsilon = 0$

$E' = \frac{33-0}{11} = 3$, $\lambda' < \frac{\sqrt{33}+0}{3} = 1$, $\varepsilon' = 1.3-0 = 3$

$E'' = \frac{33-9}{3} = 8$, $\lambda'' < \frac{\sqrt{33}+3}{8} = 1$, $\varepsilon'' = 1.8-3 = 5$

$E''' = \frac{33-25}{8} = 1$, $\lambda''' < \frac{\sqrt{33}+5}{1} = 10$, $\varepsilon''' = 10.1-5 = 5$

$E^{IV} = \frac{33-25}{1} = 8$, $\lambda^{IV} < \frac{\sqrt{33}+5}{8} = 1$, $\varepsilon^{IV} = 1.8-5 = 3$

$E^{V} = \frac{33-9}{8} = 3$, $\lambda^{V} < \frac{\sqrt{33}+3}{3} = 2$, $\varepsilon^{V} = 2.3-3 = 3$.

Je m'arrête ici parce que je vois que $E^V = E'$, & $\varepsilon^V = \varepsilon'$; de ſorte que j'aurai dans ce cas $\mu = 1$, & $\nu = 4$; & par conſéquent

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \&c.}}}}}}$$

(47) Telle eſt donc la fraction continue qui exprime la valeur de $\sqrt{\frac{11}{3}}$; mais, ſi on veut trouver les fractions convergentes vers cette valeur, on fera dans les formules de l'art. 44. $\mu = 1$, $\nu = 4$, & comme π doit être < 4, on fera ſucceſſivement $\pi = 0, 1, 2, 3$.

On aura donc $l^\mu = l' =$ (form. A art. 22) $\lambda' = 1$, $l^{\mu-1} = l = 1$; $\varepsilon^\mu = \varepsilon' = 3$, $E^{\mu+1} = E'' = 8$; donc $f^\mu =$ (art. 44.) $\frac{1.3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$; on trouvera de même $L^\mu = 1$, $F^\mu = \frac{3}{8}$. Enſuite

ſuite on calculera les valeurs de H, H′ &c. juſqu'à $H^{\prime} = H^{IV}$ par les formules (C) de l'art. 25, & l'on trouvera

$$H = 0$$
$$H' = 1$$
$$H'' = \lambda'''H' = 10$$
$$H''' = \lambda^{IV}H'' + H' = 11$$
$$H^{IV} = \lambda^{V}H''' + H'' = 32.$$

D'où $H^{\prime} = 32$, $H^{\prime-1} = 11$, & de là $K^{\prime} = \frac{32.3}{3} + 11 = 23$. Maintenant ſoit 1°. $\pi = 0$, on aura $H^{\pi} = 0$, & $H^{\pi-1} = 1$, (car il eſt facile de voir par la nature des formules (C) que le terme qui précéderoit H ſeroit néceſſairement $= 1$; en effet on doit avoir par l'analogie $H' = \lambda^{\mu+1}H + H^{-1}$; on prouveroit de même que le terme qui précéderoit h ſeroit $= 0$,) donc $G^{\pi} = E^{\mu+1} = 8$. 2°. Soit $\pi = 1$, on aura $H^{\pi} = 1$, $H^{\pi-1} = 0$, donc $G^{\pi} = \varepsilon^{\mu+1} = \varepsilon'' = 5$. 3°. Soit $\pi = 2$; donc $H^{\pi} = 10$, $H^{\pi-1} = 1$, $G^{\pi} = 10\varepsilon^{\mu+2} + 1.E^{\mu+3} = 10\varepsilon''' + E^{IV} = 58$. 4°. Soit $\pi = 3$, donc $H^{\pi} = 11$, $H^{\pi-1} = 10$, & $G^{\pi} = 11\varepsilon^{IV} + 10E^{V} = 63$.

Donc, ſubſtituant ces valeurs dans les expreſſions de l^{μ} & L^{μ} de l'art. 44, & multipliant enſemble, pour plus de ſimplicité, les deux facteurs $f^{\mu} \pm \frac{l^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}$, $G^{\pi} \pm H^{\pi}\sqrt{B}$, comme auſſi les deux $F^{\mu} \pm \frac{L^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}$, $G^{\pi} \pm H^{\pi}\sqrt{B}$, ce qui donne ces facteurs ſimples

$$f^{\mu}G^{\pi} + \frac{l^{\mu}H^{\pi}B}{E^{\mu+1}} \pm \left(f^{\mu}H^{\pi} + \frac{l^{\mu}G^{\pi}}{E^{\mu+1}}\right)\sqrt{B},$$

$$F^{\mu}G^{\pi} + \frac{L^{\mu}H^{\pi}B}{E^{\mu+1}} \pm \left(F^{\mu}H^{\pi} + \frac{L^{\mu}G^{\pi}}{E^{\mu+1}}\right)\sqrt{B},$$

on aura les formules ſuivantes

$$I^{4n+1} = \frac{(11+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(11-\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}}$$

$$L^{4n+1} = \frac{(3+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(3-\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}}$$

$$I^{4n+2} = \frac{(11+2\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(11-2\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{23}}$$

$$L^{4n+2} = \frac{(6+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(6-\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}}$$

$$I^{4n+3} = \frac{(121+21\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(121-21\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}}$$

$$L^{4n+3} = \frac{(63+11\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(63-11\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}}$$

$$I^{4n+4} = \frac{(132+23\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(132-23\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}}$$

$$L^{4n+4} = \frac{(69+12\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n-(69-12\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}}$$

au moyen deſquelles on pourra trouver la valeur de chacune des fractions $\frac{I'}{L'}$, $\frac{I''}{L''}$, $\frac{I'''}{L'''}$ &c. convergentes vers la racine de $\frac{11}{3}$.

Ainſi, faiſant d'abord $n = 0$, on aura les quatre premieres fractions; faiſant enſuite $n = 1$, on aura les quatre ſuivantes & ainſi de ſuite; & ces fractions ſeront

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{21}{11},\ \frac{23}{12},\ \frac{67}{35},\ \frac{90}{47},\ \frac{667}{505},\ \frac{1057}{552}\ \text{&c.}$$

(48) Si on vouloit avoir, par exemple, le 50eme terme de cette ſérie, c'eſt à dire, la fraction $\frac{I^{50}}{L^{50}}$, il n'y auroit qu'à diviſer 50 par 4, ce qui

ce qui donne 12 de quotient & 2 de reſte; & l'on feroit $n = 12$, de ſorte qu'en développant la puiſſance $12^{\text{ème}}$ de $23 \pm 4\sqrt{33}$ & faiſant pour abréger

$$M = (23)^{12} + 66(33)(4)^2(23)^{10} + 495(33)^2(4)^4(23)^8 + 938(33)^3(4)^6(23)^6 + 495(33)^4(4)^8(23)^4 + 66(33)^5(4)^{10}(23)^2 + (33)^6(4)^{12},$$

$$N = 12(4)(23)^{11} + 220(33)(4)^3(23)^9 + 792(33)^2(4)^5(23)^7 + 792(33)^3(4)^7(23)^5 + 220(33)^4(4)^9(23)^3 + 12(33)^5(4)^{11}(23)$$

ou aura $(23 \pm 4\sqrt{33})^n = M \pm N\sqrt{33}$; donc ſubſtituant cette valeur dans les expreſſions de l^{4n+2} & L^{4n+2}, on aura, pour la fraction cherchée,

$$\frac{2M + 11N}{M + 6N}.$$

(49) Je vais terminer cette *Remarque* par une obſervation qui me paroit digne d'attention. Lorſque l'équation propoſée a des diviſeurs commenſurables du premier degré, alors les fractions continues qui repréſenteront les racines de ces diviſeurs ſeront néceſſairement terminées; & lorſque l'équation aura des diviſeurs commenſurables du ſecond degré à racines réelles, alors les fractions continues qui exprimeront les racines de ces diviſeurs ſeront néceſſairement périodiques. Ainſi la méthode des fractions continues a non ſeulement l'avantage de donner toujours les valeurs rationelles les plus approchantes qu'il eſt poſſible de la racine cherchée, mais elle a encore celui de donner tous les diviſeurs commenſurables du premier & du ſecond degré que l'équation propoſée peut renfermer. Il ſeroit à ſouhaiter que l'on pût trouver auſſi quelque caractere qui pût ſervir à faire reconnoître les diviſeurs commenſurables du troiſieme, quatrieme &c. degré, lorſqu'il y en a dans l'équation propoſée; c'eſt du moins une recherche qui me paroit très digne d'occuper les Géometres.

Remarque III.

Généraliſation de la théorie des fractions continues.

(50) Nous avons ſuppoſé dans le §. III. du *Mémoire ſur la réſolution des équations numériques*, que les nombres p, q, r &c. étoient les valeurs entieres approchées des racines x, y, z &c. mais plus petites que ces racines; c'eſt à dire, que p, q, r &c. étoient les nombres entiers immédiatement plus petits que les valeurs de x, y, z &c.; cependant il eſt clair que rien n'empêcheroit qu'on ne prît pour p, q, r &c. les nombres entiers qui ſeroient immédiatement plus grands que les racines x, y, z &c.

(51) Imaginons donc qu'on prenne pour p le nombre entier qui eſt immédiatement plus grand que x, en ſorte que $p > x$, & $p - 1 < x$, il eſt clair qu'il faudra faire dans ce cas $x = p - \frac{1}{y}$, c'eſt à dire, qu'il faudra prendre y négativement, & comme $x < p$ & $> p - 1$, on aura $\frac{1}{y} > 0$ & < 1, & par conſéquent $y > 1$ comme dans le cas ou l'on auroit pris p plus petit que x, (art. 18. du Mém. cité). Ainſi on pourra prendre de nouveau pour q, le nombre entier qui ſeroit immédiatement plus petit que y, ou celui qui ſeroit immédiatement plus grand, & l'on fera dans le premier cas $y = q + \frac{1}{z}$, & dans le ſecond $y = q - \frac{1}{z}$ & ainſi de ſuite.

De cette maniere on auroit donc

$$x = p \pm \frac{1}{y}, \quad y = q \pm \frac{1}{z}, \quad z = r \pm \frac{1}{u} \text{ &c.}$$

ce qui donneroit la fraction continue

$$x = p \pm \frac{1}{q \pm \frac{1}{r \pm \frac{1}{s}}} \text{ &c.}$$

où il

où il eſt bon de remarquer que chacun des dénominateurs q, r &c. qui ſera ſuivi d'un ſigne $-$ devra néceſſairement être $= 2$ ou > 2; car, puiſque $y > 1$, ſi on fait $y = q - \frac{1}{z}$, on aura $q - \frac{1}{z} > 1$, donc $q > 1 + \frac{1}{z}$; donc, q devant être un nombre entier ſera néceſſairement $= 2$, ou > 2; & ainſi des autres.

(52) J'obſerve maintenant que ces ſortes de fractions qui procedent ainſi par addition & par ſouſtraction, peuvent toujours facilement ſe changer en d'autres qui ne ſoient formées que par la ſimple addition.

En effet, ſuppoſons en général

$$a - \frac{1}{t} = A + \frac{1}{T}$$

a, & A devant être des nombres entiers, & t, T des nombres plus grands que l'unité; on aura donc $a - A = \frac{1}{t} + \frac{1}{T}$; donc, puiſque $\frac{1}{t} < 1$, & $\frac{1}{T} < 1$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{T}$ ſera < 2; donc on ne pourra ſuppoſer que $a - A = 1$, ce qui donne $A = a - 1$; on aura donc $a - \frac{1}{t} = a - 1 + \frac{1}{T}$; donc $\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{t}$, & $T = \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$; de ſorte qu'on aura en général

$$a - \frac{1}{t} = a - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{t-1}$$

& cette formule ſervira pour faire diſparoître tous les ſignes $-$ dans une fraction continue qnelconque.

Soit

Soit, par exemple, la fraction

$$p - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \text{ &c.}$$

elle deviendra en faiſant $a = p$, & $t = q + \frac{1}{r}$ &c.

$$p - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{r} \text{ &c.}$$

& ſi l'on avoit la fraction

$$p - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \text{ &c.}$$

elle ſe changeroit d'abord en

$$p - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{q - 1 - \frac{1}{r}} \text{ &c.}$$

& enſuite en

$$p - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{q-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{r-1} \text{ &c.}$$

& ainſi des autres fractions ſemblables. Il eſt bon de remarquer qu'il peut arriver que dans ces ſortes de transformations quelqu'un des dénominateurs devienne nul, auquel cas la fraction deviendra plus ſimple.

En effet, ſuppoſons que la fraction à réduire ſoit

$$p - \frac{1}{1} + \frac{1}{r} \text{ &c.}$$

la trans-

la transformée ſera

$$p - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{r} \text{ &c.}$$

c'eſt à dire

$$p - 1 + \frac{1}{1 + r} \text{ &c.}$$

De même, ſi l'on avoit la fraction

$$p - \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \text{ &c.}$$

elle ſe réduiroit à celle-ci

$$p - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{r - 1} \text{ &c.}$$

ſavoir

$$p - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{r - 1} \text{ &c.}$$

& ainſi du reſte.

(53) La formule que nous avons trouvée ci-deſſus, & qu'on peut mettre ſous cette forme

$$a + \frac{1}{1} + \frac{1}{t} = a + 1 - \frac{1}{t + 1}$$

fait voir qu'une fraction continue dont tous les termes ont le ſigne + peut quelquefois être ſimplifiée en y introduiſant des ſignes —; c'eſt ce qui a lieu lorſqu'il y a des dénominateurs égaux à l'unité; car ſoit, par exemple, la fraction

$$p + \frac{1}{1} + \frac{1}{r} + \text{&c.}$$

elle pourra ſe réduire par la formule précédente à celle-ci

$$p + 1 - \frac{1}{r + 1} \text{ &c.}$$

qui a, comme l'on voit, un terme de moins; donc, ſi l'on avoit la fraction

$$p + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{s} \text{ &c.}$$

elle ſe réduiroit à celle-ci

$$p + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{s} \text{ &c.}$$

& ſi l'on avoit celle-ci

$$p + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{s} \text{ &c.}$$

on la réduiroit d'abord à

$$p + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{s} \text{ &c.}$$

& enſuite à

$$p + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{s + 1} \text{ &c.}$$

D'où il eſt facile de conclure en général que, ſi on a une fraction continue qui n'ait que des ſignes $+$, & où il y ait des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra toujours la changer en une autre qui ait autant

autant de termes de moins qu'il y aura de pareils dénominateurs, pourvu qu'ils ne ſe ſuivent pas immédiatement; car, lorſqu'il y en aura deux de ſuite, on ne pourra faire diſparoître qu'un ſeul terme; lorſqu'il y en aura trois de ſuite, on pourra faire diſparoître deux termes; & en général, s'il y en a $2n$, ou $2n + 1$ de ſuite, on ne pourra faire diſparoître que n ou $n + 1$ termes.

(54) Ainſi, la fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence au diametre étant, comme l'on ſait,

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \&c.}}}}}}}}$$

elle peut ſe réduire à une autre qui ait déjà trois termes de moins & qui ſera

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 - \frac{1}{294 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 + \&c.}}}}}$$

(55) Pour pouvoir comprendre ſous une même forme générale les fractions continues où les ſignes ſont tous poſitifs, & celles où il y a des ſignes négatifs, il eſt bon de transformer ces dernieres en ſorte que les ſignes négatifs n'affectent que les dénominateurs; ce qui eſt très facile; car ayant, par exemple, la fraction

$$p - \frac{1}{q + \frac{1}{r - \frac{1}{s + \&c.}}}$$

il eſt clair qu'elle peut d'abord ſe changer en

$$p + \frac{1}{-q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} + \&c.$$

enſuite en celle-ci

$$p + \frac{1}{-q} + \frac{1}{-r} + \frac{1}{s} + \&c.$$

& ainſi des autres.

De cette maniere, la forme générale des fractions continues dont nous venons de parler ci-deſſus, ſera

$$p + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \&c.$$

les nombres p, q, r &c. étant tous entiers, mais pouvant être poſitifs, ou négatifs, au lieu que juſqu'ici nous les avions toujours ſuppoſés poſitifs.

Il faut cependant remarquer que, ſi quelqu'un des dénominateurs q, r &c. ſe trouve égal à l'unité priſe poſitivement ou négativement, alors le dénominateur ſuivant devra être de même ſigne; c'eſt ce qui ſuit de ce qu'un dénominateur poſitif, & égal à l'unité, ne ſauroit jamais être ſuivi du ſigne — (art. 51).

(56) Il s'enſuit de là que la méthode d'approximation donnée dans le §. 3. *du Mém. ſur les équat. num.* peut être généraliſée en cette ſorte.

Soit x la racine cherchée, on prendra d'abord pour p la valeur entiere approchée de x, c'eſt à dire qu'on fera p égal à l'un des deux nombres entiers entre leſquels tombe la vraie valeur de x, & qu'on peut toujours trouver par la méthode du §. 1. *du Mém. cité*; & l'on ſuppo-

ſuppoſera enſuite $x = p + \frac{1}{y}$, ce qui donnera une transformée en y qui aura néceſſairement une racine poſitive ou négative, plus grande que l'unité; on prendra de même pour q la valeur entiere approchée de y, ſoit plus grande, ou plus petite que y, & l'on fera $y = q + \frac{1}{z}$; & ainſi de ſuite.

Si l'équation en x avoit pluſieurs racines, on feroit ſur les transformées en y, en z &c. des remarques analogues à celles de *l'art.* 19. *du Mém. cité.*

(57) Ayant donc

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{z}, \quad z = r + \frac{1}{u} \text{ &c.}$$

on aura

$$x = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \text{ &c.}}}$$

où les dénominateurs q, r &c. pourront être poſitifs ou négatifs, comme nous l'avons ſuppoſé ci-deſſus; & cette fraction pourra enſuite ſe réduire, ſi l'on veut, à une autre dont les dénominateurs ſoient tous poſitifs, & qui ne contienne que des ſignes + (art. 52).

L'avantage de la méthode que nous propoſons ici conſiſte en ce qu'on eſt libre de prendre pour les nombres p, q, r &c. les nombres entiers qui ſont immédiatement plus grands ou plus petits que les racines x, y, z &c. ce qui pourra ſouvent donner lieu à des abrégés de calcul dont nous parlerons plus bas.

(58). Au reſte, ſi on vouloit avoir d'abord la fraction continue la plus courte, & par conſéquent la plus convergente qu'il fût poſſible, il faudroit prendre toujours les nombres p, q, r &c. plus petits que les racines x, y, z &c. tant que ces nombres ſeroient différens de

 l'unité,

l'unité; mais, dès que l'on en trouvera un égal à l'unité, alors il faudra augmenter le précédent d'une unité, c'eſt à dire qu'on le prendra plus grand que la racine correſpondante; cela ſuit évidemment de ce que nous avons démontré ſur ce ſujet (art. 53).

(59) Maintenant, ſi on fait comme dans l'art. 23. du *Mém. cité*

$$\begin{aligned} \alpha &= p \\ \beta &= \alpha q + 1 \\ \gamma &= \beta r + \alpha \\ \delta &= \gamma s + \beta \\ &\text{\&c.} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha' &= 1 \\ \beta' &= \alpha' q \\ \gamma' &= \beta' r + \alpha' \\ \delta' &= \gamma' s + \beta' \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

on aura, en ajoutant au commencement la fraction $\frac{1}{0}$ qui eſt plus grande que toute quantité donnée, les fractions

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} \quad \text{\&c.}$$

qui ſeront néceſſairement convergentes vers la valeur de x.

(60) Pour pouvoir juger de la nature de ces fractions nous remarquerons

1°. que l'on aura toujours

$$\begin{aligned} \alpha 0 - 1\alpha' &= -1 \\ \beta\alpha' - \alpha\beta' &= 1 \\ \gamma\beta' - \beta\gamma' &= -1 \\ \delta\gamma' - \gamma\delta' &= 1 \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

d'où l'on voit que les nombres $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ &c. n'auront aucun diviſeur commun, & que par conſéquent les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}$ &c. ſeront déjà réduites à leurs moindres termes.

2°. Que les nombres α, β, γ &c. & α', β', γ' &c. pourront être poſitifs ou négatifs, (lorſque la valeur de x eſt poſitive les deux termes

termes de chaque fraction ſeront de même ſigne, mais ils ſeront de ſignes différens lorſque la valeur de x ſera négative,) & qu'abſtraction faite de leurs ſignes ces nombres iront en augmentant.

3°. Que l'on aura, à cauſe de $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$ &c.

$$x = \frac{\alpha y + 1}{\alpha' y}$$

$$x = \frac{\beta z + \alpha}{\beta' z + \alpha'}$$

$$x = \frac{\gamma u + \beta}{\gamma' u + \beta'}$$

&c.

(61) Donc, en général, ſi π, ϱ, σ ſont trois termes conſécutifs quelconques de la ſérie α, β, γ &c., & π', ϱ', σ', les termes correſpondans de la ſérie α', β', γ' &c., en ſorte que $\frac{\pi}{\pi'}$, $\frac{\varrho}{\varrho'}$, $\frac{\sigma}{\sigma'}$ ſoient trois fractions conſécutives convergentes vers la valeur de x, on aura $\varrho\pi' - \pi\varrho' = \pm 1$, & $\sigma\varrho' - \varrho\sigma' = \mp 1$, les ſignes ſupérieurs étant pour le cas où le quantieme de la fraction $\frac{\varrho}{\varrho'}$ eſt impair, & les inférieurs pour celui où ce quantieme eſt pair, à compter depuis la premiere fraction $\frac{1}{0}$; de plus on aura (abſtraction faite des ſignes) $\varrho > \pi$, $\sigma > \varrho$, $\varrho' > \pi'$, & $\sigma' > \varrho'$; enfin, ſi on dénote par t le terme correſpondant dans la ſérie x, y, z &c. on aura rigoureuſement

$$x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}.$$

Et ſi

Et ſi k eſt la valeur entiere approchée de t, ſoit plus grande ou plus petite que t, on aura

$$\sigma = \varrho k + \pi, \qquad \sigma' = \varrho' k + \pi'.$$

(62) Cela poſé, conſidérons la fraction $\frac{\varrho}{\varrho'}$ & voyons de combien elle differe de la vraie valeur de x; pour cela nous aurons $x - \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'} - \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\varrho'\pi - \varrho\pi'}{\varrho'(\varrho' t + \pi')} = \mp \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$;

donc $x = \frac{\varrho}{\varrho'} \mp \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$.

Ainſi l'erreur ſera $\mp \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$; or ſi θ, & $\theta + 1$ ſont les deux nombres entiers entre leſquels tombe la vraie valeur de t, il eſt clair que la quantité $\varrho' t + \pi'$ tombera entre ces deux $\varrho'\theta + \pi'$, & $\varrho'(\theta + 1) + \pi'$, & qu'ainſi l'erreur de la fraction $\frac{\varrho}{\varrho'}$ ſera renfermée entre ces deux limites

$$\mp \frac{1}{\varrho'(\varrho'\theta + \pi')}, \quad \& \quad \mp \frac{1}{\varrho'(\varrho'(\theta + 1) + \pi')}.$$

Or on peut prendre $k = \theta$, ou $k = \theta + 1$; de ſorte que l'on aura $\sigma' = \varrho'\theta + \pi'$, ou $= \varrho'(\theta + 1) + \pi'$; d'où je conclus que ſi, pour diſtinguer les deux cas, on nomme σ' le dénominateur de la fraction qui ſuit $\frac{\varrho}{\varrho'}$ lorſqu'on prend la valeur approchée de t en défaut, & Σ' le dénominateur de la même fraction lorſqu'on prend la valeur approchée de t en excès, l'erreur de la fraction $\frac{\varrho}{\varrho'}$ ſera néceſſairement renfermée entre ces deux limites

$$\mp \frac{1}{\varrho'\sigma'} \quad \& \quad \mp \frac{1}{\varrho'\Sigma'}.$$

(63)

(63) D'où l'on voit que l'erreur ira toujours en diminuant d'une fraction à l'autre, à cauſe que les dénominateurs ϱ', σ' ou Σ' &c. vont néceſſairement en augmentant. On voit auſſi, à cauſe de $\sigma' > \varrho'$ & $\Sigma' > \varrho'$, que l'erreur ſera toujours moindre que $\mp \frac{1}{\varrho'^2}$; c'eſt à dire que l'erreur de chaque fraction ſera moindre que l'unité diviſée par le carré du dénominateur de cette fraction. D'où il eſt facile de conclure que la fraction $\frac{\varrho}{\varrho'}$ approchera plus de la valeur de x, que ne pourroit faire aucune autre fraction quelconque qui ſeroit conçue en termes plus ſimples; car ſuppoſons que la fraction $\frac{m}{n}$ approche plus de x que la fraction $\frac{\varrho}{\varrho'}$, n étant $< \varrho'$, & comme la valeur de x eſt contenue entre $\frac{\varrho}{\varrho'}$ & $\frac{\varrho}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho'^2}$ ou entre $\frac{\varrho}{\varrho'}$ & $\frac{\varrho}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho'^2}$, il faudra que la valeur de $\frac{m}{n}$ ſoit contenue auſſi entre ces limites; donc la différence entre $\frac{\varrho}{\varrho'}$ & $\frac{m}{n}$ devra être $< \frac{1}{\varrho'^2}$; mais cette différence eſt $\frac{n\varrho - m\varrho'}{\varrho' n}$, dont le numérateur ne peut jamais être moindre que l'unité, & dont le dénominateur ſera néceſſairement plus grand que ϱ'^2 à cauſe de $\varrho' > n$; donc &c.

(64) On doit remarquer au reſte que ſi les dénominateurs α', β', γ' &c. ſont tous de même ſigne ou de ſignes alternatifs, les erreurs ſeront alternativement poſitives & négatives, de ſorte que les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ &c. ſeront alternativement plus petites & plus grandes que la véritable valeur de x, comme nous l'avons dit dans l'art. 23 du *Mém. cité*; mais cela ceſſera d'avoir lieu lorſque les nombres α', β', γ' &c.

γ' &c. ne ſeront pas deux à deux de même ſigne, ou de ſignes différens; c'eſt ce qui arrivera néceſſairement lorſque parmi les dénominateurs q, r, s &c. de la fraction continue, il y en aura de poſitifs & de négatifs, c'eſt à dire, lorſqu'on prendra les valeurs approchées de x, y, z &c. tantôt plus grandes, tantôt plus petites, que les véritables.

(65) Si, au lieu des fractions convergentes $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ &c. on aimoit mieux avoir une ſuite de termes décroiſſans, on remarqueroit que $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'\beta'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}$; & de même $\frac{\gamma}{\gamma'} - \frac{\beta}{\beta'} = -\frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}$ & ainſi de ſuite; d'où l'on tire à cauſe de $\alpha' = 1$

$$\frac{\beta}{\beta'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'}$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\gamma'\delta'}$$

& en général

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\gamma'\delta'} - \text{&c.} \pm \frac{1}{\pi'\varrho'}.$$

Ainſi on aura pour la valeur de x la ſérie $\alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} + \frac{1}{\beta'\gamma'} + \text{&c.}$ laquelle en approchera d'autant plus qu'elle ſera pouſſée plus loin; & ſi après avoir continué cette ſérie juſqu'à un terme quelconque $\pm \frac{1}{\pi'\varrho'}$ on veut ſavoir de combien elle differe encore de la véritable valeur de x, on ſera aſſuré que l'erreur ſe trouvera entre ces deux limites

mites $\mp \frac{1}{\varrho'\sigma'}$ & $\mp \frac{1}{\varrho'\Sigma'}$ (art. 62.) de ſorte qu'elle ſera néceſſairement moindre que $\frac{1}{\varrho'^2}$.

(66) Il eſt à remarquer que chaque terme de la ſérie $\alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} +$ &c. répond à chaque terme de la fraction continue $p + \frac{1}{q + \frac{1}{r +}}$ &c. d'où elle dérive; de ſorte que la ſérie dont nous parlons ſera plus ou moins convergente ſuivant que cette fraction le ſera. Or nous avons donné plus haut (art. 53.) le moyen de rendre une fraction continue la plus convergente qu'il eſt poſſible; donc on pourra avoir auſſi la ſuite la plus convergente qu'il ſoit poſſible.

(67) Ainſi, pour avoir une ſuite qui ſoit la plus convergente de toutes vers le rapport de la circonférence au diametre, on prendra la fraction continue qui exprime ce rapport, & après l'avoir ſimplifiée comme nous l'avons fait (art. 54.) on la mettra ſous la forme ſuivante (art. 55.)

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 + \frac{1}{-294 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-3 +}}}}}$$ &c.

de ſorte qu'on aura $p = 3$, $q = 7$, $r = 16$, $s = -294$ &c.; donc on trouvera (art. 59.) $\alpha' = 1$, $\beta' = 7$, $\gamma' = 7.16 + 1 = 113$, $\delta' = 113 \times -294 + 7 = -33215$, $\epsilon' = -33215 \times 3 + 113 = -99532$, $\zeta' = -99532 \times -3 - 33215 = 265371$ &c. de ſorte que la ſérie cherchée ſera

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{113.33215} - \frac{1}{33215.99532} - \frac{1}{99532.265371} \text{ &c.}$$

Remarque IV.

Où l'on propoſe différens moyens pour ſimplifier le calcul des fractions continues.

(68) Nous avons trouvé en général (art. 61.) que ſi $\frac{\pi}{\pi'}$ & $\frac{\varrho}{\varrho'}$ ſont deux fractions conſécutives convergentes vers la valeur de x, on aura $x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$; donc, ſi on ſubſtitue cette expreſſion de x, dans l'équation en x dont on cherche la racine, on aura une transformée en t qui ſera néceſſairement la même que celle qu'on auroit eue par les ſubſtitutions ſucceſſives de $p + \frac{1}{y}$ à la place de x, de $q + \frac{1}{z}$ à la place de y &c. (art. 56.); & pour avoir la fraction ſuivante $\frac{\sigma}{\sigma'}$ il faudra trouver la valeur entiere approchée de t, laquelle étant nommée k, on aura

$$\sigma = k\varrho + \pi, \qquad \sigma' = k\varrho' + \pi'.$$

De cette maniere, connoiſſant les deux premieres fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ & $\frac{\beta}{\beta'}$, qui ſont toujours $\frac{1}{0}$, & $\frac{p}{1}$ (art. 59.), on pourra trouver ſucceſſivement toutes les autres à l'aide de la ſeule équation en x.

(69)

(69) Au reſte, ſoit qu'on emploie les ſubſtitutions ſucceſſives de $p + \frac{1}{y}$ à la place de x, de $q + \frac{1}{z}$ à la place de y &c. ſoit qu'on faſſe uſage de la ſubſtitution générale de $\frac{\varphi t + \pi}{\varphi' t + \pi'}$ à la place de x, la difficulté ſe réduira toujours à trouver, dans chaque équation transformée, la valeur entiere approchée de la racine poſitive ou négative, mais toujours plus grande que l'unité, que cette équation contiendra néceſſairement (art. 56). Or, ſi la premiere valeur approchée p ne convient qu'à une ſeule racine, alors toutes les équations transformées en y, en z &c. n'auront chacune qu'une ſeule racine plus grande que l'unité; de ſorte qu'on en pourra trouver les valeurs entieres approchées de ces racines par la ſimple ſubſtitution des nombres naturels (art. 19. *du Mém. cité*). Mais, ſi le même nombre appartient à pluſieurs racines, alors les transformées auront néceſſairement pluſieurs racines plus grandes que l'unité, ſoit poſitives ou négatives, juſqu'à ce que l'on arrive a une de ces transformées qui n'ait plus qu'une pareille racine; car alors toutes les ſuivantes n'en auront plus qu'une ſeule de cette qualité, comme nous l'avons démontré dans l'art. cité.

Or, avant d'être parvenu à cette transformée, il arrivera ſouvent que la ſimple ſubſtitution des nombres naturels ne ſuffira pas pour faire trouver les valeurs entieres approchées dont on aura beſoin, parce que l'équation aura des racines qui différeront entr'elles par des quantités moindres que l'unité. Dans ce cas donc il ſemble qu'il faudroit avoir recours à la méthode générale que nous avons donnée dans le §. 1. du *même Mémoire*; mais, puiſqu'on aura déjà employé cette méthode pour trouver les premieres valeurs approchées des racines x de l'équation primitive, on pourra ſe diſpenſer de faire un nouveau calcul à chaque équation transformée; c'eſt ce qu'il eſt bon de développer.

(70) En faiſant uſage de la méthode dont nous parlons, on trouvera d'abord les limites entre leſquelles chaque racine réelle de l'équation

quation propoſée ſera renfermée, en ſorte qu'entre deux limites trouvées il n'y ait qu'une ſeule racine (art. 13. du *Mém. cité*).

Soient λ, & Λ, les limites de la racine cherchée; or l'expreſſion $x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$ donne $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$; donc la valeur de t ſera renfermée entre les limites $\frac{\pi'\lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\lambda}$, $\frac{\pi'\Lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\Lambda}$; donc, ſi ces dernieres limites different l'une de l'autre moins que de l'unité, on aura ſur le champ la valeur entiere approchée de t; mais, ſi elles different l'une de l'autre d'une quantité égale ou plus grande que l'unité, alors ce ſera une marque que la racine cherchée t différera des autres racines de l'équation transformée en t par des quantités égales ou plus grandes que l'unité; de ſorte qu'on ſera ſûr de pouvoir trouver la valeur entiere approchée de cette racine par la ſimple ſubſtitution des nombres naturels à la place de t; & la même choſe aura lieu à plus forte raiſon dans les transformées ſuivantes.

(71) La formule $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$ peut être auſſi très utile pour réduire en fraction continue toute quantité x qui ſera renfermée entre des limites données, au moins pour trouver les termes de cette fraction qui pourront être donnés par ces limites; car, nommant comme ci-deſſus λ, & Λ, les deux limites de x, on aura

$$\frac{\pi'\lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\lambda} \quad \& \quad \frac{\pi'\Lambda - \pi}{\varrho - \varrho\Lambda}$$

pour celles de t; de ſorte que, tant que la différence entre ces dernieres limites ne ſera pas plus grande que l'unité, on pourra trouver exactement la valeur entiere de t; ainſi, prenant $\frac{1}{0}$, & $\frac{p}{1}$ (p étant la valeur entiere approchée de x) pour les deux premieres fractions, on pourra pouſſer la ſuite des fractions convergentes, & par conſéquent la fraction

fraction continue juſqu'à ce que les limites dont nous parlons different entr'elles d'une quantité plus grande que l'unité; alors il faudra s'arrêter parce que les limites données λ, & Λ, ne comporteront pas une plus grande exactitude dans la valeur de x.

Par ce moyen on n'aura jamais à craindre de ſe tromper en pouſſant la fraction continue plus loin qu'on ne doit, comme cela arriveroit facilement ſi pour avoir cette fraction on ſe contentoit de prendre l'un des nombres λ, ou Λ, & d'y pratiquer la même opération dont on ſe ſert pour trouver la plus grande commune meſure, conformément à la maniere uſitée de réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

Pour pouvoir employer cette méthode en toute ſureté, il faudroit faire la même opération ſur les deux nombres λ, & Λ, & n'admettre enſuite que la partie de la fraction continue qui proviendroit également des deux opérations; mais la méthode précédente paroit plus commode & plus ſimple.

(72) Voyons maintenant d'autres moyens pour ſimplifier encore la recherche des valeurs entieres approchées dans les différentes équations transformées. Soit

$$t^n - at^{n-1} + bt^{n-2} - \&c. = 0$$

une quelconque de ces équations, dans laquelle il s'agit de trouver la valeur entiere approchée de t, que nous déſignerons en général par k; cette équation étant dérivée de l'équation propoſée en x, ſera du même degré que celle-ci, & aura par conſéquent le même nombre de racines que nous ſuppoſons égal à n.

Or nous avons trouvé en général (art. 70.) $t = \dfrac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$,

ce qui ſe réduit à $t = \dfrac{\pi'}{\varrho'} \times \dfrac{x - \dfrac{\pi}{\pi'}}{\dfrac{\varrho}{\varrho'} - x} = \dfrac{\pi'}{\varrho'} \times \left(\dfrac{\dfrac{\varrho}{\varrho'} - \dfrac{\pi}{\pi'}}{\dfrac{\varrho}{\varrho'} - x} - 1 \right)$;

mais

mais $\frac{\rho}{\rho'} - \frac{\pi}{\pi'} = \pm \frac{1}{\rho'\pi'}$, le ſigne ſupérieur étant pour le cas où le quantieme de la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ eſt pair, & l'inférieur pour celui où ce quantieme eſt impair; donc on aura

$$t = \pm \frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'} - x\right)} - \frac{\pi'}{\rho'}.$$

Donc, ſi on dénote par x la racine cherchée, & par x', x'' &c. les autres racines de l'équation en x qui ſont au nombre de n, & qu'on dénote de même par t, t', t'' &c. les valeurs correſpondantes de t, on aura

$$t = \pm \frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'} - x\right)} - \frac{\pi'}{\rho'}$$

$$t' = \pm \frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'} - x'\right)} - \frac{\pi'}{\rho'}$$

$$t'' = \pm \frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'} - x''\right)} - \frac{\pi'}{\rho'}$$

&c.

Mais on a, comme l'on ſait, $a = t + t' + t'' +$ &c.; donc ſubſtituant les valeurs de t', t'' &c. que nous venons de trouver, & qui ſont au nombre de $n - 1$, on aura

$$a = t - \frac{(n-1)\,\pi'}{\rho'} \pm \frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'''} + \text{&c.}\right)$$

Or

Or nous avons trouvé (art. 62.) $\frac{\rho}{\rho'} = x \pm \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}$, ou bien, en faiſant $\rho' t + \pi' = \psi\rho'$, $\frac{\rho}{\rho'} = x \pm \frac{1}{\psi\rho'^2}$, où l'on remarquera que $\rho' t + \pi'$ étant renfermé entre les limites σ' & Σ' qui ſont l'une & l'autre plus grandes que ρ', la quantité ψ ſera néceſſairement plus grande que l'unité. Donc, faiſant cette ſubſtitution dans la formule précédente, on aura

$$t = a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} \mp \left(\frac{1}{\rho'^2 (x - x') \pm \frac{1}{\psi}} + \frac{1}{\rho'^2 (x - x'') \pm \frac{1}{\psi}} + \text{&c.} \right)$$

Mais les quantités $x' - x'$, $x - x''$ &c. ſont données, & la quantité ρ' va toujours en augmentant; donc, puiſque la fraction $\frac{1}{\psi}$ eſt toujours moindre que l'unité, il eſt clair que chacune des quantités $\frac{1}{\rho'^2 (x - x') \pm \frac{1}{\psi}}$, $\frac{1}{\rho'^2 (x - x'') \pm \frac{1}{\psi}}$ &c. ira néceſſairement en diminuant; & que par conſéquent la ſomme de ces quantités qui ſont au nombre de $n - 1$ ira en diminuant auſſi; de ſorte qu'elle deviendra néceſſairement moindre que $\frac{1}{2}$.

Donc on parviendra néceſſairement à une équation transformée telle, que ſa racine t ſera, à $\frac{1}{2}$ près, égale à $a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'}$, ($a$ étant le coëfficient du ſecond terme pris négativement,) c'eſt à dire que cette racine ſera contenue entre les limites

$$a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} + \tfrac{1}{2} \text{ \& } a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} - \tfrac{1}{2},$$

& la même choſe aura lieu à plus forte raiſon pour toutes les transformées ſuivantes.

Donc, dès qu'on ſera venu à une pareille transformée, il n'y aura qu'à prendre le nombre entier qui approchera le plus de la quantité $a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'}$, c'eſt à dire, celui qui ſera contenu entre les mêmes limites $a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} + \frac{1}{2}$, & $a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} - \frac{1}{2}$, & ce nombre ſera néceſſairement un des deux conſécutifs entre leſquels ſe trouvera la vraie valeur de t; de ſorte qu'il pourra être pris en toute ſureté pour la valeur approchée k (art. 68). Ainſi on pourra continuer l'approximation auſſi loin qu'on voudra ſans le moindre tâtonnement.

(73) Puiſque $a = t + t' + t''$ &c., en ſubſtituant les valeurs de t, t' &c. (art. 72.) on aura

$$a = \pm \frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \text{&c.}\right) - \frac{n\pi'}{\rho'}.$$

Or ſoit

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \text{&c.} = 0$$

l'équation propoſée; qu'on faſſe le premier membre de cette équation égal à X, & il eſt facile de voir par la théorie des équations que la quantité $\frac{dX}{Xdx}$ deviendra, en y mettant $\frac{\rho}{\rho'}$ à la place de x, après la différentiation,

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \text{&c.}$$

à cauſe que x, x', x'' &c. ſont les différentes racines de l'équation $X = 0$.

Donc

Donc on aura $a = \pm \frac{dX}{\rho'^2 X dx} - \frac{n\pi'}{\rho'}$, & par conſéquent la quantité $a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'}$ deviendra $\pm \frac{dX}{\rho'^2 X dx} - \frac{\pi'}{\rho'}$.

Donc, ſi on fait

$$R = \frac{n\rho^{n-1} - (n-1)A\rho^{n-2}\rho' + (n-2)B\rho^{n-3}\rho'^2 - \&c.}{\rho^n - A\rho^{n-1}\rho' + B\rho^{n-2}\rho'^2 - \&c.}$$

la quantité dont il s'agit ſera $\frac{\pm R - \pi'}{\rho'}$; par conſéquent les limites dont nous avons parlé dans l'art. préc. ſeront

$$\frac{\pm R - \pi'}{\rho'} + \tfrac{1}{2}, \quad \& \quad \frac{\pm R - \pi'}{\rho'} - \tfrac{1}{2}.$$

Ainſi on pourra trouver ces limites indépendamment de l'équation transformée en t, & par le ſeul moyen de l'équation propoſée en x; ce qui pourra ſervir à abréger le calcul.

(74) Il reſte maintenant à voir comment on pourra reconnoître ſi la racine t eſt renfermée entre les limites dont il s'agit; or cela eſt facile dès qu'on connoit les deux nombres entiers conſécutifs θ, $\theta + 1$, entre leſquels ſe trouve cette racine: car, ſoit $\lambda + \frac{1}{2}$, & $\lambda - \frac{1}{2}$ les deux limites données, il eſt clair que, pour que t ſe trouve entre ces limites, il faudra que λ tombe entre les mêmes nombres θ, $\theta + 1$, & même plus près de celui de ces deux nombres dont t approchera davantage; on examinera donc 1°. ſi λ tombe entre θ, & $\theta + 1$; 2°. cela étant, on prendra celui de ces deux nombres dont λ approche davantage pour la valeur approchée de t, que nous nommerons k, & faiſant $t = k + \frac{1}{w}$ on verra ſi l'équation transformée en w a une racine poſitive ou négative plus grande que 1; ſi cette ſeconde condition a lieu, on ſera aſſuré que la racine t tombera réellement entre les limites

mites $\lambda + \frac{1}{2}$ & $\lambda - \frac{1}{2}$; & on pourra pourſuivre le calcul comme nous l'avons dit dans l'art. 72.

(75) On pourroit s'y prendre encore de la maniere ſuivante pour s'aſſurer ſi la racine t tombe entre les limites $\lambda + \frac{1}{2}$, & $\lambda - \frac{1}{2}$. Il eſt facile de voir par l'art. 72, que la difficulté ſe réduit à ſavoir ſi la ſomme des quantités $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''}$ &c. diviſée par ρ'^2, eſt moindre que $\frac{1}{2}$; ainſi il ne s'agira que de trouver une quantité qui ſoit plus grande que cette ſomme, & de voir enſuite ſi cette quantité eſt moindre que $\frac{\rho'^2}{2}$.

Or ſoient x, x', x'' &c. les racines réelles de l'équation propoſée, que nous ſuppoſerons au nombre de μ, & $\xi + \psi\sqrt{-1}$, $\xi - \psi\sqrt{-1}$, $\xi' + \psi'\sqrt{-1}$, $\xi' - \psi'\sqrt{-1}$ &c. les racines imaginaires que nous ſuppoſerons au nombre de 2ν, en ſorte que $\mu + 2\nu = n$; comme la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ differe de la racine x d'une quantité moindre que $\frac{1}{\rho'^2}$ (art. 63.) il eſt clair que ſi Δ eſt une quantité égale, ou moindre, que la plus petite des différences entre les racines réelles de la même équation, chacune des quantités réelles $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''}$ &c. ſera néceſſairement moindre que $\frac{1}{\Delta \pm \frac{1}{\rho'^2}}$, & par conſéquent la ſomme de ces quantités qui ſont au nombre de $\mu - 1$ ſera moindre que $\frac{\mu - 1}{\Delta \pm \frac{1}{\rho'^2}}$.

Con-

Conſidérons enſuite les quantités imaginaires, leſquelles ſeront deux à deux de la forme $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi - \psi\sqrt{-1}}$; $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi + \psi\sqrt{-1}}$, de ſorte qu'on aura ν quantités de la forme $\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi\right)^2 + \psi^2}$; or je remarque que, quels que ſoient les nombres $\frac{\varrho}{\varrho'}$, ξ, & ψ, la quantité $\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi\right)^2 + \psi^2}$, ſera toujours moindre que $\frac{1}{\psi}$; en effet, ſi on conſidere la quantité $\frac{2y}{y^2 + \psi^2}$ & qu'on faſſe, ce qui eſt toujours poſſible, $y = \psi$ tang. Φ, elle deviendra $\frac{2 \text{ ſin } \Phi \text{ cof } \Phi}{\psi} = \frac{\text{ſin } 2\Phi}{\psi}$; or la plus grande valeur de ſin 2Φ eſt l'unité; donc &c.

Donc, ſi on dénote par Π une quantité égale ou moindre que la petite des quantités ψ, ψ' &c. la quantité $\frac{\nu}{\Pi}$ ſera néceſſairement plus grande que la ſomme des quantités imaginaires dont nous parlons.

Donc, en général, la quantité $\frac{\mu - 1}{\Delta \pm \frac{1}{\varrho^2}} + \frac{\nu}{\Pi}$ ſera plus grande que la ſomme de toutes les quantités $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x''}$ &c.

Donc, ſi l'on a

$$\frac{\mu - 1}{\varrho'^2 \Delta - 1} + \frac{\nu}{\varrho'^2 \Pi} = \text{ou} < \frac{1}{2},$$

Δ & Π étant priſes poſitivement, on ſera ſûr que la racine t tombera entre les limites propoſées.

Or, pour avoir les nombres Δ & Π, lorſqu'on ne connoit pas d'avance les racines de l'équation propoſée, il n'y aura qu'à chercher dans l'équation des différences (D) de l'art. 8. du *Mém. cité*, la limite l des racines poſitives, & la limite $-h$ des racines négatives, & on pourra prendre pour Δ un nombre quelconque $=$ ou $< \frac{1}{\sqrt{l}}$, & pour Π un nombre quelconque $=$ ou $< \frac{2}{\sqrt{h}}$; cela ſuit évidemment de ce que nous avons démontré dans l'endroit cité.

(76) Si l'on avoit $\frac{\mu - 1}{\Delta - 1} + \frac{\nu}{\Pi} < \frac{1}{2}$, alors la condition requiſe auroit lieu dès le commencement de la ſérie; de ſorte qu'on pourroit approcher de la valeur de x ſans aucun tâtonnement; voici le procédé du calcul.

Ayant trouvé la premiere valeur entiere approchée de x, qu'on pourra prendre plus petite ou plus grande que x à volonté, & nommant cette valeur p, on aura les deux premieres fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{p}{1}$.

On fera donc 1°. $\pi = 1$, $\pi' = 0$, $\varrho = p$, $\varrho' = 1$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion de R (art. 73.), on prendra le nombre entier qui approchera le plus de $\frac{-R - \pi'}{\varrho'}$, c'eſt à dire, de $-R$, lequel étant nommé k, on aura la fraction $\frac{k\varrho + \pi}{k\varrho' + \pi'} = \frac{kp + 1}{k}$.

2°. On

2°. On fera $\pi = p$, $\pi' = 1$, $\varrho = kp + 1$, $\varrho' = k$, & ſubſtituant dans R, on prendra le nombre entier qui approchera le plus de $\frac{R - \pi'}{\varrho'}$, c'eſt à dire de $\frac{R - 1}{k}$, & ce nombre étant nommé k', on aura la fraction $\frac{k'\varrho + \pi}{k'\varrho' + \pi'} = \frac{k'(kp + 1) + p}{k'k + 1}$.

3°. On fera $\pi = kp + 1$, $\pi' = k$, $\varrho = k'(kp + 1) + p$, $\varrho' = k'k + 1$, & on prendra la valeur entiere la plus approchée de $\frac{-R - \pi'}{\varrho'}$ ou $\frac{-R - k}{kk' + 1}$, laquelle étant nommée k'', on aura la fraction $\frac{k''\varrho + \pi}{k''\varrho' + \pi'} =$ &c. & ainſi de ſuite.

De cette maniere la valeur de x ſera exprimée par la fraction continue

$$p + \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} + \frac{1}{k''} + \text{\&c.}$$

ou par les fractions convergentes

$$\frac{1}{0}, \frac{p}{1}, \frac{kp + 1}{k}, \frac{k'(kp + 1) + p}{k'k + 1} \quad \text{\&c.}$$

(77) Si l'on n'a pas d'abord $\frac{\mu - 1}{\Delta - 1} + \frac{\nu}{\Pi} < \frac{1}{2}$, il n'y aura qu'à chercher la fraction continue par la méthode ordinaire juſqu'à ce que l'on arrive à une fraction dont le dénominateur ϱ' ſoit tel que l'on ait $\frac{\mu - 1}{\varrho'^2\Delta - 1} + \frac{\nu}{\varrho'^2\Pi} < \frac{1}{2}$, ou bien juſqu'à ce que l'on vienne à une transformée qui ſoit dans le cas de l'art. 74; alors on pourra pourſuivre le calcul par la méthode précédente.

Au

Au reſte, comme en augmentant toutes les racines d'une équation dans une raiſon quelconque, on augmente auſſi dans la même raiſon les différences entre ces racines, il eſt clair que ſi dans l'équation propoſée on met $\frac{x}{f}$ à la place de x, ce qui en augmentera les racines en raiſon de $1 : f$, les nombres Δ & Π, qui conviendront à la nouvelle équation, en ſeront augmentés dans la même raiſon, & par conſéquent deviendront $f\Delta$, & $f\Pi$; donc on pourra faire en ſorte que la condition de l'art. 76. ſoit vérifiée en donnant à f une valeur telle que

$$\frac{\mu - 1}{f\Delta - 1} + \frac{\nu}{f\Pi} = \text{ou} < \tfrac{1}{2}.$$

Alors on pourra toujours ſe ſervir de la méthode de l'art. cité pour approcher ſans tâtonnement de la valeur cherchée de x; il faudra ſeulement diviſer enſuite cette valeur par f pour avoir la véritable racine de l'équation propoſée; il eſt vrai que, de cette maniere, on n'aura plus cette racine exprimée par une ſimple fraction continue, mais on pourra néanmoins en approcher auſſi près qu'on voudra; ce qui ſuffit pour l'uſage ordinaire.

(78) Soit l'équation propoſée

$$x^n - A = 0$$

en ſorte que l'on demande la racine $n^{\text{ème}}$ du nombre A.

Soit 1°. n pair, & $= 2m$, l'équation aura, comme l'on ſait, deux racines réelles $+\sqrt[n]{A}$ & $-\sqrt[n]{A}$, & $n - 2$ racines imaginaires qui ſeront exprimées ainſi

$$\left(\text{cof.}\frac{sc}{n} \pm \text{ſin}\frac{sc}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{A}$$

c étant la circonférence, ou l'angle de 360°, & s étant ſucceſſivement $= 1, 2, 3$ &c. juſqu'à $m - 1$; donc on aura dans ce cas (art. 75)

$\mu =$

$\mu = 2$, $\nu = m - 1$, & on pourra prendre $\Delta = 2\sqrt[n]{A}$, $\Pi = \sin\frac{c}{n} \times \sqrt[n]{A}$, à cauſe que $\sin\frac{c}{n}$ eſt le plus petit de tous les $\sin\frac{sc}{n}$; donc la condition de l'art. 76 aura lieu ſi

$$\frac{1}{2\sqrt[n]{A} - 1} + \frac{m-1}{\sin\frac{c}{n} \times \sqrt[n]{A}} = \text{ou} < \tfrac{1}{2}$$

donc elle aura lieu ſurement toutes les fois que l'on aura

$$A = \text{ou} > \left(\frac{n}{\sin\frac{360°}{n}}\right)^n.$$

Soit 2°. n impair & $= 2m + 1$, l'équation n'aura qu'une ſeule racine réelle $\sqrt[n]{A}$, & elle en aura $2m$ imaginaires de la forme

$$\left(\cos\frac{sc}{n} \pm \sin\frac{sc}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{A}$$

en faiſant ſucceſſivement $s = 1, 2$, &c. juſqu'à m; donc on aura dans ce cas $\mu = 1$, $\nu = m$, & comme le plus petit des $\sin\frac{sc}{n}$ eſt $\sin\frac{mc}{2} =$ (à cauſe de $n = 2m + 1$) $\sin\frac{180°}{n}$, on pourra prendre $\Pi = \sin\frac{180°}{n} \times \sqrt[n]{A}$; de ſorte que la condition de l'art. cité aura lieu ici ſi

$$\frac{m}{\sin\frac{180°}{n} \times \sqrt[n]{A}} = \text{ou} < \tfrac{1}{2},$$

c'eſt à dire ſi l'on a

$$A = \text{ou} > \left(\frac{n-1}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^n.$$

Donc, lorſque le nombre A ne ſera pas au deſſous des limites que nous venons de trouver, on pourra toujours, en faiſant uſage de la méthode de l'art. 76, trouver directement & ſans tâtonnement la racine $n^{ième}$ de ce nombre; & s'il eſt plus petit que ces limites, on pourra toujours le rendre plus grand en le multipliant par un nombre quelconque qui ſoit une puiſſance exacte du même expoſant n; en ſorte qu'après avoir trouvé la racine de ce nombre compoſé, il n'y aura plus qu'à la diviſer par celle de ſon multiplicateur, pour avoir la racine cherchée de A.

Au reſte, il eſt bon de remarquer que la valeur de R de l'art. 72. ſera, pour l'équation $x^n - A = 0$,

$$R = \frac{n\varrho^{n-1}}{\varrho^n - A\varrho'^n}$$

(79) Puiſque le cas de $n = 2$ peut ſe réſoudre par la méthode de la *Remarque II*, nous en ferons abſtraction ici; ſoit donc

1°. $n = 4$, on aura $\sin\frac{360^\circ}{4} = 1$; donc

$$A = \text{ou} > 4^4.$$

2°. $n = 6$, on aura $\sin\frac{360^\circ}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc

$$A = \text{ou} > 3^3.4^6.$$

3°. $n = 8$, on aura $\sin\frac{360^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc

$$A = \text{ou} > 2^4.4^8$$

& ainſi de ſuite.

De

De même, ſi on fait

1°. $n = 3$, on aura ſin $\frac{360°}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc

$$A = \text{ou} > \frac{4^3}{3\sqrt{3}}.$$

2°. $n = 5$, on aura ſin $\frac{360°}{5} = 72°$; & faiſant le calcul par les logarithmes on trouvera

$$A = \text{ou} > 1315,$$

& ainſi de ſuite.

(80) Suppoſons, par exemple, qu'on demande la racine cubique de 17; puiſque 17 eſt $> \frac{4^3}{3\sqrt{3}}$, à cauſe de $3\sqrt{3} > 4$, on pourra employer d'abord la méthode de l'art. 76. On aura donc ici à cauſe de $n = 3$ & $A = 17$ (art. 78)

$$R = \frac{3\varrho^2}{\varrho^3 - 17\varrho'^3}.$$

Or le nombre entier le plus proche de $\sqrt[3]{17}$ eſt 2, ou 3; de ſorte qu'on pourra faire à volonté $p = 2$, ou $p = 3$.

Faiſons $p = 2$, & les deux premieres fractions ſeront $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$; donc

1°. $\pi = 1$, $\pi' = 0$, $\varrho = 2$, $\varrho' = 1$, donc $R = \frac{3.4}{8-17}$ $= -\frac{4}{3}$; & le nombre entier qui approche le plus de $\frac{-R-\pi'}{\varrho'}$ $= \frac{4}{3}$ ſera 1; donc $k = 1$, ce qui donne la fraction $\frac{kp+1}{k} = \frac{3}{1}$.

2°. $\pi = 2$, $\pi' = 1$, $\varrho = 3$, $\varrho' = 1$, donc $R = \frac{8}{25}$ & $\frac{R - \pi'}{\varrho'} = \frac{17}{25}$; le nombre entier qui approche le plus de $\frac{17}{25}$ étant 2, on fera $k' = 2$, ce qui donnera la fraction $\frac{k'\varrho + \pi}{k'\varrho' + \pi'} = \frac{8}{3}$.

3°. $\pi = 3$, $\pi' = 1$, $\varrho = 8$, $\varrho' = 3$; donc $R = \frac{3 \cdot 8^2}{8^3 - 17 \cdot 3^3} = \frac{192}{313}$, & $\frac{-R - \pi'}{\varrho'} = -\frac{225}{313}$, le nombre entier qui approchera le plus de cette fraction sera -2; donc $k'' = -2$, & la fraction $\frac{k''\varrho + \pi}{k''\varrho' + \pi'}$ sera $\frac{-13}{-5}$.

4°. $\pi = 8$, $\pi' = 3$, $\varrho = -13$, $\varrho' = -5$; &c.

De cette maniere on aura les fractions convergentes vers $\sqrt[3]{17}$

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{8}{3}, \quad \frac{-13}{-5} \quad \text{&c.}$$

& la fraction continue sera

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-2 + \text{&c.}}}}$$

NOUVELLE MÉTHODE
POUR
RÉSOUDRE LES PROBLEMES INDÉTERMINÉS
EN NOMBRES ENTIERS. (*)

PAR MR. DE LA GRANGE.

La plupart des Géometres qui ont cultivé l'Analyſe de Diophante ſe ſont, à l'exemple de cet illuſtre inventeur, uniquement appliqués à éviter les valeurs irrationelles; & tout l'artifice de leurs méthodes ſe réduit à faire en ſorte que les grandeurs inconnues puiſſent ſe déterminer par des nombres commenſurables.

L'art de réſoudre ces ſortes de queſtions ne demande gueres d'autres principes que ceux de l'Analyſe ordinaire; mais ces principes deviennent inſuffiſans lorſqu'on ajoute la condition que les quantités cherchées ſoient non ſeulement commenſurables, mais encore égales à des nombres entiers.

M. *Bachet de Meziriac*, auteur d'un excellent Commentaire ſur Diophante & de différens autres ouvrages eſt, je crois, le premier qui ait tenté de ſoumettre cette condition au calcul. Ce Savant a trouvé une méthode générale pour réſoudre en nombres entiers toutes les équations du premier degré à deux ou pluſieurs inconnues, mais il ne paroit pas avoir été plus loin; & ceux qui après lui ſe ſont occupés du même objet, ont auſſi preſque tous borné leurs recherches aux équations indéterminées du premier degré; leurs efforts ſe ſont réduits à varier les méthodes qui peuvent ſervir à la réſolution de ces ſortes d'équations,

(*) Lû à l'Académie le 21 Juin 1770.

tions, & aucun, ſi j'oſe le dire, n'a donné une méthode plus directe, plus générale & plus ingénieuſe que celle de M. *Bachet*, qui ſe trouve dans ſes récréations mathématiques intitulées : *Problemes plaiſans & délectables qui ſe font par les nombres.*

Il eſt à la vérité aſſez ſurprenant que M. *de Fermat* qui s'étoit ſi longtems & avec tant de ſuccès exercé ſur la théorie des nombres entiers, n'ait pas cherché à réſoudre généralement les problemes indéterminés du ſecond degré, & des degrés ſupérieurs, comme M. *Bachet* avoit fait ceux du premier degré; on a cependant lieu de croire qu'il s'étoit auſſi appliqué à cette recherche, par le probleme qu'il propoſa comme une eſpece de défi à M. *Wallis* & a tous les Géometres Anglois, & qui conſiſtoit à trouver deux carrés entiers, dont l'un étant multiplié par un nombre entier donné non carré, & enſuite retranché de l'autre, le reſte fût égal à l'unité; car, outre que ce probleme eſt un cas particulier des équations du ſecond degré à deux inconnues, il eſt comme la clef de la réſolution générale de ces équations; mais, ſoit que M. *de Fermat* n'ait pas continué ſes recherches ſur cette matiere, ſoit qu'elles ne ſoient pas parvenues juſqu'à nous, il eſt certain qu'on n'en trouve aucune trace dans ſes ouvrages.

Il paroît même que les Géometres Anglois qui ont réſolu le probleme de M. *de Fermat*, n'ont pas connu toute l'importance dont il eſt pour la ſolution générale des problemes indéterminés du ſecond degré; du moins on ne voit pas qu'ils en ayent jamais fait uſage, & M. *Euler* eſt, ſi je ne me trompe, le premier qui ait fait voir comment à l'aide de ce probleme on peut trouver une infinité de ſolutions en nombres entiers de toute équation du ſecond degré à deux inconnues, dont on connoit déjà une ſolution.

Ce grand Géometre à qui toutes les parties des Mathématiques ſont ſi redevables, a auſſi fait des recherches pour reconnoitre *a priori* quand une équation de cette eſpece eſt ſuſceptible de quelque ſolution en nombres entiers, & il a trouvé par induction une regle qui, ſi elle étoit

étoit générale, renfermeroit un des plus beaux théoremes d'Arithmétique.

Cette regle eſt, que toute équation de la forme $A = p^2 - Bq^2$, (A & B étant des nombres entiers donnés & p, q deux indéterminées,) eſt toujours réſoluble en nombres entiers, lorſque A eſt un nombre premier de la forme $4nB + a^2$ ou $4nB + a^2 - B$, (n & a étant des nombres quelconques entiers,) ou bien, lorſque les facteurs premiers de A ſont chacun de l'une ou de l'autre de ces formes. (Voyez le premier Mémoire du Tome IX. des nouveaux Commentaires de Pétersbourg.)

M. *Euler* ne donne point la démonſtration de ce théoreme, & il avoue même qu'il n'a jamais pû la trouver; je l'ai auſſi longtems & inutilement cherchée, mais enfin je ſuis tombé par hazard ſur une équation où j'ai reconnu que la regle de M. *Euler* étoit en défaut. Cette équation eſt celle-ci: $101 = p^2 - 79q^2$, où 101 eſt un nombre premier de la forme $4nB + a^2 - B$, en faiſant $B = 79$, $a = 38$ & $n = -4$; de ſorte qu'il faudroit qu'elle fût réſoluble en nombres entiers; cependant elle ne l'eſt pas, comme on peut aiſément s'en aſſurer par notre méthode (voyez plus bas l'art. 38.)

Si on vouloit limiter le théoreme de M. *Euler* en diſant que tout nombre premier de la forme $4nB + a$ eſt auſſi de la forme $p^2 - Bq^2$, lorſque a eſt un nombre premier de la même forme $p^2 - Bq^2$, l'exemple précédent feroit voir que cette limitation ſeroit inſuffiſante; car $101 = 4nB + 733$, en faiſant $n = -2$ & $B = 79$, & 733 eſt un nombre premier de la forme $p^2 - Bq^2$, en ſuppoſant $p = 38$ & $q = 3$; or 101 n'eſt pas de la même forme $p^2 - Bq^2$.

Il réſulte de tout ce que nous venons de dire, que depuis l'Ouvrage de M. *Bachet* qui a paru en 1613 juſqu'à préſent, ou du moins juſqu'au Mémoire que je donnai l'année paſſée ſur la ſolution des problemes indéterminés du ſecond degré, la théorie de ces ſortes de problemes

blemes n'avoit pas, à proprement parler, été pouſſée au delà du premier degré.

J'ai fait voir, dans le Mémoire dont je viens de parler, comment toutes les équations du ſecond degré à deux indéterminées peuvent toujours ſe réduire à la forme très ſimple $A = p^2 - Bq^2$; enſuite j'ai donné des méthodes directes & générales pour trouver toutes les ſolutions poſſibles tant en nombres entiers qu'en nombres fractionaires de ces ſortes d'équations. La méthode pour le cas où B eſt un nombre poſitif, & où p & q doivent être des nombres entiers, laquelle fait l'objet du §. III. eſt à la vérité un peu longue & compliquée, & j'avoue même qu'elle l'eſt à un point qui la rend difficile à ſuivre; mais je crois que cette difficulté ne doit être imputée qu'à la nature de la matiere, & au grand nombre de cas auxquels il faut avoir égard quand on veut la traiter d'une maniere auſſi directe & auſſi rigoureuſe que nous l'avons fait. Cependant j'ai trouvé moyen depuis de ſimplifier beaucoup cette méthode & de l'étendre même à des équations d'un degré quelconque; c'eſt ce que je me propoſe de développer dans ce Mémoire avec le plus d'ordre & de clarté qu'il me ſera poſſible.

Comme la théorie des fractions continues eſt le fondement de la nouvelle méthode que je vais expliquer, je ſuppoſerai ici cette théorie telle que je l'ai donnée dans le *Mémoire ſur la réſolution des équations numériques*, & dans les *Additions à ce Mémoire;* & je me contenterai d'en emprunter tout ce dont j'aurai beſoin, en renvoyant pour les démonſtrations a ces autres écrits.

LEMME I.

1. Si a, b, c ſont des nombres quelconques entiers, & tels que b & c ſoient premiers entr'eux, je dis qu'on peut toujours trouver deux nombres entiers y & z tels que $a = by - cz$.

Je ſuppoſerai ici pour plus de ſimplicité que a, b, & c ſoient poſitifs; ſi l'un deux comme b étoit négatif, on pourroit toujours le regar-

regarder comme poſitif, & il n'y auroit qu'à prendre enſuite y négativement, & ainſi du reſte.

Qu'on diviſe les nombres $a + cz$ par b, en faiſant ſucceſſivement $z = 0, 1, 2, 3$ &c. juſqu'à $b - 1$, & l'on aura b reſtes dont chacun ſera différent de tous les autres; car ſi deux valeurs de z, comme z' & z'', donnoient le même reſte, il faudroit que la différence entre les deux dividendes, $a + cz'$ & $a + cz''$, ſavoir le nombre $c(z'' - z')$ fût diviſible exactement par b, ce qui ne ſe peut à cauſe que c eſt premier à b, & que z', & z'' ſont tous les deux moindres que b. Donc, puiſque les b reſtes dont il s'agit doivent être par leur nature moindres que b & différens les uns des autres, il eſt clair que ces reſtes ne peuvent être que les nombres $0, 1, 2, 3$ &c. $b - 1$; d'où il s'enſuit qu'il y aura néceſſairement une valeur de z à laquelle répondra un reſte nul, c'eſt à dire, qui ſera telle que $a + cz$ ſoit diviſible par b; donc nommant y le quotient de cette diviſion on aura $by = a + cz$; donc $a = by - cz$.

Corollaire 1.

2. Quand on aura trouvé deux valeurs correſpondantes de y, & z, qui ſatisferont à l'équation $a = by - cz$, on pourra par leur moyen en trouver une infinité d'autres; car, déſignant par p & q les valeurs trouvées, en ſorte que l'on ait $a = bp - cq$, & ſuppoſant en général $a = by - cz$, on aura $b(y - p) - c(z - q) = 0$; d'où $\frac{y-p}{z-q} = \frac{c}{b}$, & de là, à cauſe que b, & c ſont premiers entr'eux, $y - p = mc$, $z - q = mb$, & par conſéquent

$$y = p + mc, \quad z = q + mb$$

m étant un nombre entier quelconque; & il eſt facile de voir que ces expreſſions renfermeront néceſſairement toutes les valeurs poſſibles de y, & z, dans l'équation propoſée.

Corollaire 2.

3. Or, puiſque l'on peut prendre pour m un nombre quelconque entier poſitif ou négatif, on pourra toujours faire en ſorte que la valeur de y ſoit égale à un nombre poſitif ou négatif, moindre que $\frac{c}{2}$, ou que celle de z devienne égale à un nombre poſitif ou négatif, moindre que $\frac{b}{2}$. Donc, quels que ſoient les nombres a, b, c, pourvu que b & c ſoient premiers entr'eux, on pourra toujours ſatisfaire à l'équation $a = by - cz$, en prenant pour y un nombre entier poſitif ou négatif, moindre que $\frac{c}{2}$, ou pour z un nombre moindre que $\frac{b}{2}$; de ſorte que pour trouver les valeurs convenables de y, & z, il n'y aura qu'à eſſayer ſucceſſivement pour y tous les nombres entiers moindres que $\frac{c}{2}$, pris poſitivement ou négativement, ou pour z tous les nombres entiers moindres que $\frac{b}{2}$ pris auſſi poſitivement ou négativement; & ayant trouvé de cette maniere deux valeurs correſpondantes de y & de z, on pourra enſuite par les formules du Corollaire préc. trouver toutes les autres valeurs poſſibles.

Corollaire 3.

4. Soit d le plus grand commun diviſeur de a & c, (on aura $d = 1$ ſi a & c ſont premiers entr'eux,) en ſorte que $a = a'd$, $c = c'd$, a' & c' étant premiers entr'eux, il eſt clair qu'à cauſe de b premier à c (hyp.) on aura néceſſairement, dans l'équation $a = bp - cq$, p diviſible par d; donc, faiſant $p = p'd$, on aura $p + mc$ diviſible par a, ſi $p' + mc'$ eſt diviſible par a'; mais par un raiſonnement ſemblable à celui du Lemme, on peut prouver que le nombre m peut toujours être pris tel que $p' + mc'$ ſoit diviſible par a'; donc (Coroll. 1.) on pourra toujours trouver une valeur de y qui ſoit multiple de

de a; ſoit donc $y = ar$, on aura $a = abr - cz$, ou bien $a' = a'br - c'z$; donc $c'z$ ſera diviſible par a', & comme c' eſt premier à a' il faudra que z ſoit auſſi multiple de a'; faiſant donc $z = a's$, & diviſant toute l'équation par a', elle deviendra

$$1 = br - c's.$$

Ainſi il n'y aura qu'à chercher les valeurs de r, & de s, qui peuvent ſatisfaire à cette équation, & l'on aura en général

$$y = ra + mc, \quad z = sa' + mb$$

m étant un nombre quelconque entier.

PROBLEME I.

5. *Etant donnée l'équation*

$$A = Bt^n + Ct^{n-1}u + Dt^{n-2}u^2 + \&c. + Ku^n$$

que nous déſignerons par (A), *& dans laquelle on ſuppoſe que* A, B, C *&c.* K *ſoient des nombres quelconques entiers donnés, & que* t, *&* u *ſoient deux indéterminées qui puiſſent être exprimées par des nombres entiers, dont l'un* u *ſoit premier au nombre* A, *on propoſe de ramener cette équation à une autre de la même eſpece, & dans laquelle le terme tout connu ſoit l'unité.*

Puiſque t, u, & A, ſont des nombres entiers & que u & A ſont premiers entr'eux (hyp.), on peut toujours trouver par le Lemme précédent deux nombres entiers θ & y tels que l'on ait

$$t = u\theta - Ay.$$

Donc, ſubſtituant cette valeur de t dans l'équation (A), elle deviendra celle-ci

$$A = \alpha u^n - \beta A u^{n-1} y + \gamma A^2 u^{n-2} y^2 - \&c. \pm \zeta A^n y^n$$

en ſuppoſant pour abréger

$$\alpha = B\theta^n + C\theta^{n-1} + D\theta^{n-2} + \&c. + K$$

$$\beta = nB\theta^{n-1} + (n-1)C\theta^{n-2} + (n-2)D\theta^{n-3} + \text{&c.}$$

$$\gamma = \frac{n(n-1)}{2}B\theta^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C\theta^{n-3} + \text{&c.}$$

&c.

Qu'on diviſe maintenant toute cette équation par A, & l'on aura

$$1 = \frac{\alpha u^n}{A} - \beta u^{n-1}y + A\gamma u^{n-2}y^2 - \text{&c.} \pm \zeta A^{n-1}y^n$$

d'où l'on voit que la quantité $\frac{\alpha u^n}{A}$ doit être égale à un nombre entier, puiſque tous les autres termes de l'équation ſont des nombres entiers (hyp.); & qu'ainſi il faut que αu^n ſoit diviſible par A; mais u, & A ſont premiers entr'eux (hyp.), donc il faudra que α ſoit diviſible par A; donc, faiſant pour plus de ſimplicité

$$\frac{\alpha}{A} = P, \quad -\beta = Q, \quad \gamma A = R, \quad -\delta A^2 = S \text{ &c.} \quad \pm \zeta A^{n-1} = V$$

on aura la transformée ſuivante que nous déſignerons par (B)

$$1 = Pu^n + Qu^{n-1}y + Ru^{n-2}y^2 + \text{&c.} + Vy^n$$

& qui a comme l'on voit la condition demandée par le Probleme.

Corollaire 1.

6. Il eſt viſible que la quantité α n'eſt autre choſe que le ſecond membre de l'équation propoſée (A) en y faiſant $t = \theta$, & $u = 1$. De plus il réſulte du Coroll. 2. du *Lemme* que le nombre θ peut toujours être pris moindre que $\frac{A}{2}$.

Donc, pour que l'équation (A) puiſſe ſubſiſter dans les hypotheſes du Probleme, il faudra qu'en faiſant $u = 1$, on puiſſe trouver une valeur entiere de t poſitive ou négative, mais moindre que $\frac{A}{2}$ (abſtraction faite du ſigne de t & de A,) laquelle rende le ſecond mem-

membre de cette équation diviſible par le premier A. On eſſayera donc pour t tous les nombres entiers poſitifs ou négatifs, moindres que $\frac{A}{2}$, & ſi l'on n'en trouve aucun qui ait la condition requiſe, on en conclura ſur le champ qu'il eſt impoſſible que dans l'équation (A) les nombres t & u puiſſent être entiers & premiers entr'eux, & au nombre A. Mais ſi on trouve un ou pluſieurs nombres qui rempliſſent la condition preſcrite, alors on pourra prendre chacun de ces nombres pour θ, & l'on aura autant de différentes transformées (B) qu'on aura de valeurs de θ.

Corollaire 2.

7. Pour faciliter la recherche des valeurs de θ, on peut employer la méthode des différences dont nous avons déjà fait uſage dans le *Scholie* de l'art. 13. du *Mémoire ſur la réſolution des équat. num.* En effet, par cette méthode, dès qu'on aura trouvé les valeurs de la quantité α, c'eſt à dire de

$$B\theta^n + C\theta^{n-1} + D\theta^{n-2} + \&c. + K$$

lorſque $\theta = 0, 1, 2$ &c. $n - 1$, on pourra par la ſeule addition trouver les valeurs de la même quantité pour toutes les autres valeurs poſitives de θ, & même pour les valeurs négatives en continuant les mêmes ſéries du côté oppoſé (n°. 3. de l'art. cité); il faudra ſeulement obſerver que dans ce cas chaque terme d'une ſérie ſera égal à celui qui le précédera dans la même ſérie, moins celui qui ſe trouvera au deſſus de lui dans la ſérie ſupérieure. Connoiſſant donc ainſi les valeurs de α depuis $\theta = 0$ juſqu'à $\theta = \frac{A}{2}$ d'un côté & juſqu'à $\theta = \frac{-A}{2}$ de l'autre, il n'y aura plus qu'à voir quelles ſont celles qui ſont diviſibles par A, ce qu'on pourra reconnoître aiſément par les tables des diviſeurs; & les valeurs correſpondantes de θ ſeront les nombres cherchés.

Mais avant de ſe mettre à calculer les valeurs de α, il ſera à propos de ſimplifier l'expreſſion de cette quantité, en mettant à la place des coëfficiens qui ſe trouveront plus grands que A les reſtes de

leur diviſion par A; on pourra même réduire tous les coëfficiens à n'être pas plus grands que $\frac{A}{2}$; car, en général, il eſt clair que ſi la quantité α eſt diviſible par A, les coëfficiens B, C, D &c. ayant des valeurs quelconques données, elle le ſera auſſi après avoir retranché de ces coëfficiens, ou y avoir ajouté des multiples quelconques de A; ainſi on pourra mettre $B \pm mA$ à la place de B, $C \pm nA$ à la place de C, & ainſi des autres, m, n &c. étant des nombres quelconques entiers; or, quelle que ſoit la valeur de B, il eſt clair qu'on peut toujours déterminer la valeur & le ſigne du nombre m, en ſorte que $B \pm mA$ devienne moindre que $\frac{A}{2}$; il en eſt de même de $C \pm nA$ & ainſi du reſte; donc &c.

Corollaire 3.

8. Par la méthode de l'art. préc. on peut trouver facilement toutes les valeurs de θ qui peuvent rendre la quantité α diviſible par A; car tout ſe réduit à trouver celles qui ſont moindres que $\frac{A}{2}$. En effet, ſuppoſons que α ſoit diviſible par A, θ ayant une valeur quelconque donnée, il eſt clair qu'en mettant $\theta \pm mA$ à la place de θ, (m étant un nombre entier quelconque,) la valeur réſultante de α ſera encore diviſible par A; or on peut prendre le ſigne & la valeur de m tels que $\theta \pm mA$ devienne moindre que $\frac{A}{2}$, & il eſt facile de voir que cela ne peut ſe faire que d'une ſeule maniere; donc, ſi on déſigne par θ' cette valeur de $\theta \pm mA$ qui eſt moindre que $\frac{A}{2}$, on aura en général $\theta = \theta' \pm mA$. De là il eſt facile de conclure que, ſi θ', θ'', θ''' &c. ſont les valeurs de θ, tant poſitives que négatives, mais plus petites que $\frac{A}{2}$, leſquelles rendent la quantité α diviſible par A, toutes les autres valeurs poſſi-

poſſibles de θ qui pourront faire le même effet ſeront renfermées dans ces formules

$$\theta' + mA, \quad \theta'' + nA, \quad \theta''' + pA \quad \&c.$$

m, n, p &c. étant des nombres quelconques entiers, poſitifs ou négatifs.

Ainſi une équation quelcõnque de la forme

$$Ay = B\theta^n + C\theta^{n-1} + D\theta^{n-2} + \&c. + K$$

étant donnée, on pourra reconnoître ſi elle eſt réſoluble en nombres entiers, & trouver en même tems toutes les valeurs de θ & de y.

Corollaire 4.

9. Lorſque le nombre A eſt un nombre compoſé, alors, au lieu de prendre ce nombre même pour diviſeur, il ſera plus commode de prendre ſucceſſivement chacun de ſes facteurs. Car il eſt clair que la quantité α ne ſauroit être diviſible par A à moins qu'elle ne le ſoit auſſi par chacun des diviſeurs de A; ſoient donc a, b, c &c. ces diviſeurs, on eſſayera d'abord pour θ tous nombres entiers tant poſitifs que négatifs moindres que $\frac{a}{2}$, & nommant t celui, ou ceux, (s'il y en a plus d'un,) qui rendront α diviſible par a, toutes les valeurs poſſibles de θ qui pourront rendre α diviſible par a ſeront repréſentées par $t + \theta' a$, θ' étant un nombre quelconque entier poſitif ou négatif. On ſubſtituera donc $t + \theta' a$ à la place de θ dans la quantité α, & diviſant par a, ordonnant par rapport à θ', on aura une transformée que nous appellerons α', & dans laquelle θ' ſera un nombre indéterminé.

On eſſayera de nouveau pour θ' tous les nombres entiers poſitifs ou négatifs moindres que $\frac{b}{2}$, & nommant t' ceux qui rendront α' diviſible par b, on fera enſuite $\theta' = t' + \theta'' b$, ce qui donnera après avoir diviſé par b une nouvelle transformée α'', où θ'' ſera un nombre indéterminé; & ainſi de ſuite. De cette maniere on trouvera aiſé-

aiſément toutes les valeurs de θ qui pourront rendre α diviſible par a, par b, par c &c. & par conſéquent par $abc\ldots$

En effet, puiſque $t + a\theta'$ repréſente toutes les valeurs de θ qui peuvent rendre α diviſible par a, & que $t' + \theta''b$ repréſente toutes celles de θ' qui peuvent rendre α' ou $\frac{\alpha}{a}$ diviſible par b, il eſt clair que $t + at' + ab\theta''$ repréſenteront toutes les valeurs de θ qui pourront rendre α diviſible, premierement par a, & enſuite par b, c'eſt à dire diviſible par ab; donc, ſi l'on a, par exemple, $A = ab$, les valeurs de θ qui rendront α diviſible par A ſeront exprimées en général par $t + at' + A\theta''$, θ'' étant un nombre quelconque entier.

Par là on pourra trouver toutes les valeurs de θ moindres que $\frac{A}{2}$ pour leſquelles α ſera diviſible par A; car il n'y aura pour cela qu'à déterminer le nombre θ'' en ſorte que $t + at' + A\theta''$ devienne moindre que $\frac{A}{2}$, ce qui ne pourra ſe faire que d'une ſeule maniere pour chaque valeur de $t + at'$; de ſorte qu'il ne pourra y avoir qu'autant des valeurs de θ dont nous parlons qu'il y aura de différentes valeurs de $t + at'$.

Corollaire 5.

10. Si A eſt un nombre premier, il ne peut y avoir au plus que n différentes valeurs de θ moindres que $\frac{A}{2}$, & telles que α ſoit diviſible par A; & ſi A eſt un nombre compoſé dont les facteurs premiers ſoient au nombre de r, il ne pourra y avoir au plus que n^r de ces valeurs de θ.

Car, dans le premier cas, ſoit par exemple $n = 3$, en ſorte que l'expreſſion de α ſoit $B\theta^3 + C\theta^2 + D\theta + E$, B, C, D, E, n'étant point diviſibles par A, & ſuppoſons, s'il eſt poſſible, qu'il y

ait quatre valeurs de θ, que nous désignerons par $\theta, \theta', \theta'', \theta'''$, lesquelles soient positives ou négatives, mais toutes moindres que $\frac{A}{2}$, & telles que α soit divisible par A; on aura donc ces quatre valeurs de α, savoir

$$B\theta^3 + C\theta^2 + D\theta + E$$
$$B\theta'^3 + C\theta'^2 + D\theta' + E$$
$$B\theta''^3 + C\theta''^2 + D\theta'' + E$$
$$B\theta'''^3 + C\theta'''^2 + D\theta''' + E$$

lesquelles seront chacune divisible par A; donc leurs différences le seront aussi; donc les trois quantités

$$B(\theta^3 - \theta'^3) + C(\theta^2 - \theta'^2) + D(\theta - \theta')$$
$$B(\theta^3 - \theta''^3) + C(\theta^2 - \theta''^2) + D(\theta - \theta'')$$
$$B(\theta^3 - \theta'''^3) + C(\theta^2 - \theta'''^2) + D(\theta - \theta''')$$

seront chacune divisible par A; mais la premiere de ces quantités est divisible par $\theta - \theta'$, la seconde par $\theta - \theta''$, & la troisieme par $\theta - \theta'''$; donc, puisque les nombres $\theta - \theta'$, $\theta - \theta''$, $\theta - \theta'''$ sont moindres que A (hyp.) & que A est un nombre premier, il faudra que les quantités dont il s'agit soient divisibles par A, abstraction faite des facteurs $\theta - \theta'$, $\theta - \theta''$, $\theta - \theta'''$; donc, rejettant ces facteurs, c'est à dire en les faisant disparoître par la division, on aura les quantités

$$B(\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2) + C(\theta + \theta') + D$$
$$B(\theta^2 + \theta\theta'' + \theta''^2) + C(\theta + \theta'') + D$$
$$B(\theta^2 + \theta\theta''' + \theta'''^2) + C(\theta + \theta''') + D$$

qui devront être chacune divisible par A. Donc les différences de ces quantités le seront aussi; mais ces différences sont

$$B(\theta\theta' + \theta'^2 - \theta\theta'' - \theta''^2) + C(\theta' - \theta'')$$
$$B(\theta\theta' + \theta'^2 - \theta\theta''' - \theta'''^2) + C(\theta' - \theta''')$$

dont la premiere eſt diviſible par $\theta' - \theta''$, & la ſeconde par $\theta' - \theta'''$; donc, par la même raiſon que ci-deſſus, il faudra qu'elles ſoient encore diviſibles par A, après avoir été diviſées par $\theta' - \theta''$ & par $\theta' - \theta'''$; donc on aura les quantités

$$B(\theta + \theta' + \theta'') + C$$
$$B(\theta + \theta' + \theta''') + C$$

qui ſeront donc encore diviſibles par A. Donc leur différence le ſera auſſi; mais cette différence eſt comme l'on voit $B(\theta'' - \theta''')$ qui ne peut être diviſible par A à cauſe que B ne l'eſt pas, & que le nombre $\theta'' - \theta'''$ ne peut l'être, étant néceſſairement plus petit que A. Donc &c.

Il eſt viſible que cette démonſtration peut s'étendre au cas où n aura une valeur quelconque, & qu'ainſi la propoſition eſt générale.

Dans le ſecond cas, ſuppoſons que le nombre A ſoit le produit de deux nombres premiers a, b; il ne pourra y avoir, par le Corollaire précédent, plus de valeurs de θ moindres que $\frac{A}{2}$ leſquelles rendent α diviſible par A, qu'il n'y aura de différentes valeurs de $t + at'$; or, a & b étant des nombres premiers, il ne pourra y avoir au plus que n valeurs de t, & autant de t'; donc, combinant enſemble chacune des valeurs de t', il ne pourra réſulter au plus que nn valeurs différentes de $t + at'$; donc &c.

On prouvera de la même maniere que les valeurs de θ moindres que $\frac{A}{2}$ ne pourront être qu'au nombre de nnn, ou de n^3, lorſque A ſera le produit de trois nombres premiers a, b, c, & ainſi de ſuite.

LEMME II.

11. Si l'on a une équation quelconque déterminée qui ait une ou pluſieurs racines réelles, on peut toujours, par la méthode que nous

nous avons donnée dans notre Mémoire *ſur la réſolution des équations numériques*, exprimer chacune de ſes racines poſitives par une fraction continue, & déduire de là une ſuite de fractions convergentes vers la même racine, mais alternativement plus grandes & plus petites que cette racine; enſuite, ſi on inſere encore entre ces fractions *principales* autant de fractions *ſecondaires* qu'il eſt poſſible, & qu'on range dans deux claſſes ſéparées les fractions plus grandes, & les fractions plus petites que la racine cherchée, on aura deux ſéries de fractions convergentes vers cette même racine, & dont l'une commencera par $\frac{0}{1}$ & ne ſera compoſée que de fractions plus petites que la racine dont il s'agit, & dont l'autre commencera par $\frac{1}{0}$ & ſera compoſée de fractions plus grandes que la même racine.

Quant aux racines négatives, il n'y aura qu'à les rendre d'abord poſitives en changeant dans l'équation l'inconnue x en $-x$.

Soit a une des racines poſitives de l'équation donnée, on trouvera la fraction continue

$$a = \lambda' + \frac{1}{\lambda''} + \frac{1}{\lambda'''} + \text{&c.}$$

λ', λ'', λ''' &c. étant des nombres entiers poſitifs; or, ces nombres étant ainſi connus, on fera

$$\begin{array}{ll} l' = \lambda' & L' = 1 \\ l'' = \lambda''l' + 1 & L'' = \lambda'' \\ l''' = \lambda'''l'' + l' & L''' = \lambda'''L'' + L' \\ l^{IV} = \lambda^{IV}l''' + l'' & L^{IV} = \lambda^{IV}L''' + L'' \\ \text{&c.} & \text{&c.} \end{array}$$

& l'on aura cette ſuite de fractions *principales* convergentes vers a, & alternativement plus petites & plus grandes que a,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{l'}{L'}, \frac{l''}{L''}, \frac{l'''}{L'''}, \frac{l^{IV}}{L^{IV}} \text{ &c.}$$

que nous déſignerons par (C).

De plus, on ſubſtituera ſucceſſivement dans les expreſſions de l', L', l'', L'' &c. à la place des nombres λ', λ'' &c. tous les nombres entiers poſitifs moindres que ceux-ci, & faiſant pour abréger

$$l' = \lambda' \qquad L' = 1$$
$$l'_1 = l' + 1 \qquad L'_1 = L'$$
$$l'_2 = 2l' + 1 \qquad L'_2 = 2L'$$
$$l'_3 = 3l' + 1 \qquad L'_3 = 3L'$$
&c. &c.

$$(l'\lambda'') = \lambda''l' + 1 = l'', \quad (L'\lambda'') = \lambda''L' = L''$$
$$l''_1 = l'' + l' \qquad L''_1 = L'' + L'$$
$$l''_2 = 2l'' + l' \qquad L''_2 = 2L'' + L'$$
$$l''_3 = 3l'' + l' \qquad L''_3 = 3L'' + L'$$
&c. &c.

$$(l''\lambda''') = \lambda'''l'' + 1\ l' = l''', \quad (L''\lambda''') = \lambda'''L'' + L' = L'''$$
$$l'''_1 = l''' + l'' \qquad L'''_1 = L''' + L''$$
$$l'''_2 = 2l''' + l'' \qquad L'''_2 = 2L''' + L''$$
$$l'''_3 = 3l''' + l'' \qquad L'''_3 = 3L''' + L''$$
&c. &c.

$$(l'''\lambda^{IV}) = \lambda^{IV}l''' + l'' = l^{IV}, \quad (L'''\lambda^{IV}) = \lambda^{IV}L''' + L''$$
&c. &c.

l'on aura ces deux ſéries de fractions convergentes vers a,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \text{ &c. } \frac{l'}{L'}, \frac{l'_1}{L'_1}, \frac{l'_2}{L'_2}, \frac{l'_3}{L'_3} \text{ &c. } \frac{l''}{L''}, \frac{l''_1}{L''_1}, \frac{l''_2}{L''_2}, \frac{l''_3}{L''_3} \text{ &c.}$$

$$\frac{1}{0}, \frac{l'_1}{L'_1}, \frac{l'_2}{L'_2}, \frac{l'_3}{L'_3} \text{ &c. } \frac{l''}{L''}, \frac{l''_1}{L''_1}, \frac{l''_2}{L''_2}, \frac{l''_3}{L''_3} \text{ &c.}$$

$$\frac{l^{IV}}{L^{IV}}, \frac{l^{IV}_1}{L^{IV}_1}, \frac{l^{IV}_2}{L^{IV}_2}, \frac{l^{IV}_3}{L^{IV}_3} \text{ &c.}$$

dont

dont la premiere que je déſignerai par (D) eſt compoſée de fractions croiſſantes, & toutes plus petites que a, & dont la ſeconde que je déſignerai par (E) eſt compoſée de fractions décroiſſantes, & toutes plus grandes que a.

Corollaire 1.

12. Il eſt facile de voir que les numérateurs & les dénominateurs des fractions de chacune des trois ſéries (C), (D), (E) vont continuellement en augmentant.

Corollaire 2.

13. Si $\frac{l^\varepsilon}{L^\varepsilon}$, $\frac{l^{\varepsilon+1}}{L^{\varepsilon+1}}$ ſont deux fractions conſécutives de la ſérie (C), on aura

$$l^{\varepsilon+1}L^\varepsilon - L^{\varepsilon+1}l^\varepsilon = \pm 1$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas où l'expoſant ε eſt impair, c'eſt à dire, où la fraction $\frac{l^\varepsilon}{L^\varepsilon}$ eſt plus petite que a, & le ſigne inférieur pour le cas oppoſé; d'où il s'enſuit

1°. que chaque fraction $\frac{l^\varepsilon}{L^\varepsilon}$ eſt déjà réduite à ſes moindres termes; car autrement il faudroit que l'unité fût diviſible par la plus grande, comme meſure de l^ε & L^ε.

2°. Qu'il eſt impoſſible qu'entre les deux fractions $\frac{l^\varepsilon}{L^\varepsilon}$, $\frac{l^{\varepsilon+1}}{L^{\varepsilon+1}}$, il puiſſe tomber une autre fraction rationelle quelconque dont le dénominateur ſoit moindre que $L^{\varepsilon+1}$; car, ſoit s'il eſt poſſible $\frac{h}{H}$ cette fraction; & il faudra que l'on ait ou $\frac{l^\varepsilon}{L^\varepsilon} - \frac{h}{H} < \frac{l^\varepsilon}{L^\varepsilon} - \frac{l^{\varepsilon+1}}{L^{\varepsilon+1}}$, lorſque

que ϱ eſt pair, ou $\frac{h}{H} - \frac{l^\varrho}{L^\varrho} < \frac{l^{\varrho+1}}{L^{\varrho+1}} - \frac{l^\varrho}{L^\varrho}$ lorſque ϱ eſt impair, c'eſt à dire, dans le premier cas $l^\varrho H - L^\varrho h < \frac{H}{L^{\varrho+1}}(l^\varrho L^{\varrho+1} - L^\varrho l^{\varrho+1}) < \frac{H}{L^{\varrho+1}}$, & dans le ſecond $L^\varrho h - l^\varrho H < \frac{H}{L^{\varrho+1}}(l^{\varrho+1} L^\varrho - L^{\varrho+1} l^\varrho) < \frac{H}{L^{\varrho+1}}$, ce qui ne ſe peut à cauſe que $l^\varrho H - L^\varrho h$ dans le premier cas, & $L^\varrho h - l^\varrho H$ dans le ſecond, eſt néceſſairement un nombre entier poſitif, & que $\frac{H}{L^{\varrho+1}}$ eſt toujours une fraction (hyp.).

3°. Que comme la racine a tombe entre les deux fractions $\frac{l^\varrho}{L^\varrho}$, $\frac{l^{\varrho+1}}{L^{\varrho+1}}$, mais plus près de $\frac{l^{\varrho+1}}{L^{\varrho+1}}$ que de $\frac{l^\varrho}{L^\varrho}$, toute fraction, comme $\frac{h}{H}$, qui aura un dénominateur H moindre que $L^{\varrho+1}$, approchera toujours moins de la racine a que la fraction $\frac{l^{\varrho+1}}{L^{\varrho+1}}$, & même moins que la fraction $\frac{l^\varrho}{L^\varrho}$ ſi cette fraction eſt du même côté de a que la fraction $\frac{h}{H}$, c'eſt à dire, ſi l'une & l'autre ſont en même tems plus grandes ou plus petites que a.

Corollaire 3.

14. Si $\frac{e}{E}$, $\frac{f}{F}$ déſignent deux fractions conſécutives quelconques de la ſérie (D), ou (E), on aura en général par les formules du Lemme préc.

$$e = l^\varrho + m l^{\varrho+1}, \quad E = L^\varrho + m L^{\varrho+1}$$
$$f = l^\varrho + (m+1) l^{\varrho+1}, \quad F = L^\varrho + (m+1) L^{\varrho+1}$$

l'ex-

l'expoſant ϱ étant toujours impair dans la ſérie (F) où les fractions ſont moindres que a, & toujours pair dans la ſérie (G) où elles ſont plus grandes que a.

Ainſi on aura dans la ſérie (D)

$$fL^{\varrho+1} - FI^{\varrho+1} = 1$$
$$fE - Fe = 1$$

& dans la ſérie (E)

$$fL^{\varrho+1} - FI^{\varrho+1} = -1$$
$$fE - Fe = -1$$

d'où il eſt aiſé de conclure par un raiſonnement ſemblable à celui du Coroll. préc.

1°. Que toutes les fractions tant de la ſérie (D) que de la ſérie (E) ſeront auſſi réduites à leurs moindres termes.

2°. Qu'il n'y a aucune fraction rationelle, qui ayant un dénominateur moindre que F, puiſſe tomber ſoit entre les fractions $\frac{f}{F}$, $\frac{I^{\varrho+1}}{L^{\varrho+1}}$, ſoit entre celles-ci $\frac{f}{F}$, $\frac{e}{E}$.

3°. Que, comme les fractions $\frac{f}{F}$, $\frac{I^{\varrho+1}}{L^{\varrho+1}}$ ſont toujours l'une plus grande & l'autre plus petite que a, & que les fractions $\frac{f}{F}$, $\frac{e}{E}$ ſont toutes deux ou plus grandes ou plus petites que a, toute fraction rationelle qui aura un dénominateur moindre que F, & qui tombera du même côté de a que les fractions $\frac{e}{E}$, $\frac{f}{F}$, ſera néceſſairement moins approchante de a que la fraction $\frac{e}{E}$.

Scholie.

15. Si la racine a eſt incommenſurable, la fraction continue ira à l'infini, & par conſéquent les ſéries (C), (D), (E) iront auſſi à l'infini; mais, ſi la racine a eſt rationelle, alors la fraction continue ſera terminée, & la ſuite des fractions *principales* (C) le ſera auſſi, de ſorte que la derniere de ces fractions ſera égale à la valeur même de la racine a; or ce cas a lieu lorſque quelqu'un des dénominateurs λ'', λ''' &c. devient infini (art. 21 du Mém. *ſur la réſol. des équat. num.*); ſuppoſons donc en général que l'on ait trouvé $\lambda^{\mu} = \infty$, en ſorte que le dénominateur précédent $\lambda^{\mu-1}$ ſoit la racine exacte de la transformée d'où il dépend, & la fraction $\frac{l^{\mu-1}}{L^{\mu-1}}$ ſera la derniere de la ſuite des fractions *principales* (C), de ſorte que cette même fraction ſera égale à la racine a; or il eſt facile de voir que, ſi $\mu - 1$ eſt un nombre impair, la fraction $\frac{l^{\mu-1}}{L^{\mu-1}}$ ſe trouvera dans la ſérie (D), & ſera par conſéquent la derniere de cette ſérie, & qu'à cauſe de $\lambda^{\mu} = \infty$ la ſérie (E) ira néceſſairement à l'infini; *vice verſa*, ſi $\mu - 1$ eſt pair, la ſérie (E) ſe terminera dans la fraction $\frac{l^{\mu-1}}{L^{\mu-1}}$ & la ſérie (D) ira à l'infini; de ſorte que des deux ſéries (D) & (E) il y en aura toujours une qui ira à l'infini & l'autre qui ſe terminera dans la fraction $\frac{l^{\mu-1}}{L^{\mu-1}}$; or on peut auſſi faire en ſorte que celle-ci aille à l'infini; pour cela il n'y aura qu'à diminuer le nombre $\lambda^{\mu-1}$ d'une unité, enſuite faire $\lambda^{\mu} = 1$, & $\lambda^{\mu+1} = \infty$; car il eſt viſible que $\lambda^{\mu-1} + \frac{1}{\infty}$ eſt la même choſe que $\lambda^{\mu-1} - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\infty}$; par ce moyen la fraction continue ſera augmentée d'un terme, de ſorte que la derniere

des

des fractions principales ſera $\frac{l^{\mu}}{L^{\mu}}$. Ainſi, ſi l'expoſant de la derniere fraction eſt pair, il deviendra impair & *vice verſa*; d'où il ſuit que par ce moyen celle des deux ſuites (D) & (E) qui étoit terminée, deviendra néceſſairement infinie. Il ſemble qu'il pourroit y avoir quelque difficulté dans le cas où $\lambda^{\mu-1}$ ſeroit égal à l'unité; mais dans ce cas il arrivera que deux termes de la fraction continue diſparoitront en même tems, de ſorte que le nombre des termes continuera à être pair, ou impair, comme ſi $\lambda^{\mu-1} - 1$ n'étoit pas nul; en effet, ſi on conſidere la fraction continue $\frac{1}{\lambda^{\mu-2}+\frac{1}{\lambda^{\mu-1}-1+\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}}}$ & qu'on ſuppoſe que $\lambda^{\mu-1} - 1 = 0$, elle deviendra $\frac{1}{\lambda^{\mu-2}+1+\frac{1}{\infty}}$ de ſorte qu'au lieu qu'il y avoit quatre dénominateurs, il n'y en aura plus que deux. Au reſte il eſt facile de ſe convaincre avec un peu de réflexion que, lorſque la fraction continue eſt terminée, le dernier dénominateur $\lambda^{\mu-1}$ ſera toujours différent de l'unité.

De là nous pouvons conclure que les deux ſuites de fractions (D) & (E) peuvent toujours être ſuppoſées aller à l'infini, de ſorte que tant les numérateurs que les dénominateurs de ces fractions formeront des ſuites de nombres commençans par 0, ou par 1, & allant en augmentant à l'infini.

PROBLEME 2.

16. *On propoſe de trouver tous les nombres entiers* u *&* y *qui peuvent ſatisfaire à l'équation*

$$Pu^n + Qu^{n-1}y + Ru^{n-2}y^2 + \&c. + Vy^n = 1$$

que nous déſignerons par (F), *& dans laquelle nous ſuppoſons que* P, Q, R *&c.* V *ſoient des nombres entiers donnés.*

Il eſt d'abord évident que l'équation ne ſauroit ſubſiſter dans l'hypotheſe que u & y ſoient entiers, ſi les nombres donnés P, Q, R &c. avoient un commun diviſeur autre que l'unité; car alors, le premier membre étant tout diviſible par ce commun diviſeur, il faudroit que le ſecond le fût auſſi, ce qui ne ſe peut.

Par la même raiſon on voit auſſi que les nombres u & y doivent être premiers entr'eux; autrement tout le premier membre de l'équation ſeroit diviſible par leur plus grande commune meſure, élevée à la puiſſance n, & par conſéquent il ne ſauroit être égal à l'unité.

Cela poſé, ſoient donc u, & y deux nombres entiers premiers entr'eux qui ſatisfaſſent à l'équation (F); diviſant cette équation par y^n & faiſant $x = \frac{u}{y}$, on aura celle-ci

$$Px^n + Qx^{n-1} + Rx^{n-2} + \text{&c.} + V = \frac{1}{y^n}$$

que nous déſignerons par (G).

Donc, ſi on conſidere en général l'équation à deux variables

$$Px^n + Qx^{n-1} + Rx^{n-2} + \text{&c.} + V = z$$

que nous déſignerons par (H) & qui repréſente, comme l'on voit, une courbe parabolique dont x eſt l'abſciſſe, & z l'ordonnée, il faudra qu'en faiſant $x = \frac{u}{y}$ on ait $z = \frac{1}{y^n}$, c'eſt à dire qu'à l'abſciſſe $\frac{u}{y}$ il réponde une ordonnée égale à $\frac{1}{y^n}$. Or, ſi cette ordonnée n'eſt pas un *minimum*, il eſt viſible que d'un côté ou de l'autre la courbe ira néceſſairement s'approchant de l'axe juſqu'à ce qu'elle parvienne à un point d'interſection avec l'axe, ou de *minimum*; ſoit donc a l'abſciſſe qui répondra à ce point, & toutes les ordonnées qui répondront à des abſciſſes compriſes entre ces deux-ci $\frac{u}{y}$ & a, auront néceſſairement

des

des valeurs moindres que $\frac{1}{y^n}$ & de même ſigne que $\frac{1}{y^n}$, c'eſt à dire des valeurs qui tomberont entre o & $\frac{1}{y^n}$; de ſorte que, lorſque z aura une valeur plus grande que $\frac{1}{y^n}$, ou de ſigne différent, c'eſt à dire, une valeur qui ne tombe pas entre $\frac{1}{y^n}$ & o, on ſera ſûr que l'abſciſſe correſpondante x ne pourra pas tomber entre $\frac{u}{y}$ & a.

Maintenant, comme la ſuppoſition de $x = a$ doit répondre à $z = o$, ou à $z =$ à un *minimum*, il eſt clair que a ne pourra être qu'une des racines de l'équation $z = o$, ſavoir

$$Px^n + Qx^{n-1} + Rx^{n-2} + \&c. + V = o$$

ou de l'équation $\frac{dz}{dx} = o$, ſavoir

$$nPx^{n-1} + (n-1)Qx^{n-2} + (n-2)Rx^{n-3} + \&c. = o$$

de ſorte qu'on pourra trouver toutes les valeurs de a.

Je ſuppoſe ici que la racine a ſoit poſitive; ſi elle étoit négative, on commenceroit par la rendre poſitive en changeant les ſignes des termes, qui renfermeroient des puiſſances impaires de x; & pour cela il n'y auroit qu'à mettre dans l'équation propoſée (F) $-u$ à la place de u, c'eſt à dire prendre u avec un ſigne contraire.

On pourra donc trouver par le Lemme précédent deux ſuites infinies de fractions telles que (D) & (E) qui convergent vers a, & qui aient les propriétés que nous avons expoſées; or je dis que la fraction $\frac{u}{y}$ ſera néceſſairement une de ces mêmes fractions.

Je vais démontrer d'abord que la fraction $\frac{u}{y}$ doit être de même ſigne que la racine a. Comme cette racine eſt poſitive (hyp.), ſi la fraction $\frac{u}{y}$ eſt négative, il eſt clair que la fraction $\frac{0}{1}$ approchera plus de la racine a que ne fera la fraction $\frac{u}{y}$; donc, puiſque $\frac{0}{1}$ tombe entre $\frac{u}{y}$ & a, ſi dans l'équation (H) on fait $x = \frac{0}{1}$, il faudra que la valeur correſpondante de z tombe entre $\frac{1}{y^n}$ & 0; mais, en faiſant $x = 0$, on a $z = V$; donc, puiſque V eſt un nombre entier (hyp.), il eſt impoſſible qu'il puiſſe tomber entre 0 & $\frac{1}{y^n}$; donc &c.

Je démontrerai maintenant que la fraction $\frac{u}{y}$ doit être une de celles de la ſérie (D) ou (E). Comme la fraction $\frac{u}{y}$ peut être plus petite ou plus grande que la racine a, ſuppoſons d'abord le premier cas en ſorte que l'on ait $\frac{u}{y} < a$; & je dis que $\frac{u}{y}$ ſera néceſſairement une des fractions de la ſérie (D). Pour cela nous remarquerons que comme cette ſérie va à l'infini, & que les dénominateurs des fractions vont en augmentant, il faudra néceſſairement que le dénominateur y coincide avec quelqu'un des dénominateurs des mêmes fractions, ou bien qu'il tombe entre deux dénominateurs conſécutifs. Soient $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$ deux fractions conſécutives de la ſérie (D), & que le nombre y tombe s'il eſt poſſible entre les deux nombres L & M, & ſubſtituant dans l'équation (H) à la place de x les fractions $\frac{u}{y}$, $\frac{l}{L}$, il

eſt

eſt clair que la premiere de ces ſubſtitutions donnera (hyp.) $z = \frac{1}{y^n}$, & que la ſeconde donnera $z = \frac{\alpha}{L^n}$, où l'on aura

$$\alpha = Pl^n + Ql^{n-1}L + Rl^{n-2}L^2 + \&c.$$

de ſorte que α ſera néceſſairement un nombre entier. Donc, à cauſe que y eſt plus grand que L, la quantité $\frac{\alpha}{L^n}$ tombera néceſſairement hors de ces limites o, $\frac{1}{y^n}$; donc auſſi $\frac{l}{L}$ tombera hors des limites a & $\frac{u}{y}$; donc, puiſque $\frac{l}{L}$ & $\frac{u}{y}$ ſont l'une & l'autre moindres que a (hyp.), il faudra néceſſairement que $\frac{u}{y}$ tombe entre $\frac{l}{L}$ & a. Mais, à cauſe que M eſt plus grand que y, la fraction $\frac{m}{M}$ approchera plus de a que la fraction $\frac{u}{y}$ (art. 14.), de ſorte que $\frac{m}{M}$ tombera néceſſairement entre $\frac{u}{y}$ & a. Donc il faudra que $\frac{u}{y}$ tombe entre les deux fractions $\frac{l}{L}$ & $\frac{m}{M}$; ce qui ne ſe peut (art. cité). Donc il eſt impoſſible que le nombre y puiſſe tomber entre deux dénominateurs conſécutifs L & M; il faudra donc que ce nombre ſoit égal à quelqu'un des mêmes dénominateurs; ſoit $y = \pm L$, & je dis qu'on aura néceſſairement $\frac{u}{y} = \frac{l}{L}$; en effet nous avons déjà vu qu'il implique contradiction que la quantité $\frac{\alpha}{L^n}$ tombe hors des limites o & $\frac{1}{y^n}$;

mais, à cauſe que a eſt un nombre entier, il eſt clair que $\frac{a}{L^n}$ ne ſauroit jamais tomber entre ces mêmes limites tant que $y = \pm L$; donc il faudra néceſſairement que l'on ait $\frac{1}{y^n} = \frac{a}{L^n}$; donc la valeur de z qui répond à $x = \frac{u}{y}$ ſera égale à celle qui répond à $x = \frac{l}{L}$ dans l'équation (H); donc les deux valeurs de x ſeront égales auſſi; donc $\frac{u}{y} = \frac{l}{L}$.

Donc, ſi la fraction $\frac{u}{y}$ eſt plus petite que la racine a, il eſt démontré qu'elle ne peut être qu'une de celles de la ſérie (D). On démontrera de la même maniere que, lorſque cette fraction ſera plus grande que la racine a, elle ſera néceſſairement une de celles de la ſérie (E); donc la fraction $\frac{u}{y}$ ſera néceſſairement une de celles des ſéries (D), (E), à moins qu'elle ne ſoit égale à a; ce qui ne peut arriver que dans le cas où a eſt la racine de l'équation $dz = 0$; car, dans le cas ou a eſt racine de l'équation $z = 0$, il eſt clair que ſi $\frac{u}{y} = a$, le ſecond membre de l'équation propoſée (F) deviendroit nul, au lieu qu'il doit être égal à l'unité.

Donc, puiſque l'on doit avoir néceſſairement $\frac{u}{y} = \frac{l}{L}$, ($\frac{l}{L}$ étant une des fractions des ſéries (D), (E), art. 11.) & que tant u & y, que l & L ſont premiers entr'eux, il s'enſuit qu'on aura en général, $u = \pm l$, $y = \pm L$, les ſignes ambigus de l & L étant à volonté, pourvu qu'on prenne à la fois les deux ſupérieurs ou les deux inférieurs.

Or

Or, comme a doit être une des racines de l'équation $z = 0$, ou une de celles de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ qui répondent à un *minimum*, il faudra chercher toutes ces racines, dont chacune fournira deux ſuites infinies de fractions telles que (D) & (E), & l'on aura par là tous les nombres entiers qui pourront être admis pour u & y; de ſorte qu'il ne reſtera plus qu'à les eſſayer ſucceſſivement pour trouver ceux qui peuvent ſatisfaire en effet à l'équation propoſée (F). Si l'on trouve des racines négatives, on les changera d'abord en poſitives, en changeant les ſignes des termes où il y aura des puiſſances impaires de x; enſuite on prendra u avec un ſigne contraire.

Corollaire I.

17. Lorſque a eſt une des racines de l'équation $z = 0$, on peut trouver les valeurs de u, & de y, par la même opération qui ſert à trouver la fraction continue qui exprime la racine a. En effet, nous avons vu que, pour trouver cette fraction, il faut d'abord chercher le nombre entier poſitif λ' qui eſt immédiatement moindre que la racine a que nous ſuppoſons poſitive; enſuite on fait $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$, & ſubſtituant cette valeur dans l'expreſſion de z, on a, après avoir multiplié tout par x'^n, & ordonné les termes une nouvelle équation en x', que nous déſignerons par $z' = 0$, en ſorte que z' ſoit égal au premier membre de cette équation; on cherchera donc de nouveau le nombre entier poſitif qui ſera immédiatement moindre que la racine de l'équation $z' = 0$, & nommant ce nombre λ'', on fera $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$, ce qui étant ſubſtitué dans z' donnera, après la multiplication par x''^m, une troiſieme équation $z'' = 0$ dont x'' ſera l'inconnue, & ſur laquelle on opérera comme ſur les précédentes, & ainſi de ſuite. Tel eſt le procédé néceſſaire pour réduire la racine a en fraction continue; or conſidérons en général une quelconque des équations trans-

for-

formées $z' = 0$, $z'' = 0$ &c. dont le quantieme ſoit ϱ, en ſorte que cette équation ſoit $z^{\varrho} = 0$, & que l'inconnue de cette équation ſoit x^{ϱ}; il eſt facile de voir par ce que nous avons démontré dans les Additions au Mémoire *ſur la réſol. des équat. num.*, art. 31, & 68; que, pour avoir l'expreſſion de z^{ϱ}, il n'y aura qu'à mettre dans l'expreſſion de z, $\frac{l^{\varrho}x^{\varrho} + l^{\varrho-1}}{L^{\varrho}x^{\varrho} + L^{\varrho-1}}$ à la place de x, & faire diſparoître les dénominateurs en multipliant tous les termes par $(L^{\varrho}x^{\varrho} + L^{\varrho-1})^n$; or, ſi on nomme ζ le premier membre de l'équation propoſée (F), il eſt viſible que la valeur de z^{ϱ} ne ſera autre choſe que l'expreſſion de ζ, en y mettant $l^{\varrho}x^{\varrho} + l^{\varrho-1}$ à la place de u, & $L^{\varrho}x^{\varrho} + L^{\varrho-1}$ à la place de y; d'ailleurs on voit par les formules du Lemme, qu'en faiſant ſucceſſivement $x^{\varrho} = 1, 2, 3$ &c. $\lambda^{\varrho+1}$, la quantité $l^{\varrho}x^{\varrho} + l^{\varrho-1}$ devient $l^{\varrho}1$, $l^{\varrho}2$, $l^{\varrho}3$ &c., $(l^{\varrho}\lambda^{\varrho+1}) = l^{\varrho+1}$; & que la quantité $L^{\varrho}x^{\varrho} + L^{\varrho-1}$ devient pareillement $L^{\varrho}1$, $L^{\varrho}2$, $L^{\varrho}3$ &c. $(L^{\varrho}\lambda^{\varrho+1}) = L^{\varrho+1}$; d'où, & de ce qui a été démontré plus haut (Probl. préc.), je conclus que, pour trouver les valeurs entieres de u, & y, qui peuvent ſatisfaire à l'équation (F), c'eſt à dire $\zeta = 1$, entant que ces valeurs dépendent de la racine a de l'équation $z = 0$, il n'y aura qu'à faire ſucceſſivement, dans chaque équation transformée, telle que $z^{\varrho} = 0$, l'inconnue $x^{\varrho} = 1, 2, 3$ &c. juſqu'à $\lambda^{\varrho+1}$, ($\lambda^{\varrho+1}$ étant le nombre entier qui eſt immédiatement moindre que la vraie racine de cette équation,) & ſi l'équation $\zeta = 1$ eſt réſoluble, il faudra que quelqu'une de ces ſuppoſitions donne $z^{\varrho} = 1$ lorſque l'expoſant n de la fonction ζ eſt pair, & $z^{\varrho} = 1$, ou -1 lorſque n eſt impair.

Soit en général, pour abréger,

$$l = x^{\varrho}l^{\varrho} + l^{\varrho-1}, \qquad L = x^{\varrho}L^{\varrho} + L^{\varrho-1}$$

en donnant à x^{ϱ} la valeur qui rend $z^{\varrho} = 1$ quand n eſt pair, & $z^{\varrho} = \pm 1$ quand n eſt impair; & l'on aura

$$u = \pm l, \qquad y = \pm L$$

où il faut remarquer, par rapport aux ſignes, que ſi n eſt pair on peut pren-

prendre indifféremment les ſupérieurs ou les inférieurs; mais, ſi n eſt impair, alors il faut les prendre comme dans l'équation $z^6 = \pm 1$.

Corollaire 2.

18. Si l'équation $z = 0$ a toutes ſes racines réelles, je dis 1°. que les racines a ne pourront être que les racines mêmes de cette équation. 2°. que les nombres l, & L ſeront néceſſairement les termes de quelqu'une des fractions *principales* (C) convergentes vers a, & jamais des fractions *ſecondaires*..

Car on ne doit prendre pour a que les racines de l'équation $z = 0$, ou celles de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$, qui répondent à des *minimum* (probl. préc.); or je vais prouver que, lorſque l'équation $z = 0$ a toutes ſes racines réelles, il eſt impoſſible que z devienne un *minimum*; en effet, pour que z devienne un *minimum*, il faut que l'on ait $\frac{dz}{dx} = 0$, & que la valeur de $\frac{d^2z}{dx^2}$ ſoit de même ſigne que celle de z, c'eſt à dire, que $\frac{d^2z}{z\,dx^2}$ ſoit une quantité poſitive.

Or, nommant α, β, γ &c. les racines de l'équation $z = 0$, on aura comme l'on ſait

$$z = P(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \text{ - - - -}$$

prenant les logarithmes, & différentiant, on aura

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \text{&c.}$$

différentiant une ſeconde fois & changeant les ſignes, il viendra

$$\frac{dz^2}{z^2dx^2} - \frac{d^2z}{z\,dx^2} = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} + \frac{1}{(x-\gamma)^2} + \text{&c.}$$

Donc, s'il y avoit un *minimum*, il faudroit que $\frac{dz}{dx}$ fût $= 0$ & $\frac{d^2 z}{z dx^2} > 0$, & par conſéquent que le premier membre de l'équation précédente devînt négatif, ce qui ne ſe peut tant que α, β, γ &c. ſont des quantités réelles; donc &c.

Or, puiſque l'équation $z = 0$ a toutes ſes racines réelles, il eſt clair que chacune des équations transformées, comme $z^\xi = 0$, aura auſſi toutes ſes racines réelles; car, à cauſe de $x = \frac{l^\xi x^\xi + l^{\xi-1}}{L^\xi x^\xi + L^{\xi-1}}$ (art. 17.), on aura x^ξ, c'eſt à dire l'inconnue de l'équation $z^\xi = 0$, égale à $\frac{l^{\xi-1} - x L^{\xi-1}}{x L^\xi - l^\xi}$; donc la quantité z^ξ ne pourra jamais devenir un *minimum*; donc, ſi l'équation $z^\xi = 0$ n'a qu'une ſeule racine poſitive $= p$, & qu'on faſſe ſucceſſivement $x^\xi = 0, 1, 2$ &c. juſqu'à $\lambda^{\xi+1}$, ($\lambda^{\xi+1}$ étant le nombre entier qui eſt immédiatement moindre que p,) il eſt clair que la valeur de z^ξ doit ou aller en diminuant, ou bien augmenter d'abord, & diminuer enſuite; d'où il s'enſuit que la plus petite valeur de z^ξ répondra néceſſairement ou à $x^\xi = 0$, ou à $x^\xi = \lambda^{\xi+1}$; ſi l'équation $z^\xi = 0$ a pluſieurs racines poſitives p, q, r &c. il faudra prendre ſucceſſivement pour $\lambda^{\xi+1}$ les nombres entiers qui ſont immédiatement moindres que chacune de ces racines (art. 19. Mém. *ſur la réſol. des équat. num.*), & on en conclura de même que la plus petite valeur de z^ξ ſera néceſſairement une de celles qui répondent à $x^\xi = 0$ ou $x^\xi = \lambda^{\xi+1}$; or la valeur de z^ξ étant toujours égale à un nombre entier lorſque x^ξ eſt un nombre entier, il eſt clair qu'elle ne pourra devenir $= \pm 1$, à moins qu'elle ne devienne la plus petite poſſible; donc on aura néceſſairement dans ce cas $x^\xi = 0$, ou $x^\xi = \lambda^{\xi+1}$; ce qui donnera ou $l = l^{\xi-1}$ & $L = L^{\xi-1}$, ou $l = \lambda^{\xi+1} l^\xi + l^{\xi-1} = l^{\xi+1}$, & $L = \lambda^{\xi+1} L^\xi + L^{\xi-1} = L^{\xi+1}$;

de

de ſorte que les nombres l, & L, ne pourront être que des termes des ſéries l', l'', l''' &c. L', L'', L''' &c.; donc &c. (art. 11).

Maintenant, ſi on ſuppoſe en général

$$z^{\xi} = P^{\xi}(x^{\xi})^{n} + Q^{\xi}(x^{\xi})^{n-1} + \&c.$$

il eſt facile de voir par ce que nous avons dit dans le coroll. préc. que l'on aura

$$P^{\xi} = P(l^{\xi})^{n} + Q(l^{\xi})^{n-1}L^{\xi} + R(l^{\xi})^{n-2}(L^{\xi})^{2} + \&c. + Z(L^{\xi})^{n}$$

de ſorte que la valeur du coëfficient P^{ξ} ſera égale à ce que devient la quantité ζ, en y mettant l^{ξ} à la place de u, & L^{ξ} à la place de y.

De là il eſt aiſé de conclure que, pour réſoudre l'équation $\zeta = 1$ dans le cas du préſent Corollaire, il n'y aura qu'à faire attention au coëfficient du premier terme de chaque équation transformée $z' = 0$, $z'' = 0$ &c.; & ſi la propoſée $\zeta = 1$ eſt réſoluble, on trouvera néceſſairement, dans quelqu'une de ces équations transformées comme $z^{\xi} = 0$, le premier coëfficient $P^{\xi} = 1$, quand n eſt pair, ou $= \pm 1$, quand n eſt impair; alors on aura

$$u = \pm l^{\xi}, \qquad y = \pm L^{\xi}$$

les ſignes ambigus étant à volonté lorſque n eſt pair; mais ils doivent répondre à ceux de l'équation $P^{\xi} = \pm 1$, lorſque n eſt impair, comme dans le Coroll. préc.

Corollaire 3.

19. Au reſte, quelles que ſoient les racines de l'équation $z = 0$, je dis qu'on parviendra toujours néceſſairement à une transformée telle que $z^{\xi} = 0$, dans laquelle la quantité z^{ξ} n'aura aucun *minimum* du côté des x^{ξ} poſitives, & que la même choſe aura lieu pour toutes les transformées ſuivantes $z^{\xi+1} = 0$, $z^{\xi+2} = 0$ &c.; de ſorte que quand on ſera arrivé à une telle transformée, alors on ſera dans le cas du Coroll. préc., & la réſolubilité de l'équation $\zeta = 1$ ne dépendra

pendra plus que du coëfficient du premier terme de chaque transformée.

Pour pouvoir démontrer cette propoſition, il faut commencer par démontrer celle-ci, ſavoir que, lorſque dans une équation quelconque, comme $z = 0$, il y a des racines réelles α, β, γ &c. & des racines imaginaires $\mu + \nu\sqrt{-1}$, $\mu - \nu\sqrt{-1}$, $\pi + \sigma\sqrt{-1}$, $\pi - \sigma\sqrt{-1}$ &c. & que ces dernieres ſont telles que les quantités μ, π &c. ſont négatives, & que $\mu^2 > \nu^2$, $\pi^2 > \sigma^2$ &c. la quantité z ne peut jamais devenir un *minimum* du côté des x poſitives.

Car on aura d'abord, comme dans l'art. 18.

$$\frac{dz^2}{z^2dx^2} - \frac{d^2z}{zdx^2} = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} + \frac{1}{(x-\gamma)^2} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{(x-\mu-\nu\sqrt{-1})^2} + \frac{1}{(x-\mu+\nu\sqrt{-1})^2}$$
$$+ \frac{1}{(x-\pi-\sigma\sqrt{-1})^2} + \frac{1}{(x-\pi+\sigma\sqrt{-1})^2}$$
$$+ \&c.$$

ou bien en réuniſſant deux à deux les termes imaginaires

$$\frac{dz^2}{z^2dx^2} - \frac{d^2z}{zdx^2} = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} + \frac{1}{(x-\gamma)^2} + \&c.$$
$$+ 2\frac{(x-\mu)^2 - \nu^2}{(x^2 - 2\mu x + \mu^2 + \nu^2)^2} + 2\frac{(x-\pi)^2 - \sigma^2}{(x^2 - 2\pi x + \pi^2 + \sigma^2)^2} + \&c.$$

Or il eſt clair que, ſi μ, π &c. ſont négatifs, & tels que $\mu^2 > \nu^2$, $\pi^2 > \sigma^2$ &c. les quantités $(x-\mu)^2 - \nu^2$, $(x-\pi)^2 - \sigma^2$ &c. ſeront toujours poſitives tant que x ſera poſitif; donc le ſecond membre de l'équation précédente ſera auſſi tout poſitif, par conſéquent il ſera impoſſible que z devienne un *minimum* (art. cité).

Cela

Cela poſé, conſidérons l'équation primitive $z = 0$, & ſuppoſons que cette équation ait des racines réelles α, β, γ &c. & des racines imaginaires répréſentées par les quantités

$$\mu + \nu\sqrt{-1},\ \mu - \nu\sqrt{-1},\ \pi + \sigma\sqrt{-1},\ \pi - \sigma\sqrt{-1};\ \text{&c.}$$

qu'on mette dans z, $\frac{l^{\xi}x^{\xi} + l^{\xi-1}}{L^{\xi}x^{\xi} + L^{\xi-1}}$ à la place de x, & multipliant enſuite par $L'x^{\xi} + L^{\xi-1}$ élevé à la puiſſance n, on aura l'expreſſion de z^{ξ} (art. 17.); d'où il eſt aiſé de voir que chaque facteur ſimple & réel de z comme $x - \alpha$, donnera dans z^{ξ} un facteur auſſi réel tel que $(l^{\xi} - \alpha L^{\xi})x^{\xi} + l^{\xi-1} - \alpha L^{\xi-1}$; & que chaque facteur double à racines imaginaires, tel que $(x - \mu)^2 + \nu^2$, donnera dans z^{ξ} le facteur double

$$((l^{\xi} - \mu L^{\xi})x^{\xi} + l^{\xi-1} - \mu L^{\xi-1})^2 + \nu^2(L^{\xi}x^{\xi} + L^{\xi-1})^2$$

lequel, en faiſant pour abréger

$$A = (l^{\xi} - \mu L^{\xi})^2 + \nu^2 (L^{\xi})^2$$

$$B = (l^{\xi} - \mu L^{\xi})(l^{\xi-1} - \mu L^{\xi-1}) + \nu^2 L^{\xi} L^{\xi-1}$$

$$C = (l^{\xi-1} - \mu L^{\xi-1})^2 + \nu^2 (L^{\xi-1})^2$$

ſe réduit à cette forme

$$A(x^{\xi})^2 + 2Bx^{\xi} + C.$$

Or ce facteur donne ces deux racines

$$\frac{-B + \sqrt{(B^2 - AC)}}{A},\quad \frac{-B - \sqrt{(B^2 - AC)}}{A}$$

où je remarque 1°. que A eſt toujours néceſſairement poſitif; 2°. que B ſera poſitif, lorſque les deux quantités $l^{\xi} - \mu L^{\xi}$ & $l^{\xi-1} - \mu L^{\xi-1}$ ſeront de même ſigne, c'eſt à dire, lorſque les fractions $\frac{l^{\xi-1}}{L^{\xi-1}}$ & $\frac{l^{\xi}}{L^{\xi}}$ ſeront toutes deux plus petites ou plus grandes que μ; or, comme les fractions $\frac{l^{\xi-1}}{L^{\xi-1}}$, $\frac{l^{\xi}}{L^{\xi}}$ &c. convergent conſtamment

vers la racine a, en ſorte que la différence devient continuellement plus petite, il eſt clair que lorſque la différence entre $\frac{l^{\varepsilon-1}}{L^{\varepsilon-1}}$ & a ſera devenue plus petite que celle entre μ & a, alors toutes les quantités $l^{\varepsilon-1} - \mu L^{\varepsilon-1}$, $l^{\varepsilon} - \mu L^{\varepsilon}$ &c. ſeront néceſſairement de même ſigne, & par conſéquent la quantité B ſera toujours poſitive; or la différence entre la fraction $\frac{l^{\varepsilon-1}}{L^{\varepsilon-1}}$, & a eſt moindre que $\frac{1}{L^{\varepsilon-1}L^{\varepsilon}}$; donc la condition dont il s'agit, aura ſurement lieu lorſque la quantité $\frac{1}{L^{\varepsilon-1}L^{\varepsilon}}$ ſera moindre que la différence entre a & μ. Il ne pourroit y avoir de difficulté que lorſque $a = \mu$; car dans ce cas les quantités $l^{\varepsilon-1} - \mu L^{\varepsilon-1}$ & $l^{\varepsilon} - \mu L^{\varepsilon}$ ſeront toujours néceſſairement de ſignes différens, mais alors on conſidérera que l'on a

$$B = L^{\varepsilon}L^{\varepsilon-1}\left(\left(\frac{l^{\varepsilon}}{L^{\varepsilon}} - a\right)\left(\frac{l^{\varepsilon-1}}{L^{\varepsilon-1}} - a\right) + \nu^2\right)$$

de ſorte que, comme la différence entre $\frac{l^{\varepsilon-1}}{L^{\varepsilon-1}}$ & a, de même qu'entre $\frac{l^{\varepsilon}}{L^{\varepsilon}}$ & a, va continuellement en diminuant, il arrivera néceſſairement que le produit de ces deux différences deviendra moindre que ν^2, & alors il le ſera toujours de plus en plus; de ſorte que la quantité B ſe trouvera auſſi poſitive; c'eſt ce qui arrivera ſurement lorſque la quantité $\frac{1}{L^{\varepsilon-1}L^{\varepsilon}L^{\varepsilon}L^{\varepsilon+1}}$ ſera moindre que ν^2. De plus, il eſt facile de voir que la quantité B, quand elle ſera devenue une fois poſitive, ira néceſſairement en augmentant parce que les nombres $l^{\varepsilon-1}$, l^{ε} &c. $L^{\varepsilon-1}$, L^{ε} augmentent continuellement. 3°. Je remarque que la quantité $B^2 - AC$ eſt égale à $-\nu^2$; car, en ſubſtituant les valeurs de A, B, C, & effaçant ce qui ſe détruit, on trouve d'abord $AC - B^2 = \nu^2 (l^{\varepsilon}L^{\varepsilon-1} - l^{\varepsilon-1}L^{\varepsilon})^2$; mais par la nature des fractions *principales*

pales $\frac{l^{t-1}}{L^{t-1}}$, $\frac{l^t}{L^t}$, on a $l^t L^{t-1} - l^{t-1} L^t = \pm 1$ (*art.* 13.); donc $AC - B^2 = \nu^2$; & par conſéquent $V(B^2 - AC) = \nu V - 1$, de ſorte que les deux racines trouvées ci-deſſus ſeront imaginaires, & exprimées par

$$-\frac{B}{A} + \frac{\nu}{A} V - 1, \quad -\frac{B}{A} - \frac{\nu}{A} V - 1.$$

Or, puiſque ν eſt conſtant & que B doit aller en augmentant, il eſt viſible qu'il arrivera néceſſairement que B^2 ſurpaſſera ν^2; & alors ces deux racines imaginaires auront les conditions énoncées plus haut; de ſorte que, quand toutes les racines imaginaires d'une équation transformée, comme $z^t = 0$, ſeront dans le même cas, alors z^t ne pourra plus devenir un *minimum*, ainſi que z^{t+1}, z^{t+2} &c. donc &c.

Corollaire 4.

20. Nous avons ſuppoſé dans les Corollaires préc. que la racine a étoit une des racines de l'équation $z = 0$; conſidérons maintenant le cas où elle en ſera une de celles de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$. Pour que ce cas ait lieu, il faut que cette racine réponde à $z =$ à un *minimum*; c'eſt de quoi on pourra s'aſſurer aiſément, en examinant ſi $x = a$ rend z & $\frac{d^2z}{dx^2}$ de même ſigne; ſi $\frac{d^2z}{dx^2}$ étoit nul en même tems que $\frac{dz}{dx}$, alors il faudroit, comme l'on ſait, que $\frac{d^3z}{dx^3}$ le fût auſſi, & la condition du *minimum* ſeroit que z & $\frac{d^4z}{dx^4}$ fuſſent de même ſigne, & ainſi de ſuite.

Suppoſons donc qu'on ait trouvé que la racine a de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ rend z égal à un *minimum*, & ſoit cette valeur de $z = Z$;

je dis

je dis qu'on ne pourra jamais prendre dans l'équation (F) le nombre y, plus grand que $\frac{1}{\sqrt[n]{Z}}$; car nous avons vu (art. 16.) qu'il faut qu'en faiſant $x = \frac{u}{y}$ on ait $z = \frac{1}{y^n}$, or je vais prouver que $\frac{1}{y^n}$ ne pourra jamais être plus petit que Z; en effet, ſuppoſons qu'il exiſte une valeur de u, & de y, telle que $x = \frac{u}{y}$ rende $z = \frac{1}{y^n}$, & comme $x = a$ rend z égal à un *minimum*, la valeur de z ne fera que diminuer depuis $x = \frac{u}{y}$ juſqu'à $x = a$ (art. cité); mais on a, lorſque $x = a$, $z = Z$; donc il faut que $\frac{1}{y^n}$ ſoit plus grand que Z, ou au moins ne ſoit pas moindre que Z; donc on ne ſauroit avoir $\frac{1}{y^n} < Z$, ou $y^n > \frac{1}{Z}$, & de là $y > \frac{1}{\sqrt[n]{Z}}$, abſtraction faite des ſignes de Z & de y.

Donc, puiſque l'on ne peut prendre pour les nombres u, & y, que les numérateurs & les dénominateurs des fractions des ſéries (D), ou (E) convergentes vers la racine a (art. cité), il ſuffira d'eſſayer dans l'équation (F), pour u & y, les termes des fractions dont les dénominateurs ne ſurpaſſeront pas le nombre $\frac{1}{\sqrt[n]{Z}}$, de ſorte que dans ce cas le nombre des eſſais à faire ſera toujours limité, au lieu qu'il peut être infini dans le cas où a eſt une racine de l'équation $z = 0$, comme nous l'avons vu plus haut.

De là on voit auſſi que les racines de l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ ne peuvent jamais fournir qu'un nombre de ſolutions limité; tandis que les

les racines de l'équation $z = 0$ peuvent en fournir une infinité.

Or, lorſque l'équation $z = 0$ n'a que des racines imaginaires, l'équation $\frac{dz}{dx}$ aura néceſſairement des racines répondantes à des *minimum;* & on ne pourra prendre pour a que ces mêmes racines; donc dans ce cas l'équation (F) ne pourra jamais avoir qu'un nombre limité de ſolutions.

SCOLIE.

21. Si la quantité z avoit un diviſeur rationel tel que

$$px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2} + \&c.$$

& que le quotient fût

$$\pi x^{n-m} + \chi x^{n-m-1} + \varrho x^{n-m-2} + \&c.$$

p, q, r &c. π, χ, ϱ &c. étant des nombres entiers, alors il eſt clair que le premier membre de l'équation (F) ſe décompoſeroit auſſi en ces deux facteurs

$$pu^m + qu^{m-1}y + ru^{m-2}y^2 + \&c.$$
$$\pi u^{n-m} + \chi u^{n-m-1}y + \varrho u^{n-m-2}y^2 + \&c.$$

de ſorte que, comme chacun de ces facteurs eſt égal à un nombre entier & que leur produit doit être égal à l'unité, il faudra que chacun d'eux en particulier ſoit $= \pm 1$; ainſi on aura deux équations par leſquelles on pourra déterminer les deux inconnues u, & y; & ſi les valeurs de ces inconnues ſe trouvent égales à des nombres entiers, on aura la ſolution de l'équation propoſée; ſinon, il en faudra conclure que cette équation n'eſt pas réſoluble en nombres entiers.

Donc, lorſque parmi les racines de l'équation $z = 0$, il s'en trouvera une qui donnera une fraction continue finie, ou périodique, on pourra trouver les nombres u, & y, ſans aucun tâtonnement; car dans le premier cas l'équation aura un diviſeur d'une dimenſion &

dans le ſecond cas elle en aura un de deux dimenſions (voyez *le* §. 2. *des Additions au Mém. ſur la réſol. des équat. num.*).

PROBLEME 3.

22. *Réſoudre en nombres entiers l'équation*

$$A = Bt^n + Ct^{n-1}u + Dt^{n-2}u^2 + \&c. + Ku^n,$$

A, B, C &c. étant des nombres entiers donnés, & t & u étant deux indéterminées qui doivent être auſſi des nombres entiers.

Il eſt d'abord évident que, ſi les nombres B, C &c. K avoient un diviſeur commun à tous, ce diviſeur devroit l'être auſſi du nombre A, pour que les nombres t & u puſſent être entiers, & alors il s'en iroit de lui même par la diviſion actuelle; ainſi on peut toujours ſuppoſer que les nombres B, C &c. K n'ont aucun diviſeur commun.

De plus, ſi les nombres t & u avoient un commun diviſeur r, il eſt clair que le ſecond membre de l'équation propoſée ſeroit tout diviſible par r^n; donc il faudroit que le premier A le fût auſſi: d'où l'on voit que ce cas ne peut avoir lieu à moins que le nombre A ne ſoit diviſible par une puiſſance n d'un nombre quelconque; ſi cela n'eſt pas, on ſera ſûr que les nombres cherchés t & u ſeront néceſſairement premiers entr'eux; c'eſt ce qui arrivera toujours lorſque A ſera un nombre premier; mais, lorſque A eſt un nombre compoſé, il faudra voir d'abord ſi parmi ſes diviſeurs il en a quelqu'un qui ſoit une puiſſance n^{eme}; ſuppoſons que r^n ſoit ce diviſeur, alors les nombres t & u pourront être ou premiers entr'eux, ou diviſibles l'un & l'autre par r; ce qui formera deux cas qu'il faudra traiter ſéparément; dans le ſecond cas on fera $t = rt'$, $u = ru'$, & $A = r^nA'$, & ſubſtituant ces valeurs on aura, après avoir diviſé toute l'équation par r^n, une nouvelle équation en t' & u', dans laquelle ces nombres ſeront premiers entr'eux. Ainſi on peut toujours ramener l'équation propoſée au cas où les deux indéterminées ſont des nombres premiers entr'eux.

Sup-

Suppoſons donc l'équation propoſée déjà réduite à cet état, & il pourra encore arriver que le nombre u ait un diviſeur commun avec le nombre A; ſuppoſons que s ſoit le plus grand diviſeur commun de u & A; il eſt clair qu'il faudra que le terme Bt^n qui eſt ſans u ſoit diviſible par s; mais t ne ſauroit l'être parce qu'il eſt premier à u (hyp.), donc il faudra que B le ſoit; donc s devra être un diviſeur commun de A & B.

Ainſi, ſi A & B ſont premiers entr'eux, on ſera aſſuré que A & u le ſeront auſſi. Mais, ſi A & B ont un commun diviſeur s, alors u pourra être multiple de s ou non; ce qui fera deux cas qu'il faudra conſidérer ſéparément; dans le premier on fera $u = su'$ & $A = sA'$, & l'on aura une transformée qui ſera toute diviſible par s & où A' & u' ſeront premiers entr'eux; dans le ſecond cas A & u ſeront déjà premiers entr'eux.

De cette maniere l'équation à réſoudre ſera toujours réduite à la forme & à l'état de l'équation (A) du Probl. 1; & par conſéquent elle ſera ſuſceptible de la méthode de ce Probleme. On commencera donc ſuivant cette méthode par chercher une valeur de t poſitive ou négative, mais moindre que $\frac{A}{2}$, laquelle rende la quantité

$$Bt^n + Ct^{n-1} + Dt^{n-2} + \&c. + K$$

diviſible par A; & ſi parmi les nombres entiers moindres que $\frac{A}{2}$, pris poſitivement & négativement, on n'en trouve aucun de cette qualité, on en conclura ſur le champ que l'équation dont il s'agit n'admet aucune ſolution en nombres entiers (art. 6); mais, ſi on en trouve un ou pluſieurs qui aient la qualité requiſe, on nommera chacun de ces nombres θ, & on ſubſtituera dans l'équation propoſée $\theta u - Ay$ à la place de t; moyennant quoi elle deviendra toute diviſible par A, & la diviſion faite, elle ſe trouvera dans le cas de l'équation (F) du Probleme 2; ainſi il n'y aura plus qu'à y appliquer la méthode de ce dernier Probleme.

SCOLIE.

23. Il eſt bon de remarquer que le premier membre de l'équation (H), que nous avons ſuppoſé égal à z (art. 16), peut s'exprimer ainſi

$$\frac{B(\theta x-A)^n + C(\theta x-A)^{n-1}x + D(\theta x-A)^{n-2}x^2 + \&c. + Kx^n}{A}$$

d'où l'on voit que les racines de l'équation $z = o$ dépendent de celles de l'équation

$$Bt^n + Ct^{n-1} + Dt^{n-2} + \&c. + K = o$$

de ſorte que par cette équation on pourra juger d'abord de la nature des racines de l'équation $z = o$, qui eſt ſouvent plus compliquée; car, ſi t', t'', t''' &c. ſont les racines de l'équation en t, celles de l'équation $z = o$ ſeront $\theta - \frac{A}{t'}$, $\theta - \frac{A}{t''}$, $\theta - \frac{A}{t'''}$ &c.; d'où l'on voit qu'il y aura dans l'une & dans l'autre le même nombre de racines réelles & d'imaginaires.

Mais, quant aux *maximum* & *minimum* de la quantité z, ils ne correſpondent pas à ceux de la quantité $Bt^n + Ct^{n-1} + Pt^{n-2} + \&c. + K$, comme il eſt facile de le voir; de ſorte qu'il faudra abſolument les déterminer par l'équation $\frac{dz}{dx} = o$.

PROBLEME 4.

24. *On propoſe de réſoudre en nombres entiers l'équation du premier degré*

$$A = Bt - Cu.$$

Je ſuppoſe d'abord que B, & C n'aient aucun diviſeur commun (Probl. 3.); or A & C pouvant avoir un commun diviſeur D, ſoit $A = A'D$, & $C = C'D$, A' & C' étant maintenant premiers entr'eux,

entr'eux, & l'équation propoſée pourra ſe ramener ſur le champ à celle-ci (art. 4.)

$$1 = Br - C'ſ$$

dont il ſuffira même de connoître une ſeule ſolution.

Or, cette équation étant dans le cas du Probl. 2, on aura (en faiſant $\frac{r}{s} = x$) $Bx - C' = z$; & comme $z = 0$ donne $x = \frac{C'}{B}$, on aura ici une ſeule valeur de a qui ſera $\frac{C'}{B}$, en prenant C' & B poſitivement; donc (art. 18.) on ſera ſûr de trouver les valeurs de r & s parmi les termes d'une des fractions principales convergentes vers $\frac{C'}{B}$; or cette fraction étant rationelle & réduite déjà à ſes moindres termes, ſera néceſſairement la derniere des fractions principales de la ſérie (C) (art. 11.); donc ſi $\frac{l^{\varrho}}{L^{\varrho}}$ eſt l'avant-derniere fraction de la même ſérie, on aura (art. 13.) $C'L^{\varrho} - Bl^{\varrho} = \pm 1$, le ſigne ſupérieur étant pour le cas où le quantieme ϱ eſt impair, & l'inférieur pour celui où ϱ eſt pair; ainſi il n'y aura qu'à prendre $r = \mp l^{\varrho}$ & $s = \mp L^{\varrho}$; ſi l'un des nombres B, C' ou tous les deux étoient négatifs, on les regarderoit comme poſitifs, & on prendroit r, ou s, ou tous les deux, avec des ſignes contraires.

Ayant ainſi trouvé des valeurs particulieres de r & s, on aura pour les valeurs générales de t & u (art. 4.)

$$t = Ar + mC, \quad u = A's + mB$$

m étant un nombre quelconque entier poſitif ou négatif.

Corollaire.

25. Le principal uſage de ce Probleme eſt pour réſoudre les queſtions où l'on demande de trouver un nombre qui, étant diviſé par

autant de nombres donnés qu'on voudra, laiſſe des reſtes auſſi donnés; car, ſoient a, b, c &c. les diviſeurs donnés, α, β, γ &c. les reſtes, & t, u, x &c. les quotiens inconnus, il eſt clair que le nombre cherché devra être exprimé également par $at + \alpha$, $bu + \beta$, $cx + \gamma$ &c. ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de diviſeurs donnés, moins un.

On aura donc d'abord l'équation

$$at + \alpha = bu + \beta$$

laquelle ſe réduit à celle du Probl. préc. en faiſant $A = \beta - \alpha$, $B = a$, $C = b$; ainſi on trouvera l'expreſſion générale de t & u.

La ſeconde équation ſera

$$at + \alpha = cx + \gamma$$

or $t = Ar + Cm$, où A, r, & C ſont donnés & m eſt un nombre indéterminé; donc on aura en ſubſtituant

$$aCm + aAr + \alpha = cx + \gamma$$

équation que l'on réſoudra comme la précédente, en regardant m & x comme indéterminés & le reſte comme donné.

Et ainſi de ſuite.

SCOLIE.

26. Pour réduire en fraction continue toute fraction rationelle telle que $\frac{C}{B}$, il n'y a qu'à pratiquer ſur cette fraction la même opération que l'on emploie pour trouver le plus grand commun diviſeur de C & B; c'eſt à dire qu'on diviſera C par B, B par le reſte de la premiere diviſion, ce reſte par celui de la ſeconde & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que la diviſion ſe faſſe exactement; & les quotiens de ces différentes diviſions ſeront les nombres λ', λ'', λ''' &c. de la fraction continue cherchée (art. 11.) à l'aide deſquels on formera les fractions $\frac{l'}{L'}$, $\frac{l''}{L''}$ &c. par les formules du même article.

Mr.

Mr. *Bachet* eſt, comme nous l'avons déjà remarqué, le premier qui ait réſolu le Probleme précédent; ſa méthode, quoiqu'indépendante des fractions continues, revient cependant au même pour le fond que celle que nous venons d'expoſer; & en général, toutes celles que d'autres Géometres ont imaginées après lui, ſe réduiſent aux mêmes principes.

EXEMPLE I.

27. On demande tous les nombres entiers qui peuvent être pris pour t, & u, dans l'équation

$$101 = 41t - 105u.$$

Puiſque les nombres 41, & 105 ſont premiers entr'eux, l'équation eſt réſoluble & n'a beſoin d'aucune réduction.

On fera donc $A = 101$, $B = 41$, $C = 105$, & comme 101 & 105 ſont auſſi premiers entr'eux, on aura $D = 1$, $A' = A$, $C' = C$; donc la fraction à réduire en fraction continue ſera $\frac{C}{B} = \frac{105}{41}$. Diviſant donc 105 par 41, on aura le quotient 2 & le reſte 23, diviſant 41 par 23, on aura &c. Ainſi on aura cette ſuite de quotiens 2, 1, 1, 3, 1, 1, 2, leſquels donneront les fractions *principales*

$$\frac{0}{1}\ \frac{\overset{2}{1}}{0}\ \frac{\overset{1}{2}}{1}\ \frac{\overset{1}{3}}{1}\ \frac{\overset{3}{5}}{2}\ \frac{\overset{1}{18}}{7}\ \frac{\overset{1}{23}}{9}\ \frac{\overset{2}{64}}{25}\ \frac{105}{41}.$$

Ainſi la fraction $\frac{64}{25}$ ſera celle que nous avons déſignée par $\frac{l^e}{L^e}$ ou $\frac{\ell}{}$ ſera 6, & par conſéquent pair, de ſorte qu'on aura $r = 41$, $s = 16$, & de là

$$t = 101 \times 41 + 105m, \quad u = 101 \times 16 + 41m,$$

où m pourra être un nombre quelconque entier poſitif ou négatif; & ces expreſſions renfermeront toutes les valeurs entieres de t & de u qui peuvent ſatisfaire à l'équation propoſée.

PRO-

PROBLEME 5.

28. *Réſoudre en nombres entiers l'équation*

$$A = Bt^2 + Ctu + Du^2 \quad \text{- - - - (G).}$$

Suppoſons cette équation déjà réduite à l'état qu'exige notre méthode, c'eſt à dire que B, C, D n'aient aucun diviſeur commun, & que A, & u ſoient premiers entr'eux (Probl. 3.). On cherchera d'abord un nombre entier, poſitif ou négatif, mais moindre que $\frac{A}{2}$, lequel étant pris pour t rende la quantité $Bt^2 + Ct + D$ diviſible par A.

Si l'on n'en trouve aucun de cette qualité, il en faudra conclure que la propoſée n'admet point de ſolution en nombres entiers; mais, ſuppoſons que l'on en ait trouvé un ou plus d'un qui ait la condition requiſe, on les déſignera par θ, & on fera les mêmes opérations ſur chacun d'eux en les prenant ſucceſſivement à la place de θ.

Or, comme (art. 23.) les racines de l'équation $z = o$ dépendent de celles de l'équation

$$Bt^2 + Ct + D = o$$

il ſe préſente ici deux cas qu'il faut examiner ſéparément; l'un eſt celui où cette équation a deux racines réelles, l'autre celui où elle a deux racines imaginaires, à quoi on peut ajouter un troiſieme cas, pour les racines égales.

Premier cas, lorſque $C^2 - 4BD > o$.

29. Qu'on ſubſtitue dans l'équation propoſée $\theta u - Ay$ à la place de t, & la diviſant enſuite par A, elle deviendra celle-ci

$$Pu^2 + Quy + Ry^2 = 1 \quad \text{- - - - (H)}$$

où

où $$P = \frac{B\theta^2 + C\theta + D}{A}$$

$$Q = -2B\theta - C$$

$$R = AB$$

de ſorte qu'on aura (art. 16.)

$$Px^2 + Qx + R = z.$$

Maintenant, comme l'équation $z = 0$ n'eſt ici que du ſecond degré, elle aura toutes ſes racines réelles, parce que nous ſuppoſons que celles de l'équation en t le ſont; donc on aura le cas de l'art. 18; de ſorte qu'il n'y aura qu'à former les équations transformées $z' = 0$, $z'' = 0$ &c. & voir ſi l'on en trouve une où le coëfficient du premier terme ſoit égal à l'unité priſe poſitivement, à cauſe qu'on a ici $n = 2$.

Or les racines de l'équation $z = 0$ ſeront rationelles ou non, ſelon que le nombre $Q^2 - 4PR = C^2 - 4BD$ ſera un carré ou non.

Dans le premier cas, la quantité z ſera compoſée de deux facteurs rationels du premier degré, de ſorte qu'on aura le cas de l'art. 21 qui eſt très facile à réſoudre.

Il n'en eſt pas de même de l'autre cas où $C^2 - 4BD$ n'eſt pas carré, & où par conſéquent les racines ſont incommenſurables; il faudra donc dans ce cas réduire les racines en fractions continues, & pour cela on pourra ſe ſervir de la méthode que nous avons donnée dans la *Remarque II.* du §. 2. des *Additions au Mémoire ſur la réſol. des équat. num.*

Pour pouvoir employer cette méthode, nous réduirons d'abord la quantité z à la forme $E'x^2 - 2ex - E$, en faiſant

$$E = -R = -AB$$

$$E' = P = \frac{B\theta^2 + C\theta + D}{A}$$

$$\varepsilon = -\frac{Q}{2} = B\theta + \frac{C}{2}$$

en ſorte que l'équation à réſoudre ſoit

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = z = 0$$

ſurquoi il faut remarquer que E & E′ ſeront toujours des nombres entiers, mais que ε ne le ſera que lorſque C ſera diviſible par 2; ainſi, pour que ε ſoit auſſi toujours entier, comme la méthode le demande, dans le cas où C ſera un nombre impair, on aura ſoin de multiplier d'avance toute l'équation (G) par 2, ce qui ne la change point, c'eſt à dire, qu'on mettra partout dans les formules précédentes 2A, 2B, 2C, 2D à la place de A, B, C, D.

Maintenant, comme l'équation $z = 0$ a les deux racines

$$x = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\beta}}{E'}$$

en faiſant

$$\beta = \varepsilon^2 + EE' = \left(\frac{C}{2}\right)^2 - BD$$

(je déſigne ici par β ce que j'ai appellé B dans l'endroit cité,) il faudra les conſidérer ſucceſſivement & faire la même opération ſur l'une que ſur l'autre.

Suppoſons que $\frac{\varepsilon + \sqrt{\beta}}{E}$ déſigne en général une quelconque de ces deux racines, (le radical $\sqrt{\beta}$ pouvant être poſitif ou négatif,) ſi elle étoit négative il faudroit d'abord la rendre poſitive en prenant ε & $\sqrt{\beta}$ avec des ſignes contraires, après quoi on changeroit auſſi le ſigne du nombre ε (art. 16.); regardant donc $\frac{\varepsilon + \sqrt{\beta}}{E}$ comme poſitive, on formera d'après cette racine les trois ſéries ſuivantes, où le ſigne $<$ dénote qu'il faut toujours prendre le nombre entier qui eſt immédiatement au deſſous.

$E' =$

$$E' = \frac{\beta - \varepsilon^2}{E}, \quad \lambda' < \frac{\varepsilon + \sqrt{\beta}}{E'}, \quad \varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$$

$$E'' = \frac{\beta - \varepsilon'^2}{E'}, \quad \lambda'' < \frac{\varepsilon' + \sqrt{\beta}}{E''}, \quad \varepsilon'' = \lambda'' E'' - \varepsilon'$$

$$E''' = \frac{\beta - \varepsilon''^2}{E''}, \quad \lambda''' < \frac{\varepsilon'' + \sqrt{\beta}}{E'''}, \quad \varepsilon''' = \lambda''' E''' - \varepsilon''$$

&c. &c. &c.

Ces ſéries doivent être pouſſées juſqu'à ce que deux termes correſpondans comme E^{μ} & ε^{μ} reparoiſſent enſemble, en ſorte que l'on ait, par exemple,

$$E^{\mu+\nu} = E^{\mu}, \qquad \varepsilon^{\mu+\nu} = \varepsilon^{\mu}$$

car alors tous les termes ſuivans dans chacune des trois ſéries ſeront les mêmes que ceux qu'on aura déjà trouvés, en ſorte qu'en général les termes qui auroient pour expoſant $\mu + \pi + n\nu$, (n étant un nombre entier poſitif quelconque,) ſeront égaux aux termes des mêmes ſéries dont l'expoſant ſeroit $\mu + \pi$.

Maintenant nous avons vu, dans l'endroit cité, que les équations transformées ſont

$$E''x'^2 - 2\varepsilon' x' - E' = 0$$

$$E'''x''^2 - 2\varepsilon'' x'' - E'' = 0$$

&c.

où il faut remarquer que nous avons ſuppoſé que les ſignes de chaque transformée étoient changés; d'où il s'enſuit qu'on aura ici

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = z$$

$$E''x'^2 - 2\varepsilon' x' - E' = -z'$$

$$E'''x''^2 - 2\varepsilon'' x'' - E'' = z''$$

&c.

& en général

$$E^{\varrho+1}(x^{\varrho})^2 - 2\varepsilon^{\varrho}x^{\varrho} - E^{\varrho} = \pm\varepsilon^{\varrho}$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas où ϱ eſt impair, & l'inférieur pour le cas de ϱ pair.

Donc, pour que l'équation propoſée (H), c'eſt à dire

$$E'u^2 - 2\varepsilon uy - Ey^2 = 1$$

puiſſe ſe réſoudre en nombres entiers, il faudra (art. 18.) que dans la ſuite des nombres E, E′, E″ &c. il ſe trouve un terme comme $E^{\varrho+1}$ lequel ſoit $= \pm 1$, en prenant le ſigne ſupérieur lorſque $\varrho + 1$ eſt impair, & l'inférieur lorſque $\varrho + 1$ eſt pair, & alors on aura, ſi la racine x étoit poſitive,

$$u = \pm l^{\varrho}, \qquad y = \pm L^{\varrho}$$

& ſi elle étoit négative, en ſorte qu'on ait pris ε avec un ſigne contraire,

$$u = \mp l^{\varrho}, \qquad y = \pm L^{\varrho}.$$

Corollaire 1.

30. Donc, puiſqu'on a en général

$$E^{\mu+n'+\pi} = E^{\mu+\pi}$$

quel que ſoit le nombre n, pourvu qu'il ſoit entier poſitif, il s'enſuit: 1°. Que ſi, dans toute la ſérie E, E′, E″ &c. juſqu'à $E^{\mu+\nu}$ il ne ſe trouve aucun terme qui ſoit égal à l'unité, on en doit conclure que l'unité ne paroîtra jamais dans la même ſuite pouſſée à l'infini, & qu'ainſi la racine qui a donné cette ſuite ne fournira aucune ſolution en nombres entiers de l'équation propoſée.

2°. Que ſi, dans la ſuite E, E′, E″ &c. juſqu'à $E^{\mu-1}$, il ſe trouve un ou pluſieurs termes tels que $E^{\varrho+1}$ ($\varrho + 1$ étant $< \mu$) qui ſoient égaux à l'unité poſitive ou négative, ſuivant que ϱ ſera impair ou pair, alors chacun de ces termes donnera une ſolution de l'équation (H). Mais nous démontrerons plus bas (art. 34. vers la fin) que ce cas ne ſauroit jamais avoir lieu.

3°. Que

3°. Que, ſi dans la ſuite E^{μ}, $E^{\mu+1}$ &c. juſqu'à $E^{\mu+\nu-1}$, il ſe trouve un ou pluſieurs termes tels que $E^{\mu+\pi}$ (π étant $< \nu$) qui ſoient égaux à l'unité poſitive ou négative, alors chacun de ces termes, ou donnera une infinité de ſolutions de l'équation (H), ou n'en donnera aucune.

Car il eſt clair que le même terme $E^{\mu+\pi}$ reparoîtra une infinité de fois dans la même ſérie aux places $(\mu + \pi + \nu)^{\text{eme}}$, $(\mu + \pi + 2\nu)^{\text{eme}}$ &c., & en général dans chaque place $(\mu + \pi + n\nu)^{\text{eme}}$; or il faut ici diſtinguer deux cas, ſuivant que le nombre ν qui exprime le nombre des termes de chaque période ſera pair ou impair.

Suppoſons premierement ν pair; en ce cas il eſt clair que, quelque valeur qu'on donne à n, les nombres $\mu + \pi + n\nu$ ſeront tous également pairs ou impairs; de ſorte que, ſi le terme $E^{\mu+\pi}$ eſt égal à 1 lorſque $\mu + \pi$ eſt impair, & égal à -1 lorſque $\mu + \pi$ eſt pair, tous les termes ſuivans dont l'expoſant du rang ſera $\mu + \pi + n\nu$ ſeront auſſi de la même qualité, & par conſéquent chacun de ces termes pourra fournir une ſolution de l'équation dont il s'agit.

Ainſi on pourra faire dans ce cas

$$\varrho = \mu + n\nu + \pi - 1$$

& prendre pour n tel nombre entier poſitif qu'on voudra.

Si au contraire le terme $E^{\mu+\pi}$ étoit égal à 1 lorſque $\mu + \pi$ eſt pair, ou égal à -1 lorſque $\mu + \pi$ eſt impair, alors ni ce terme ni aucun des ſuivans dont l'expoſant ſeroit $\mu + n\nu + \pi$, ne ſauroit fournir de ſolution de l'équation propoſée.

Suppoſons en ſecond lieu que ν ſoit impair, alors il eſt viſible que les nombres $\mu + \pi + n\nu$ ſeront tous de même eſpece, (c'eſt à dire pairs ou impairs,) que le nombre $\mu + \pi$ lorſque n ſera pair, & qu'au contraire ils ſeront d'eſpece différente lorſque n ſera impair.

Donc, ſi le terme $E^{\mu+\pi}$ eſt égal à 1 lorſque $\mu + \pi$ eſt impair, ou égal à -1 lorſque $\mu + \pi$ eſt pair, parmi tous les termes

qui auront $\mu + \pi + n\nu$ pour expoſant, il n'y aura que ceux où n ſera pair qui ſeront de la même qualité, & qui pourront par conſéquent donner des ſolutions de l'équation (H).

Ainſi on fera dans ce cas, comme ci-deſſus, $\varrho = \mu + n\nu + \pi - 1$, mais il ne faudra prendre pour n que des nombres poſitifs pairs.

Au contraire, ſi le terme $E^{\mu+\pi}$ eſt égal à 1, $\mu + \pi$ étant pair, ou égal à -1, $\mu + \pi$ étant impair, alors tous les termes qui auront $\mu + n\nu + \pi$ pour expoſant & où n ſera impair, ſeront égaux à 1, lorſque l'expoſant ſera impair, & à -1 lorſqu'il ſera impair; ainſi ces termes ayant la qualité requiſe pour la ſolution de l'équation, on pourra encore prendre en géneral $\varrho = \mu + n\nu + \pi - 1$, pourvu que n ne dénote que des nombres entiers poſitifs impairs. Au reſte ce cas peut auſſi ſe ramener au précédent en prenant le terme $E^{\mu+\nu+\pi}$ au lieu du terme $E^{\mu+\pi}$; car il eſt évident que le terme $E^{\mu+\nu+\pi}$ dans ce cas ſera $= +1$ ou -1, ſelon que ſon expoſant ſera impair ou pair.

En général, le cas de ν impair peut ſe réduire à celui de ν pair, car pour cela il n'y aura qu'à continuer la ſérie E, E′, E″ &c. juſqu'au terme $E^{\mu+2\nu}$, & enſuite prendre 2ν à la place de ν, tout le reſte demeurant le même.

Connoiſſant ainſi l'expoſant ϱ, on pourra trouver les valeurs de l^ϱ & L^ϱ d'où dépendent celles de u & y (art. préc.) par les formules de l'art. 11; pour cela il faudra continuer la ſérie des nombres λ', λ'' &c. juſqu'au terme λ^ϱ, ce qui eſt facile; car on aura $\lambda^{\mu+\nu+1} = \lambda^{\mu+1}$, $\lambda^{\mu+\nu+2} = \lambda^{\mu+2}$ &c. & en général $\lambda^{\mu+n\nu+\pi} = \lambda^{\mu+\pi}$.

Mais, quand on aura une fois calculé les nombres l', l'', l''' &c. L', L'', L''' &c. juſqu'à l^n, L^n, on pourra trouver les expreſſions générales de l^ϱ, & de L^ϱ, en ſuppoſant comme ci-deſſus $\varrho = \mu + n\nu + \pi - 1$; car il n'y aura qu'à employer les formules données dans l'art. 44. des *Additions citées*, en ayant attention de mettre dans ces formules $\pi - 1$ à la place de π, parce que nous y avons ſuppoſé $\varrho = \mu + n\nu + \pi$.

Co-

COROLLAIRE 2.

31. Maintenant ayant trouvé u, & y, on aura t par la formule $t = \theta u - Ay$; ainſi on connoitra les deux inconnues t & u de l'équation propoſée (G).

Or, lorſque la racine x eſt poſitive, on a (art. 29.) $u = \pm l^{\varrho}$, $y = \pm L^{\varrho}$, & lorſqu'elle eſt négative, il faut prendre u, & ε avec des ſignes contraires. De plus, on a en général (art. 45. des mêmes *Additions déjà citées*,)

$$L^{\varrho} = \frac{l^{\varrho}(\varepsilon^{\varrho} - \varepsilon) + l^{\varrho-1} E^{\varrho+1}}{E}.$$

Donc, puiſque $E = -AB$, & $\varepsilon = B\theta + \frac{C}{2}$ (art. 29.), ſi on fait pour abréger

$$g^{\varrho} = l^{\varrho}\varepsilon^{\varrho} + l^{\varrho-1} E^{\varrho+1}$$

on aura, dans le cas de la racine $\frac{\varepsilon + \sqrt{\beta}}{E}$ poſitive,

$$u = \pm l^{\varrho}, \quad t = \pm \frac{g^{\varrho} - \frac{C}{2} l^{\varrho}}{B}$$

& dans le cas de la racine $\frac{\varepsilon + \sqrt{\beta}}{E}$ négative

$$u = \mp l^{\varrho}, \quad t = \pm \frac{g^{\varrho} + \frac{C}{2} l^{\varrho}}{B}.$$

Ces formules ſont ſurtout très commodes pour trouver les premieres valeurs de t & u; car, dès que dans la ſérie E, E', E'' &c. on ſera parvenu à un terme $E^{\varrho+1} = 1$ ou -1, ſelon que ϱ ſera pair ou impair, il n'y aura plus qu'à calculer les valeurs de l, l', l'' &c. juſqu'à l^{ϱ}, & l'on aura ſur le champ les valeurs cherchées de t & u.

Mais

Mais, ſi on veut avoir les expreſſions générales de u, & t, alors il faudra calculer encore les nombres H', H'' &c. juſqu'à H^{μ} par les formules ſuivantes

$$H = 0$$
$$H' = 1$$
$$H'' = \lambda^{\mu+2} H'$$
$$H''' = \lambda^{\mu+3} H'' + H'$$
$$H^{IV} = \lambda^{\mu+4} H''' + H''$$
&c.

& faiſant pour abréger

$$f^{\mu} = \frac{l^{\mu} \varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + l^{\mu-1}$$

$$K' = \frac{H' \varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + H'^{-1}$$

$$G^{\pi-1} = H^{\pi-1} \varepsilon^{\mu+\pi-1} + H^{\pi-2} E^{\mu+\pi}$$

on aura par l'une des formules de l'art. 44. des *Additions citées*

$$\left(f^{\mu} + \frac{l^{\mu} \sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi-1} + H^{\pi-1}\sqrt{\beta}\right)\left(K' + \frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{\varepsilon} = g^{\varepsilon} + l^{\varepsilon}\sqrt{\beta},$$

ou bien, en ſuppoſant encore

$$\varphi = f^{\mu} G^{\pi-1} + \frac{l^{\mu} H^{\pi-1} \beta}{E^{\mu+1}}$$

$$\psi = f^{\mu} H^{\pi-1} + \frac{l^{\mu} G^{\pi-1}}{E^{\mu+1}}$$

on aura cette formule

$$\left(\varphi + \psi\sqrt{\beta}\right)\left(K' + \frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{\varepsilon} = g^{\varepsilon} + l^{\varepsilon}\sqrt{\beta}$$

d'où

d'où à cauſe de l'ambiguité naturelle du ſigne de $\sqrt{\beta}$ il eſt aiſé de tirer

$$g^{(} = \frac{\left(\Phi+\psi\sqrt{\beta}\right)\left(K'+\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}+\left(\Phi-\psi\sqrt{\beta}\right)\left(K'-\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}}{2}$$

$$l^{(} = \frac{\left(\Phi+\psi\sqrt{\beta}\right)\left(K'+\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}-\left(\Phi-\psi\sqrt{\beta}\right)\left(K'-\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}}{2\sqrt{\beta}}.$$

Si on fait dans ces expreſſions $n = 0$, on aura $g^{(} = \Phi$ & $l^{(} = \psi$; ainſi Φ & ψ ſeront les premieres valeurs de $g^{(}$ & $l^{(}$, de ſorte que ſi on avoit déjà trouvé ces valeurs de la maniere que nous avons enſeignée ci-deſſus on pourroit d'abord les prendre à la place de Φ & ψ; & alors il ne reſteroit plus qu'à trouver la valeur de H' & de K'. Au reſte, pour pouvoir faire $n = 0$, il faut que n puiſſe être un nombre pair; or c'eſt ce qu'on peut toujours ſuppoſer (art. 30).

Corollaire 3.

32. On peut déduire de là une méthode très ſimple & très élégante pour réſoudre les équations de la forme

$$A = t^2 - \Delta u^2$$

Δ étant un nombre entier poſitif, non carré, & A un nombre entier poſitif ou négatif.

Car ayant dans ce cas $B = 1$, $C = 0$, & $D = -\Delta$, on fera $E = -A$, $\epsilon = \theta$, $E' = \frac{\theta^2-\Delta}{A} = \frac{\epsilon^2-\Delta}{A}$, & $\beta = \Delta$. Ainſi on commencera par chercher un nombre entier ϵ moindre que $\frac{A}{2}$, lequel ſoit tel que $\epsilon^2 - \Delta$ ſoit diviſible par A, & ſi je n'en trouve aucun de cette qualité on en conclura que la propoſée n'eſt pas réſoluble en nombres entiers. Suppoſons donc qu'on ait trouvé une valeur convenable de ϵ, il eſt clair qu'elle pourra être également poſi-

tive ou négative, mais il faudra la prendre telle que $\frac{\varepsilon+\sqrt{\Delta}}{E'} = \frac{A}{\varepsilon-\sqrt{\Delta}}$ ſoit un nombre poſitif, en donnant au radical $\sqrt{\Delta}$ le ſigne poſitif ou négatif à volonté; après quoi on fera le calcul ſuivant, où le ſigne $\prec$ dénote qu'il faut prendre le nombre entier qui eſt immédiatement au deſſous:

$$E = -A$$

$$E' = \frac{\Delta - \varepsilon^2}{E}, \quad \lambda' \prec \frac{\varepsilon + \sqrt{\Delta}}{E'}, \quad \varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$$

$$E'' = \frac{\Delta - \varepsilon'^2}{E'}, \quad \lambda'' \prec \frac{\varepsilon' + \sqrt{\Delta}}{E'}, \quad \varepsilon'' = \lambda'' E'' - \varepsilon'$$

$$E''' = \frac{\Delta - \varepsilon''^2}{E''}, \quad \lambda''' \prec \frac{\varepsilon'' + \sqrt{\Delta}}{E''}, \quad \varepsilon''' = \lambda''' E''' - \varepsilon''$$

&c. &c. &c.

& il ſuffira de pouſſer ces ſéries juſqu'à ce que deux termes correſpondans E^μ, ε^μ reviennent enſemble, en ſorte que l'on ait, par exemple, $E^{\mu+\nu} = E^\mu$ & $\varepsilon^{\mu+\nu} = E^\mu$, car alors on aura auſſi $E^{\mu+\nu+1} = E^{\mu+1}$, $\varepsilon^{\mu+\nu+1} = \varepsilon^{\mu+1}$, $\lambda^{\mu+\nu+1} = \lambda^{\mu+1}$, & ainſi de ſuite.

Or, ſi l'équation propoſée eſt réſoluble, on doit arriver à un terme de la premiere ſérie, comme $E^{\varrho+1}$, lequel ſoit $= 1$ ſi l'expoſant $\varrho + 1$ eſt impair, & $= -1$ ſi cet expoſant eſt pair; alors on fera

$$l' = 1$$
$$l' = \lambda'$$
$$l'' = \lambda'' l' + 1$$
$$l''' = \lambda''' l'' + l'$$
$$l^{IV} = \lambda^{IV} l''' + l''$$
&c.
$$l^\varrho = \lambda^\varrho l^{\varrho-1} + l^{\varrho-2}$$

&

& on aura ſur le champ

$$u = l^{\ell}, \quad t = e^{\ell}/^{\ell} + E^{\ell+1}/^{\ell-1}.$$

Enſuite, nommant T & V ces premieres valeurs de t & u, on aura en général (art. préc.)

$$t = \frac{(T+V\sqrt{\beta})\left(K'+\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{\mu} + (T-V\sqrt{\beta})\left(K'+\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{\mu}}{2}$$

$$u = \frac{(T+V\sqrt{\beta})\left(K'+\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{\mu} - (T-V\sqrt{\beta})\left(K'+\frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}\right)^{\mu}}{2\sqrt{\beta}}.$$

Si l'équation propoſée étoit

$$A = Bt^2 - \Delta u^2$$

il n'y auroit d'autre changement à faire à la ſolution précédente, ſinon qu'il faudroit faire $E = -AB$, $\beta = B\Delta$, & $\ell = B\theta$, θ étant un nombre entier moindre que $\frac{A}{2}$ & tel que $B\theta^2 - \Delta$ fût diviſible par A; enſuite on mettroit partout Bt, & BT à la place de t & T.

Quant aux ſignes de u & t, il eſt viſible qu'ils peuvent être quelconques parce que l'équation ne contient que les carrés de ces quantités.

Il eſt bon de remarquer que quand A eſt un nombre premier on ne pourra trouver qu'une ſeule valeur de θ; car chaque valeur de θ pouvant être également poſitive & négative, équivaudra toujours à deux valeurs; or, lorſque A eſt premier, nous avons démontré que le nombre des valeurs de θ ne peut pas paſſer l'expoſant du degré de l'équation, lequel eſt ici 2; (art. 10) donc &c.

COROLLAIRE 4.

33. Par les principes établis juſqu'ici on peut démontrer ce Théoreme, que toute équation de la forme

$$E^{\prime} = E^{\prime}u^2 - 2\varepsilon uy - Ey^2$$

où ε, E & $E^{\prime}$ ſont des nombres entiers quelconques, eſt toujours réſoluble en nombres entiers d'une infinité de manieres, lorſque E & $E^{\prime}$ ſont de même ſigne.

Car nous avons démontré (art. 41. des *Additions au Mém. ſur la réſol. des équat. num.*) que dans ce cas la ſérie E, $E^{\prime}$, $E^{\prime\prime}$ &c. ſera néceſſairement périodique dès le premier ou le ſecond terme; en ſorte qu'on ſera ſûr que le terme $E^{\prime}$ reviendra néceſſairement à chaque période; ainſi on aura, par exemple, $E^{\prime} = E^{\nu+1} = E^{2\nu+1} =$ &c. $= E^{n\nu+1}$; or de ce que nous avons vu ci-deſſus dans les art. 18. & 29, il eſt facile de conclure que l'on a en général

$$\pm E^{\varrho+1} = E^{\prime}(l^{\varrho})^2 - 2\varepsilon l^{\varrho}L^{\varrho} - E(L^{\varrho})^2$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas où ϱ eſt pair, & l'inférieur pour le cas où ϱ eſt impair; donc, ſi on fait $\varrho = n\nu$, & qu'on prenne pour n un nombre quelconque entier poſitif de maniere que $n\nu$ ſoit pair, on aura

$$E^{\prime} = E^{\prime}(l^{\varrho})^2 - 2\varepsilon l^{\varrho}L^{\varrho} - E(L^{\varrho})^2$$

de ſorte que $u = \pm l^{\varrho}$ & $y = \pm L^{\varrho}$.

Si l'équation à réſoudre étoit

$$-E^{\prime} = E^{\prime}u^2 - 2\varepsilon uy - Ey^2$$

il eſt clair qu'elle ſeroit auſſi réſoluble d'une infinité de manieres ſi ν étoit impair; car alors en prenant n impair, $n\nu$ ſeroit auſſi impair.

Si on fait $E^{\prime} = 1$, & $\varepsilon = 0$, on a le cas du Probleme de M. *Fermat* dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire. De grands Géometres avoient déjà donné des méthodes pour réſoudre ce Probleme (voyez l'Algebre de *Wallis* chap. XCVIII, & ſurtout ſon *Com-*

Commercium epiſtolicum; voyez auſſi les Commentaires de Pétersbourg Tom. VI. des anciens & Tom. XI. des nouveaux,) mais nous croyons être les premiers qui ayons démontré rigoureuſement que le probleme eſt toujours néceſſairement réſoluble en nombres entiers (voyez le Tome IV. des Mémoires de Turin & le Volume de l'année 1767 de ceux de cette Académie pag. 272.)

SCOLIE.

34. Il n'eſt pas inutile de remarquer que les quantités K' & $\frac{H'}{E^{\mu+1}}$ qui entrent dans les expreſſions générales de l^{ξ} & L^{ξ} (art. 31.) ſont toujours telles que

$$(K')^2 - \beta\left(\frac{H'}{E^{\mu+1}}\right)^2 = \pm 1$$

le ſigne ſupérieur ayant lieu lorſque ν eſt pair, & l'inférieur lorſque ν eſt impair.

Pour démontrer cette propoſition dans toute ſa généralité, il faut remonter aux formules de l'art. 44. des *Additions* citées, & on verra que la quantité $K' + \frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}}$ n'eſt autre choſe que la quantité $H'x^{\mu} + H'^{-1}$ dans laquelle on a ſubſtitué pour x^{μ} ſa valeur $\frac{\sqrt{\beta} + \varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}}$ (on doit ſe ſouvenir que la quantité que nous nommons ici β, eſt celle que nous avons nommée B dans l'endroit cité.) Or la quantité $H'x^{\mu} + H'^{-1}$ eſt égale (art. 25. des mêmes *Additions*) à $x^{\mu+1}x^{\mu+2} \ldots\ldots x^{\mu+\nu}$, de ſorte qu'on aura en ſubſtituant pour $x^{\mu+1}$, $x^{\mu+2}$ &c. leurs valeurs

$$K' + \frac{H'\sqrt{\beta}}{E^{\mu+1}} = \left(\frac{\varepsilon^{\mu+1}+\sqrt{\beta}}{E^{\mu+2}}\right)\left(\frac{\varepsilon^{\mu+2}+\sqrt{\beta}}{E^{\mu+3}}\right) \ldots\ldots \left(\frac{\varepsilon^{\mu+\nu}+\sqrt{\beta}}{E^{\mu+\nu+1}}\right)$$

donc, prenant $\sqrt{\beta}$ en moins, enſuite multipliant enſemble les deux équations, on aura

$$(K')^2 - \beta\left(\frac{H'}{E^{\mu+1}}\right)^2 =$$

$$\frac{(e^{\mu+1})^2 - \beta}{(E^{\mu+2})^2} \cdot \frac{(e^{\mu+2})^2 - \beta}{(E^{\mu+3})^2} \cdot \cdots \cdot \frac{(e^{\mu+\nu})^2 - \beta}{(E^{\mu+\nu+1})^2}.$$

Mais on a (art. 33. des *Additions* citées)

$$\beta = (e^{\mu+1})^2 + E^{\mu+1}E^{\mu+2} = (e^{\mu+2})^2 + E^{\mu+2}E^{\mu+3} = \&c.$$

Donc, faiſant ces ſubſtitutions & effaçant les quantités communes au numérateur & au dénominateur, il viendra

$$(K')^2 - \beta\left(\frac{H'}{E^{\mu+1}}\right)^2 = (-1)^{\nu}\frac{E^{\mu+1}}{E^{\mu+\nu+1}} = \pm 1.$$

Cette démonſtration a lieu, comme l'on voit, ſoit que dans la ſérie E^{μ}, $E^{\mu+1}$ &c. $E^{\mu+\nu}$, il ſe trouve un terme comme $E^{\mu+\pi}$ qui ſoit égal à l'unité ou non; mais le cas où $E^{\mu+\pi} = \pm 1$ a de plus cette propriété que les nombres K' & $\frac{H'}{E^{\mu+1}}$ ſont néceſſairement entiers.

Car, puiſque $x^{\mu+\nu+1} = x^{\mu+1}$, $x^{\mu+\nu+2} = x^{\mu+2}$ &c. il eſt clair que l'on aura $x^{\mu+1} \cdot x^{\mu+2} \cdots x^{\mu+\nu} = x^{\mu+\pi} \cdot x^{\mu+\pi+1} \cdots x^{\mu+\pi+\nu-1}$. Or on peut prouver, comme dans l'art. 25. des *Additions citées*, qu'en faiſant

$$P = 0$$
$$P' = 1$$
$$P'' = \lambda^{\mu+\pi+1}P'$$
$$P''' = \lambda^{\mu+\pi+2}P'' + P'$$
$$P^{IV} = \lambda^{\mu+\pi+3}P''' + P''$$
&c.

on aura $x^{\mu+\pi}.x^{\mu+\pi+1}.\ldots.x^{\mu+\pi+\nu-1} =$
$P'x^{\mu+\pi+\nu-1} + P'_{\nu-1} = P'x^{\mu+\pi-1} + P'_{\nu-1}$.

Donc, mettant pour $x^{\mu+\pi-1}$ ſa valeur $\frac{V\beta+\varepsilon^{\mu+\pi-1}}{E^{\mu+\pi}}$, on aura

$$K' + \frac{H'V\beta}{E^{\mu+1}} = \frac{P'\varepsilon^{\mu+\pi-1}}{E^{\mu+\pi}} + P'_{\nu-1} + \frac{P'V\beta}{E^{\mu+\pi}};$$

donc, à cauſe de l'irrationelle $V\beta$, on aura

$$K' = \frac{P'\varepsilon^{\mu+\pi-1}}{E^{\mu+\pi}} + P'_{\nu-1}, \quad \&$$

$$\frac{H'}{E^{\mu+1}} = \frac{P'}{E^{\mu+\pi}};$$

mais $E^{\mu+\pi} = \pm 1$ (hyp.) & P', $P'_{\nu-1}$ & $\varepsilon^{\mu+\pi-1}$ ſont toujours des nombres entiers; donc &c.

Nous avons vu (art. 30.) qu'on peut toujours ſuppoſer que ν ſoit pair; ainſi les nombres K' & $\frac{H'}{E^{\mu+1}}$ ſeront toujours tels que l'exige le Probleme de M. *Fermat*; d'où l'on voit que la ſolution de ce probleme eſt néceſſaire pour la ſolution générale de tous les problemes indéterminés du ſecond degré. (Voyez le Tome VI. des anciens Mémoires de Pétersbourg & le Tome IX. des nouveaux.)

Nous remarquerons encore que les mêmes nombres K' & $\frac{H'}{E^{\mu+1}}$ ne dépendent que du nombre β, de ſorte qu'ils ſont toujours les mêmes pour toutes les équations où β a une même valeur.

Car, puiſque $\lambda^{\mu+\pi+1} < \frac{\varepsilon^{\mu+\pi}+V\beta}{E^{\mu+\pi+1}}$, il faudra que $\frac{\varepsilon^{\mu+\pi}+V\beta}{E^{\mu+\pi+1}} > 1$; mais à cauſe de $\beta = (\varepsilon^{\mu+\pi})^2 + E^{\mu+\pi}\times$

E^{μ}

$E^{\mu+\pi+1}$, on a $\frac{\varepsilon^{\mu+\pi}+\sqrt{\beta}}{E^{\mu+\pi+1}} = \frac{E^{\mu+\pi}}{\sqrt{\beta}-\varepsilon^{\mu+\pi}}$; donc, à cauſe de $E^{\mu+\pi} = \pm 1$ (hyp.), il faudra que $\frac{\pm 1}{\sqrt{\beta}-\varepsilon^{\mu+\pi}} > 1$; de ſorte que $\varepsilon^{\mu+\pi}$ ne pourra être que le nombre entier qui ſera immédiatement plus petit ou plus grand que $\sqrt{\beta}$ ſuivant qu'on aura $E^{\mu+\pi} = 1$ ou $= -1$; ainſi $\varepsilon^{\mu+\pi}$ & $E^{\mu+\pi}$ ſeront donnés; par conſéquent les termes ſuivans le ſeront auſſi par les formules de l'art. 29, auſſi bien que les nombres $\lambda^{\mu+\pi+1}$, $\lambda^{\mu+\pi+2}$ &c.; donc &c.

Il s'enſuit auſſi de cette démonſtration qu'en général tout terme de la ſérie E, E′, E″ &c. qui eſt égal à ± 1 eſt néceſſairement périodique; car ſoit $E^{\ell+1}$ ce terme, donc $\varepsilon^{\ell+1}$ ſera égal au nombre entier qui eſt immédiatement au deſſous ou au deſſus de $\sqrt{\beta}$ ſelon que $E^{\ell+1}$ ſera $= +1$ ou $= -1$; donc, à cauſe de $\beta = (\varepsilon^{\ell+1})^2 + E^{\ell+1}E^{\ell+2}$, il eſt viſible que $E^{\ell+1}$ & $E^{\ell+2}$ ſeront néceſſairement l'un & l'autre de même ſigne; donc celui de ces deux termes qui ſera moindre que $\sqrt{\beta}$ ſera néceſſairement un des termes périodiques (art. 41. des *Additions* citées); mais $E^{\ell+1} = \pm 1$ (hyp.), donc &c.; donc $\ell + 1$ ſera néceſſairement $=$ ou $> \mu$.

Second cas, lorſque $C^2 - 4BD < 0$.

35. Ayant fait la ſubſtitution de $\theta u - Ay$ à la place de t, comme dans l'art. 29, on aura à réſoudre l'équation (H)

$$Pu^2 + Quy + Ry^2 = 1$$

qui ſera telle que l'équation

$$Px^2 + Qx + R = z = 0$$

n'aura que des racines imaginaires (art. 21.); de ſorte qu'on aura néceſſairement le cas de l'art. 20.

On

On fera donc l'équation

$$\frac{dz}{dx} = 2Px + Q = 0$$

laquelle donne $x = -\frac{Q}{2P}$, & comme l'équation $z = 0$ n'a que deux racines imaginaires on ſera ſûr que la racine que nous venons de trouver portera néceſſairement à un *minimum*. Or ſubſtituant cette valeur de x dans l'expreſſion de z, on aura $z = \frac{4PR - Q^2}{4P}$; ce ſera la plus petite valeur de z que nous avons déſigné dans l'art. cité par Z, de ſorte qu'en ſubſtituant les valeurs de P, Q, R de l'art. 29, on aura

$$Z = \frac{4BD - C^2}{4\left(\frac{B\theta^2 + C\theta + D}{A}\right)}$$

& la valeur de y ne pourra jamais ſurpaſſer le nombre $\frac{1}{\sqrt{Z}}$, c'eſt à dire le nombre $\frac{2\sqrt{\left(\frac{B\theta^2 + C\theta + D}{A}\right)}}{\sqrt{(4BD - C^2)}}$.

Maintenant il ne s'agira que de réduire en fraction continue la fraction $-\frac{Q}{2P}$, c'eſt à dire celle-ci

$$\frac{2B\theta + C}{2\left(\frac{B\theta^2 + C\theta + D}{A}\right)},$$

ce qu'on peut faire aiſément par la méthode dont nous avons parlé dans l'art. 26; enſuite on formera deux ſéries de fractions convergentes analogues à celles que nous avons déſignées par (D) & (E), dans l'art. 11, qu'il ſuffira de continuer juſqu'à ce qu'on parvienne à une

fraction dont le dénominateur ſurpaſſe la limite trouvée ci-deſſus; & les termes de ces fractions donneront les nombres qu'on pourra admettre pour u, & y, de ſorte qu'il n'y aura plus qu'à les eſſayer ſucceſſivement pour trouver ceux qui pourront ſatisfaire à l'équation propoſée. Déſignons par $\frac{l}{L}$ chacune de ces fractions, & ſi l'équation (H) eſt réſoluble en nombres entiers, on aura néceſſairement $u = \pm l$, $y = \pm L$ lorſque la racine $-\frac{Q}{2P}$ eſt poſitive, & $u = \mp l$, $y = \pm L$ lorſque cette racine eſt négative (art. 16).

Au reſte il ſeroit peut-être encore plus court, pour réſoudre le cas préſent, d'eſſayer d'abord, dans l'équation propoſée (G), à la place de u tous les nombres entiers moindres que $\sqrt{\left(\frac{4AB}{4BD-C^2}\right)}$; car en multipliant cette équation par $4B$ elle devient $4AB = (2Bt + Cu)^2 + (4BD - C^2)u^2$, d'où, à cauſe que $4BD - C^2$ eſt ſuppoſé poſitif, il eſt clair que u ne ſauroit jamais ſurpaſſer la racine carrée de $\frac{4AB}{4BD-C^2}$.

Troiſieme cas, lorſque $C^2 - 4BD = 0$.

36. Ce cas rentre naturellement dans le premier, où nous avons ſuppoſé réelles les racines de l'équation $z = 0$; mais, puiſque ces racines ſont de plus égales dans le cas préſent, on peut ſimplifier beaucoup la réſolution de l'équation (G) du Probleme; car il eſt clair qu'elle peut ſe mettre ſous cette forme

$$A = \frac{(2Bt + Cu)^2}{4B}, \quad \text{ou bien}$$

$$4AB = (2Bt + Cu)^2;$$

d'où l'on voit que pour que l'équation ſoit réſoluble il faut que AB ſoit

ſoit un carré; ſuppoſons donc $AB = E^2$, & tirant la racine carrée on aura

$$2Bt + Cu = \pm 2E$$

équation réduite au cas du Probleme 4.

EXEMPLE 2.

37. Soit propoſé de réſoudre l'équation

$$101 = t^2 - 13u^2,$$

qui eſt, comme l'on voit, dans le cas du *Coroll.* 3, en faiſant $A = 101$, & $\Delta = 13$.

On cherchera d'abord un nombre entier ε moindre que $\frac{101}{2}$, & tel que $\varepsilon^2 - 13$ ſoit diviſible par 101; & l'on trouvera $\varepsilon = 35$; or 101 étant un nombre premier on ſera déjà ſûr qu'il n'y aura point d'autre nombre que celui-ci qui puiſſe être pris pour ε. Or, comme on a ici A poſitif, & $\varepsilon > \sqrt{\Delta}$, il eſt évident que, pour que $\frac{A}{\varepsilon - \sqrt{\Delta}}$ ſoit poſitif, il ſuffit que ε le ſoit; ainſi il faudra prendre ε poſitif & $\sqrt{\Delta}$ ſucceſſivement poſitive & négative.

On fera donc en premier lieu

$E = -101$ $\qquad$ $\varepsilon = 35$

$E' = \frac{13-35^2}{-101} = 12$, $\lambda' < \frac{35+\sqrt{13}}{12} = 3$, $\varepsilon' = 3.12 - 35 = 1$

$E'' = \frac{13-1}{12} = 1$, $\lambda'' < \frac{1+\sqrt{13}}{1} = 4$, $\varepsilon'' = 4.1 - 1 = 3$

$E''' = \frac{13-9}{1} = 4$, $\lambda''' < \frac{3+\sqrt{13}}{4} = 1$, $\varepsilon''' = 1.4 - 3 = 1$

$E^{IV} = \frac{13-1}{4} = 3$, $\lambda^{IV} < \frac{1+\sqrt{13}}{3} = 1$, $\varepsilon^{IV} = 1.3 - 1 = 2$

$$E^{V} = \frac{13-4}{3} = 3, \quad \lambda^{V} < \frac{2+\sqrt{13}}{3} = 3, \quad \varepsilon^{V} = 1.3-2 = 1$$

$$E^{VI} = \frac{13-1}{3} = 4, \quad \lambda^{VI} < \frac{1+\sqrt{13}}{4} = 1, \quad \varepsilon^{VI} = 1.4-1 = 3$$

$$E^{VII} = \frac{13-9}{4} = 1, \quad \lambda^{VII} < \frac{3+\sqrt{13}}{1} = 6, \quad \varepsilon^{VII} = 6.1-3 = 3$$

&c. &c. &c.

Je m'arrête d'abord ici parce que je vois que E^{VII} eſt $= 1$ avec un expoſant impair; de ſorte que j'aurai $\varrho = 6$, $E^{\varrho+1} = 1$, $\varepsilon^{\varrho} = \varepsilon^{VI} = 3$; ainſi je n'aurai plus qu'à calculer les nombres l', l'' &c. juſqu'à l^{VI} de la maniere ſuivante

$$l' = 3$$
$$l'' = 4l' + 1 = 13$$
$$l''' = l'' + l' = 16$$
$$l^{IV} = l''' + l'' = 29$$
$$l^{V} = l^{IV} + l''' = 45 = l^{\varrho-1}$$
$$l^{VI} = l^{V} + l^{IV} = 74 = l^{\varrho}$$

& j'aurai ſur le champ

$$u = 74, \quad t = 3.74 + 45 = 267.$$

Ce ſont là les premieres valeurs de t & u; pour trouver maintenant les expreſſions générales de ces nombres, on remarquera que l'on a dans les ſéries précédentes $E^{VII} = E''$, & $\varepsilon^{VII} = \varepsilon''$; donc (art. 29.) $\mu = 2$, $\mu + \nu = 7$, d'où $\nu = 5$; & comme on a en même tems $E^{VII} = 1$, on aura $\mu + \pi = 7$, & de là $\pi = 5$; de ſorte qu'on aura en général $\varrho = \mu + n\nu + \pi + 1 = 6 + 5n$, où, à cauſe de ν impair, il ne faudra prendre pour n que des nombres pairs. On calculera donc les nombres H, H', H'' &c. juſqu'à

qu'à H' par les formules de l'art. 31, & comme $\mu = 2$ & $\nu = 5$ on aura

$$H = 0$$
$$H' = 1$$
$$H'' = \lambda^{IV} H' = 1$$
$$H''' = \lambda^{V} H'' + H' = 2$$
$$H^{IV} = \lambda^{IV} H''' + H'' = 3$$
$$H^{V} = \lambda^{V} H^{IV} + H''' = 20 = H',$$

donc $\frac{H^{\nu}}{E^{\mu+1}} = \frac{H'}{E'''} = 5$, $K' = \frac{H'\varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + H'^{-1} = 5\varepsilon'' + H^{IV} = 18$;

donc

$$t = \frac{(267+74\sqrt{13})(18+5\sqrt{13})^{n} + (267-74\sqrt{13})(18-5\sqrt{13})^{n}}{2}$$

$$u = \frac{(267+74\sqrt{13})(18+5\sqrt{13})^{n} - (267-74\sqrt{13})(18-5\sqrt{13})^{n}}{2\sqrt{13}}$$

Faiſons en ſecond lieu

$E = -101$ $\qquad$ $\varepsilon = 35$

$E' = \frac{13-35^2}{-101} = 12$, $\lambda' < \frac{35-\sqrt{13}}{12} = 2$, $\varepsilon' = 2.12-35 = -11$

$E'' = \frac{13-11^2}{12} = -9$, $\lambda'' < \frac{-11-\sqrt{13}}{-9} = 1$, $\varepsilon'' = -9+11 = 2$

$E''' = \frac{13-4}{-9} = -1$, $\lambda''' < \frac{2-\sqrt{13}}{-1} = 1$, $\varepsilon''' = -1-2 = -3$

$E^{IV} = \frac{13-9}{-1} = -4$, $\lambda^{IV} < \frac{-3-\sqrt{13}}{-4} = 1$, $\varepsilon^{IV} = -4+3 = -1$

$E^{V} = \frac{13-1}{-4} = -3$, $\lambda^{V} < \frac{-1-\sqrt{13}}{-3} = 1$, $\varepsilon^{V} = -3+1 = -2$

$$E^{VI} = \frac{13-4}{-3} = -3,\quad \lambda^{VI} < \frac{-2-\sqrt{13}}{-3} = 1,\quad \varepsilon^{VI} = -3+2 = -1$$

$$E^{VII} = \frac{13-1}{-3} = -4,\quad \lambda^{VII} < \frac{-1-\sqrt{13}}{-4} = 1,\quad \varepsilon^{VII} = -4+1 = -3$$

$$E^{VIII} = \frac{13-9}{-4} = -1,\quad \lambda^{VIII} < \frac{-3-\sqrt{13}}{-1} = 6,\quad \varepsilon^{VIII} = -6+3 = -3$$

&c. &c. &c.

On voit ici que E^{VIII} eſt $= -1$ avec un expoſant pair; par conſéquent on peut prendre $\varrho + 1 = 8$, c'eſt à dire $\varrho = 7$, ainſi on calculera de nouveau les nombres l, l' &c. juſqu'à l^{VII} de cette maniere

$$l' = 2$$
$$l'' = l' + 1 = 3$$
$$l''' = l'' + l' = 5$$
$$l^{IV} = l''' + l'' = 8$$
$$l^{V} = l^{IV} + l''' = 13$$
$$l^{VI} = l^{V} + l^{IV} = 21$$
$$l^{VII} = l^{VI} + l^{V} = 34 = l^{t}$$

& l'on aura (abſtraction faite des ſignes)

$$u = 34,\quad t = -3\cdot 34 - 21 = 123.$$

Maintenant, puiſque $E^{VIII} = E'''$, & $\varepsilon^{VIII} = \varepsilon'''$, on aura ici $\mu = 3$ & $\nu = 5$ comme plus haut; de ſorte que n devra être pair; or nous avons démontré (art. 34.), que les nombres K', & $\frac{H'}{E^{\mu+1}}$ ſont toujours les mêmes pour une même valeur de β; donc on aura auſſi dans le cas préſent $\frac{H'}{E^{\mu+1}} = 5$, $K' = 18$ comme

plus

plus haut; donc, prenant maintenant pour T, & V les premieres valeurs de t & de u que nous venons de trouver, on aura en général

$$t = \frac{(123+34\sqrt{13})(18+5\sqrt{13})^n+(123-34\sqrt{13})(18-5\sqrt{13})^n}{2}.$$

$$u = \frac{(123+34\sqrt{13})(18+5\sqrt{13})^n-(123-34\sqrt{13})(18-5\sqrt{13})^n}{2\sqrt{13}}.$$

Et ces formules combinées avec celles que nous avons trouvées plus haut renfermeront néceſſairement toutes les ſolutions poſſibles en nombres entiers de l'équation propoſée.

EXEMPLE 3.

38. On propoſe de réſoudre l'équation

$$101 = t^2 - 79u^2.$$

Cette équation étant auſſi dans le cas de l'art. 32, on opérera comme on a fait dans l'exemple précédent. On commencera donc par chercher un nombre entier ε moindre que $\frac{101}{2}$ & tel que $\varepsilon^2 - 79$ ſoit diviſible par 101, & l'on trouvera $\varepsilon = 33$; & comme 101 eſt premier, on ſera aſſuré que ce nombre ſera le ſeul de cette qualité.

Or, comme $\varepsilon > \sqrt{79}$, & qu'il faut que $\frac{101}{\varepsilon - \sqrt{79}}$ ſoit un nombre poſitif, il faudra prendre ε poſitivement, & le radical $\sqrt{79}$ pourra être poſitif ou négatif.

On fera donc en premier lieu

$$E = -101 \qquad \varepsilon = 33$$

$$E' = \frac{79-33^2}{-101} = 10, \quad \lambda' < \frac{33+\sqrt{79}}{10} = 4, \quad \varepsilon' = 4.10-33 = 7$$

$$E'' = \frac{79-49}{10} = 3, \quad \lambda'' < \frac{7+\sqrt{79}}{3} = 5, \quad \varepsilon'' = 5.3-7 = 8$$

$$E''' =$$

$E''' = \frac{79-64}{3} = 5$, $\lambda''' < \frac{8+\sqrt{79}}{5} = 3$, $\varepsilon''' = 3.5-8 = 7$

$E^{IV} = \frac{79-49}{5} = 6$, $\lambda^{IV} < \frac{7+\sqrt{79}}{6} = 2$, $\varepsilon^{IV} = 2.6-7 = 5$

$E^{V} = \frac{79-25}{6} = 9$, $\lambda^{V} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1$, $\varepsilon^{V} = 9-5 = 4$

$E^{VI} = \frac{79-16}{9} = 7$, $\lambda^{VI} < \frac{4+\sqrt{79}}{7} = 1$, $\varepsilon^{VI} = 7-4 = 3$

$E^{VII} = \frac{79-9}{7} = 10$, $\lambda^{VII} < \frac{3+\sqrt{79}}{10} = 1$, $\varepsilon^{VII} = 10-3 = 7$

&c. &c. &c.

Je m'arrête ici parce que je vois que $E^{VII} = E'$, & $\varepsilon^{VII} = \varepsilon'$; & comme dans toute la ſérie des nombres E, E', E'' &c. juſqu'à E^{VII}, je n'en trouve aucun qui ſoit égal à l'unité, j'en conclus (art. 30.) que la propoſée n'eſt pas réſoluble au moins d'après la racine $\frac{101}{33-\sqrt{79}}$.

Reſte donc à examiner l'autre racine $\frac{101}{33+\sqrt{79}}$, & pour cela,

On fera en ſecond lieu

$E = -101$ $\varepsilon = 33$

$E' = \frac{79-33^2}{-101} = 10$, $\lambda' < \frac{33-\sqrt{79}}{10} = 2$, $\varepsilon' = 2.10-33 = -13$

$E'' = \frac{79-13^2}{10} = -9$, $\lambda'' < \frac{-13-\sqrt{79}}{-9} = 2$, $\varepsilon'' = -2.9+13 = -5$

$E''' = \frac{79-25}{-9} = -6$, $\lambda''' < \frac{-5-\sqrt{79}}{-6} = 2$, $\varepsilon''' = -2.6+5 = -7$

$E^{IV} = \frac{79-49}{-6} = -5$, $\lambda^{IV} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-5} = 3$, $\varepsilon^{IV} = -3.5+7 = -8$

$E^{V} =$

$$E^{V} = \frac{79-64}{-5} = -3,\ \lambda^{V} < \frac{-8-\sqrt{79}}{-3} = 5,\ \varepsilon^{V} = -3.5+8 = -7$$

$$E^{VI} = \frac{79-49}{-3} = -10,\ \lambda^{VI} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-10} = 1,\ \varepsilon^{VI} = -10+7 = -3$$

$$E^{VII} = \frac{79-9}{-10} = -7,\ \lambda^{VII} < \frac{-3-\sqrt{79}}{-7} = 1,\ \varepsilon^{VII} = -7+3 = -4$$

$$E^{VIII} = \frac{79-16}{-7} = -9,\ \lambda^{VIII} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-9} = 1,\ \varepsilon^{VIII} = -9+4 = -5$$

&c. &c. &c.

Or, puiſque je vois que $E^{VIII} = E^{II}$ & $\varepsilon^{VIII} = \varepsilon^{II}$, & que dans toute la ſérie E, E′ &c. juſqu'à E^{VIII} il n'y a aucun terme égal à l'unité, j'en conclus de même que la propoſée n'eſt pas réſoluble d'après la ſeconde racine.

D'où il s'enſuit que l'équation dont il s'agit n'admet abſolument aucune ſolution en nombres entiers.

EXEMPLE 4.

39. Qu'on propoſe maintenant l'équation ſuivante

$$109 = t^2 + 7u^2,$$

qui eſt, comme l'on voit, dans le cas de l'art. 35.

On aura donc ici (art. 28.) $A = 109$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 7$; & il faudra d'abord chercher un nombre entier θ moindre que $\frac{109}{2}$, & tel que $\theta^2 + 7$ ſoit diviſible par 109; on trouvera $\theta = \pm 50$; & à cauſe que 109 eſt premier, on ſera d'abord aſſuré qu'il n'y aura point d'autres nombres qu'on puiſſe prendre pour θ (art. 10). On ſubſtituera donc dans la propoſée $\pm 50u - 109y$ à la place de t, & la diviſion étant faite par 109 on aura la réduite

$$23u^2 \mp 100uy + 109y^2 = 1.$$

Donc (art. 35) $P = 23$, $Q = \mp 100$, $R = 109$; & à cauſe de $C = 0$, $B = 1$, la limite de y ſera $\sqrt{\left(\frac{\theta^2 + D}{AB}\right)} = \sqrt{\frac{23}{9}} < 2$; de ſorte que y ne pourra être que 0 ou 1; ainſi il ne ſera pas même néceſſaire de chercher les fractions convergentes vers la fraction $\frac{Q}{2P} = \frac{50}{23}$, pour trouver les valeurs de u, & y; car en faiſant $y = 1$ on a $23u^2 \mp 100u + 109 = 1$; d'où $u = \pm 2$, & $t = 100 - 109 = -9$; & faiſant $y = -1$, on aura $u = \mp 2$ & $t = -100 + 109 = 9$; donc en général $u = \pm 2$ & $t = \pm 9$; les ſignes ambigus étant à volonté.

NOU-

NOUVELLE MÉTHODE
POUR
RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS LITTÉRALES
PAR LE MOYEN DES SÉRIES. (*)

PAR MR. DE LA GRANGE.

Je vais donner dans ce Mémoire une méthode très ſimple & très générale pour réduire les racines des équations littérales en ſuites infinies; matiere ſur laquelle pluſieurs Géometres ſe ſont déjà exercés.

Ma méthode a, ſi je ne me trompe, de grands avantages ſur toutes les méthodes connues pour le même objet. 1°. Elle donne l'expreſſion de chaque racine de l'équation propoſée, au lieu que les autres méthodes ne donnent ordinairement que l'expreſſion d'une ſeule racine. 2°. Elle donne les racines cherchées par des ſéries régulieres, c'eſt à dire, telles que leurs termes ſuivent une loi générale & connue, deſorte qu'il eſt très facile de les continuer autant que l'on veut. 3°. Ces ſéries ſont de plus telles qu'on peut aiſément trouver la forme de leurs derniers termes, & en déduire les conditions qui les rendent convergentes ou divergentes. 4°. On peut auſſi par la même méthode avoir l'expreſſion d'une puiſſance quelconque de la racine cherchée, & même d'une fonction quelconque de cette racine. 5°. Enfin cette méthode s'applique également aux équations tranſcendantes, qui renferment des logarithmes & des arcs de cercle, & peut ſervir à réſoudre différens problemes importans de cette eſpece d'une maniere plus ſimple & plus exacte qu'on ne pouvoit le faire juſqu'à préſent.

(*) Lû à l'Académie le 18 Janvier & le 5 Avril 1770.

§. 1.

De la maniere d'avoir la ſomme des puiſſances d'un degré quelconque de toutes les racines d'une équation donnée.

Quoique la ſolution de ce probleme ſoit aſſés connue, je crois pouvoir la donner ici, tant à cauſe du rapport qu'elle a avec le ſujet de ce Mémoire, que parce que la méthode dont je me ſers eſt en quelque façon plus ſimple & plus générale que celles qu'on emploie ordinairement.

1. Soit une équation d'un degré quelconque

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{\&c.} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

dont les racines ſoient p, q, r &c. on aura par la théorie connue des équations $a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{\&c.}$

$$= a\left(1-\frac{x}{p}\right)\left(1-\frac{x}{q}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right) \quad \ldots\ldots \text{(B)}$$

Donc en diviſant par a on aura

$$1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{\&c.}}{a}$$

$$= \left(1-\frac{x}{p}\right)\left(1-\frac{x}{q}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right) \quad \ldots\ldots$$

& prenant les logarithmes de part & d'autre

$$l\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{\&c.}}{a}\right) =$$

$$l\left(1-\frac{x}{p}\right) + l\left(1-\frac{x}{q}\right) + l\left(1-\frac{x}{r}\right) \text{\&c.}$$

Or l'on a en général $l(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \text{\&c.}$;

donc

donc $l\left(1-\frac{x}{p}\right)+l\left(1-\frac{x}{q}\right)+l\left(1-\frac{x}{r}\right)+$ &c.

$$=-x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\text{&c.}\right)$$
$$-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}+\text{&c.}\right)$$
$$-\frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}+\text{&c.}\right)$$
&c.

Donc, ſi on développe la quantité

$$-l\left(1-\frac{bx-cx^2+dx^3-\text{&c.}}{a}\right)$$

en une ſérie de cette forme

$$Ax+Bx^2+Cx^3+\text{&c.}$$

on aura

$$A=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\text{&c.}$$
$$2B=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}+\text{&c.}$$
$$3C=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}+\text{&c.}$$
&c.

2. Puiſqu'on ſuppoſe

$$-l\left(1-\frac{bx-cx^2+dx^3-\text{&c.}}{a}\right)$$
$$=Ax+Bx^2+Cx^3+\text{&c.}$$

on aura en prenant les différentielles de part & d'autre & diviſant par dx

$$\frac{b - 2cx + 3dx^2 - \&c.}{a - bx + cx^2 - dx^3 + \&c.} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \&c.$$

d'où en multipliant en croix & comparant les termes on tire

$$A = \frac{b}{a}$$

$$2B = \frac{Ab - 2c}{a}$$

$$3C = \frac{2Bb - Ac + 3d}{a}$$

& ainſi de ſuite; ce qui donne les formules connues de *Newton*.

De cette maniere on ne peut déterminer chaque coëfficient qu'à l'aide de tous les coëfficiens précédens; mais ſi on vouloit avoir tout de ſuite l'expreſſion du coëfficient d'une puiſſance quelconque x^m, coëfficient que nous appellerons M, & qui ſera par conſéquent égal à

$$\frac{\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \&c.}{m}$$

on pourra s'y prendre de la maniere ſuivante.

3. On conſidérera que

$$l\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \&c.}{a}\right) = l\left(1 - \frac{bx}{a}\right) + l\left(1 - \frac{-cx^2 + dx^3 - \&c.}{a\left(1 - \frac{bx}{a}\right)}\right).$$

Soit

Soit pour abréger

$$\frac{-cx^2+dx^3-\&c.}{a}=X$$

en ſorte que l'on ait

$$l\left(1-\frac{bx-cx^2+dx^3-\&c.}{a}\right)=$$
$$l\left(1-\frac{bx}{a}\right)+l\left(1-\frac{X}{1-\frac{bx}{a}}\right).$$

Donc réduiſant ces deux derniers logarithmes en ſérie on aura

$$-l\left(1-\frac{bx-cx^2+dx^3-\&c.}{a}\right)$$
$$=\frac{bx}{a}+\frac{b^2x^2}{2a^2}+\frac{b^3x^3}{3a^3}+\&c.$$
$$+\frac{X}{1-\frac{bx}{a}}+\frac{X^2}{2\left(1-\frac{bx}{a}\right)^2}+\frac{X^3}{3\left(1-\frac{bx}{a}\right)^3}+\&c.$$
$$=A+Bx+Cx^2+\&c.+Mx^m+\&c.$$

Or on ſait que

$$\frac{1}{1-\frac{bx}{a}}=1+\frac{bx}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^3x^3}{a^3}+\&c.$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{bx}{a}\right)^2}=1+\frac{2bx}{a}+\frac{3b^2x^2}{a^2}+\frac{4b^3x^3}{a^3}\&c.$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{bx}{a}\right)^3}=\frac{1}{2}\left(1.2+\frac{2.3bx}{a}+\frac{3.4b^2x^2}{a^2}+\frac{4.5b^3x^3}{a^3}+\&c.\right)$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{bx}{a}\right)^4} = \frac{1}{2.3}\left(1.2.3 + \frac{2.3.4\,bx}{a} + \frac{3.4.5\,b^2x^2}{a^2} + \frac{4.5.6\,b^3x^3}{a^3} + \text{&c.}\right)$$

& ainſi de ſuite.

Donc, ſi on ſuppoſe pour plus de ſimplicité

$$X = ax^2 + a'x^3 + a''x^4 + \text{&c.}$$
$$X^2 = \beta x^4 + \beta' x^5 + \beta'' x^6 + \text{&c.}$$
$$X^3 = \gamma x^6 + \gamma' x^7 + \gamma'' x^8 + \text{&c.}$$
$$\text{&c.}$$

il eſt facile de voir que le coëfficient de la puiſſance x^m dans la quantité $\frac{X}{1-\frac{bx}{a}}$ développée ſuivant les puiſſances de x ſera repréſenté par

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + a'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \text{&c.} + a^{(m-2)};$$

que celui de la même puiſſance x^m dans la quantité $\frac{X^2}{2\left(1-\frac{bx}{a}\right)^2}$ ſera

$$\frac{1}{2}\left((m-3)\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + (m-4)\beta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \text{&c.} + \beta^{(m-4)}\right)$$

& que dans la quantité $\frac{X^3}{3\left(1-\frac{bx}{a}\right)^3}$, il ſera

$\frac{1}{2.3}$

$$\frac{1}{2.3}\left((m-4)(m-5)\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \&c. + 1.2\,\gamma^{(m-6)}\right),$$

& ainſi des autres.

De là il s'enſuit qu'on aura

$$M = \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^{m} + \alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \alpha'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \&c. + \alpha^{(m-2)}$$
$$+ \frac{1}{2}\left((m-3)\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + (m-4)\beta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \&c. + \beta^{(m-4)}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left((m-4)(m-5)\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \&c. + 1.2\,\gamma^{(m-6)}\right)$$
$$+ \&c.$$

Donc, puiſque $Mm = \frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \&c.$, on aura en général

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \&c.$$
$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{m} + m\alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + m\alpha'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \&c. + m\alpha^{(m-2)} +$$

$$+\frac{m(m-3)}{2}\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4}+\frac{m(m-4)}{2}\beta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5}$$
$$+\text{ \&c. }+\frac{m}{2}\beta^{(m-4)}$$
$$+\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}+\frac{m(m-5)(m-6)}{2.3}\gamma'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7}$$
$$+\text{ \&c. }+\frac{m}{3}\gamma^{(m-6)}$$
$$+\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}\delta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8}$$
$$+\frac{m(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4}\delta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9}$$
$$+\text{ \&c. }+\frac{m}{4}\delta^{(m-8)}$$
$$+\text{ \&c.}$$

3. ***Exemple*** 1. Soit l'équation du fecond degré

$$a-bx+cx^2=0$$

on aura dans ce cas $X=-\frac{cx^2}{a}$; donc $X^2=\frac{c^2x^4}{a^2}$, $X^3=-\frac{c^3x^6}{a^3}$ &c. donc $\alpha=-\frac{c}{a}$, $\beta=\frac{c^2}{a^2}$, $\gamma=-\frac{c^3}{a^3}$ &c., & toutes les autres quantités α', β' &c. nulles; donc, ſi p, & q ſont les racines de cette équation, on aura en général

$$\frac{1}{p^m}+\frac{1}{q^m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m-\frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-3)c^2}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4}$$
$$-\frac{m(m-4)(m-5)c^3}{2.3a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}$$
$$+\text{ \&c.}$$

en

en continuant cette ſérie juſqu'à ce qu'on arrive à des puiſſances négatives de $\frac{b}{a}$.

4. *Exemple* 2. Soit encore l'équation générale du troiſieme degré

$$a - bx + cx^2 - dx^3 = 0$$

on aura dans ce cas $X = \frac{-cx^2 + dx^3}{a} = -\frac{x^2}{a}(c - dx)$, & par conſéquent $X^2 = \frac{x^4}{a^2}(c^2 - 2cdx + d^2x^2)$, $X^3 = \frac{x^6}{a^3}(c^3 - 3c^2dx + 3cd^2x^2 - d^3x^3)$ &c.

Donc $\alpha = -\frac{c}{a}$, $\alpha' = \frac{d}{a}$, $\beta = \frac{c^2}{a^2}$, $\beta' = -\frac{2cd}{a^2}$, $\beta'' = \frac{d^2}{a^2}$, $\gamma = -\frac{c^3}{a^3}$, $\gamma' = \frac{3c^2d}{a^3}$ &c. Donc, nommant p, q, r les trois racines de l'équation propoſée, on aura en général

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m - \frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \frac{md}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3}$$
$$+ \frac{m(m-3)}{2a^2}c^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} - \frac{m(m-4)}{2a^2}\cdot 2cd\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \frac{m(m-5)}{2a^2}d^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3a^3}c^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)}{2.3a^3}\cdot 3c^2d\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7}$$
$$- \frac{m(m-6)(m-7)}{2.3a^3}\cdot 3cd^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8} + \frac{m(m-7)(m-8)}{2.3a^3}d^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

cette ſérie étant continuée juſqu'à ce que l'on parvienne à des puiſſances négatives de $\frac{b}{a}$.

5. *Exemple* 3. Soit l'équation

$$a - bx - x^n = 0,$$

on aura $X = \frac{x^n}{a}$, donc $X^2 = \frac{x^{2n}}{a^2}$, $X^3 = \frac{x^{3n}}{a^3}$ &c. donc $\alpha^{(n-2)} = \frac{1}{a}$, $\beta^{(2n-4)} = \frac{1}{a^2}$ &c. & toutes les autres quantités nulles; donc

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \&c. = \left(\frac{b}{a}\right)^m + \frac{m}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-n} + \frac{m(m-2n+1)}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2n} + \frac{m(m-3n+2)(m-3n+1)}{2.3a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3n} + \frac{m(m-4n+3)(m-4n+2)(m-4n+1)}{2.3.4a^4}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4n} + \&c.$$

juſqu'à ce qu'on arrive à des puiſſances négatives de $\frac{b}{a}$.

Au reſte, quoique nous n'ayons donné que la formule qui exprime la ſomme des puiſſances n^{emes} des quantités $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ &c. (p, q, r &c. étant les racines d'une équation quelconque donnée,) il eſt facile d'avoir auſſi l'expreſſion de la ſomme des puiſſances n^{emes} des racines mêmes p, q, r &c.; pour cela il n'y aura qu'à changer les racines de l'équation propoſée en leurs réciproques en écrivant $\frac{1}{x}$ à la place de x; car, nommant p', q', r' &c. les racines de l'équation transformée, on aura $\frac{1}{p'^m} + \frac{1}{q'^m} + \frac{1}{r'^m} + \&c. = p^m + q^m + r^m + \&c.$

7. Puiſ-

6. Puiſque $X = \alpha x^2 + \alpha' x^3 + \&c.$ $X^2 = \beta x^4 + \beta' x^5 + \&c.$, $X^3 = \gamma x^6 + \gamma' x^7 = \&c.$ (art. 3.), il eſt clair que ſi on fait $x = \frac{1}{y}$, & qu'on nomme Y la fonction de y dans laquelle X ſe changera, on aura $Yy^m = \alpha y^{m-2} + \alpha' y^{m-3} + \&c.$

$$\frac{d.Y^2 y^{m+1}}{dy} = (m-3)\beta y^{m-4} + (m-4)\beta' y^{m-5} + \&c.$$

$$\frac{d^2.Y^3 y^{m+2}}{dy^2} = (m-4)(m-5)\gamma y^{m-6}$$

$$+ (m-5)(m-6)\gamma' y^{m-7} + \&c.$$

D'où il s'enſuit qu'on peut mettre la formule de l'art. cité ſous cette forme

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \&c.\right) = \frac{y^m}{m} + Yy^m + \frac{d.Y^2 y^{m+1}}{2\,dy} + \frac{d^2.Y^3 y^{m+2}}{2.3\,dy^2} + \&c.$$

pourvu qu'on y ſubſtitue après les différentiations $\frac{b}{a}$ à la place de y, & qu'on ait ſoin de rejetter tous les termes qui contiendroient des puiſſances négatives de y ou de $\frac{b}{a}$, comme nous l'avons pratiqué dans les exemples précédens. De cette maniere on pourra très facilement trouver la ſomme des racines d'une équation quelconque élevées à telle puiſſance que l'on voudra.

§. II.

De la maniere de trouver par les ſéries la racine d'une équation quelconque.

7. Reprenons l'équation générale

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \&c. \quad - \quad - \quad - \quad (A)$$

dont on ſuppoſe que les racines ſoient p, q, r &c. & voyons comment on pourra trouver la valeur d'une de ces racines en particulier.

On aura d'abord, comme nous l'avons vu dans le §. préc.

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{&c.}$$
$$= a\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \cdot \cdot \cdot \text{(B).}$$

Qu'on diviſe cette équation par bx, & en y changeant les ſignes on aura

$$1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \text{&c.}}{b}$$
$$= -\frac{a}{bx}\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \cdot \cdot \cdot$$
$$= \frac{a}{bp}\left(1 - \frac{p}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \cdot \cdot \cdot$$

Donc prenant les logarithmes de part & d'autre

$$l\left(1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \text{&c.}}{b}\right) =$$
$$l\frac{a}{bp} + l\left(1 - \frac{p}{x}\right) + l\left(1 - \frac{x}{q}\right) + l\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \text{&c.} \cdot \cdot \text{(C).}$$

Donc, faiſant pour abréger

$$X = \frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \text{&c.}$$

& réduiſant en ſérie les logarithmes de $1 - \frac{X}{b}$, $1 - \frac{p}{x}$, $1 - \frac{x}{q}$ &c. on aura après avoir changé les ſignes

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{&c.}$$

$= l$

$$= l\frac{bp}{a} + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \frac{p^3}{3x^3} + \text{&c.}$$
$$+ x\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \text{&c.} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{(D).}$$

Or cette équation doit être identique puiſqu'elle vient de l'équation identique (B); donc, ſi on remet à la place de X ſa valeur $\frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 + \text{&c.}$ & qu'on ſuppoſe

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{&c.}$$
$$= \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \text{&c.}$$
$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{&c.}$$

on aura par la comparaiſon des termes

$$\alpha = l\frac{bp}{a}, \quad \beta = p, \quad \gamma = \frac{p^2}{2}, \quad \delta = \frac{p^3}{3} \text{ &c.}$$

Ainſi on connoitra non ſeulement la valeur de la racine p, mais auſſi celle de ſon carré, de ſon cube &c. comme auſſi celle de ſon logarithme qui ſera

$$lp = \alpha - l\frac{b}{a} = \alpha + l\frac{a}{b}.$$

9. *Exem-*

8. *Exemple* 1. Soit l'équation du ſecond degré

$$a - bx + cx^2 = 0$$

on aura donc $X = \frac{a}{x} + cx$, donc $X^2 = \frac{a^2}{x^2} + 2ac + c^2x^2$, $X^3 = \frac{a^3}{x^3} + \frac{3a^2c}{x} + 3ac^2x + c^3x^3$, $X^4 = \frac{a^4}{x^4} + \frac{4a^3c}{x^2} + 6a^2c^2 + 4ac^3x^2 + c^4x^4$, & ainſi de ſuite; donc

$$\alpha = \frac{2ac}{2b^2} + \frac{4.3a^2c^2}{2.4b^4} + \frac{6.5.4a^3c^3}{2.3.6b^6} + \text{&c.}$$

$$\beta = \frac{a}{b} + \frac{3a^2c}{3b^3} + \frac{5.4a^3c^2}{2.5b^5} + \frac{7.6.5a^4c^3}{2.3.7b^7} + \text{&c.}$$

$$\gamma = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{4a^3c}{4b^4} + \frac{6.5a^4c^2}{2.6b^6} + \frac{8.7.6a^6c^3}{2.3.8b^8} + \text{&c.}$$

&c.

& par conſéquent en mettant x à la place de p

$$lx = l\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{5.4a^3c^3}{2.3b^6} + \text{&c.}$$

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{6.5a^4c^3}{2.3b^7} + \text{&c.}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3c}{b^4} + \frac{5a^4c^2}{2b^6} + \frac{7.6a^5c^3}{2.3b^8} + \text{&c.}$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{a^3}{3b^3} + \frac{a^4c}{b^5} + \frac{6a^5c^2}{2b^7} + \frac{8.7a^6c^3}{2.3b^9} + \text{&c.}$$

& ainſi de ſuite; de ſorte qu'on aura en général

$$\frac{x^m}{m} = \frac{a^m}{mb^m} + \frac{a^{m+1}c}{b^{m+2}} + \frac{(m+3)a^{m+2}c^2}{2b^{m+4}} + \frac{(m+5)(m+4)a^{m+3}c^3}{2.3b^{m+6}} + \text{&c.}$$

En

En effet cette équation étant réſolue donne

$$x = \frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2c}$$

or, en réduiſant en ſérie le radical $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$, on a $b - \frac{2ac}{b} - \frac{(2ac)^2}{2b^3} - \frac{1.3\,(2ac)^3}{2.3b^5} - \frac{1.3.5\,(2ac)^4}{2.3.4b^7}$ — &c. ou bien $b - 2\left(\frac{ac}{b} + \frac{a^2c^2}{b^3} + \frac{4a^3c^3}{2b^5} + \frac{6.5\,a^4c^4}{2.3b^7} + \text{&c.}\right)$; de ſorte que les deux valeurs de x ſeront

$$\frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{2b^5} - \frac{6.5\,a^4c^3}{2.3b^7} - \text{&c.}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{6.5\,a^4c^3}{2.3b^7} + \text{&c.}$$

or cette derniere eſt préciſément la même que celle que nous avons trouvée plus haut.

9. Comme toute la difficulté ſe réduit à trouver les coëfficiens α, β, γ &c. des puiſſances négatives de x dans la ſérie $\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{&c.}$ (art. 7.), tâchons de rendre la recherche de ces coëfficiens auſſi facile, & en même tems auſſi générale qu'il eſt poſſible. Pour cela je remarque que $\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{&c.} = -l\left(1 - \frac{X}{b}\right)$; de ſorte que comme

$$X = \frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \text{&c.}$$

ſi on fait pour abréger

$$\xi = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - \&c.}{b}$$

on aura $\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \&c. = -l\left(1 - \frac{a}{bx} - \xi\right)$

$= -l\left(1 - \frac{a}{bx}\right) - l\left(1 - \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}}\right)$; de ſorte qu'en réduiſant ces deux logarithmes en ſérie on aura

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \&c.$$

$$= \frac{a}{bx} + \frac{a^2}{2b^2x^2} + \frac{a^3}{3b^3x^3} + \&c.$$

$$+ \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}} + \frac{\xi^2}{2\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^2} + \frac{\xi^3}{3\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^3} + \&c.$$

& par conſéquent (art. 7.)

$$= l\frac{bp}{a} + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \frac{p^3}{3x^3} + \&c.$$

$$+ x\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \&c.\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \&c.\right) + \&c. \quad - - - - - \quad (E).$$

Or nous avons déjà vu plus haut (art. 3.) que l'on a, en réduiſant en ſérie,

$$\frac{1}{1-\frac{a}{bx}} = 1 + \frac{a}{bx} + \frac{a^2}{b^2x^2} + \frac{a^3}{b^3x^3} + \&c.$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{bx}\right)^2} = 1 + \frac{2a}{bx} + \frac{3a^2}{b^2x^2} + \frac{4a^3}{b^3x^3} + \&c.$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{bx}\right)^3} = \frac{1}{2}\left(1.2 + \frac{2.3a}{bx} + \frac{3.4a^2}{b^2x^2} + \&c.\right)$$

& ainſi de ſuite.

Donc, ſi on ſuppoſe en général,

$$\xi = \pi + \pi' x + \pi'' x^2 + \pi''' x^3 + \&c.$$
$$\xi^2 = \varrho + \varrho' x + \varrho'' x^2 + \varrho''' x^3 + \&c.$$
$$\xi^3 = \sigma + \sigma' x + \sigma'' x^2 + \sigma''' x^3 + \&c.$$
$$\&c.$$

on trouvera, en faiſant abſtraction des termes qui renfermeroient des puiſſances poſitives de x,

$$\frac{\xi}{1-\frac{a}{bx}} = \pi + \pi'\frac{a}{b} + \pi''\frac{a^2}{b^2} + \pi'''\frac{a^3}{b^3} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{x}\left(\pi\frac{a}{b} + \pi'\frac{a^2}{b^2} + \pi''\frac{a^3}{b^3} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{1}{x^2}\left(\pi\frac{a^2}{b^2} + \pi'\frac{a^3}{b^3} + \pi''\frac{a^4}{b^4} + \&c.\right)$$
$$+ \&c.$$

$$\frac{\xi^2}{2\left(1-\frac{a}{bx}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\left(\varrho + 2\varrho'\frac{a}{b} + 3\varrho''\frac{a^2}{b^2} + 4\varrho'''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2x}\left(2\varrho\frac{a}{b} + 3\varrho'\frac{a^2}{b^2} + 4\varrho''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2x^2}\left(3\varrho\frac{a^2}{b^2} + 4\varrho'\frac{a^3}{b^3} + 5\varrho''\frac{a^4}{b^4} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \text{&c.}$$

$$\frac{\xi^3}{3\left(1-\frac{a}{bx}\right)^3} = \frac{1}{2.3}\left(1.2\sigma + 2.3\sigma'\frac{a}{b} + 3.4\sigma''\frac{a^2}{b^2} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3x}\left(2.3\sigma\frac{a}{b} + 3.4\sigma'\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3x^2}\left(3.4\sigma\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma'\frac{a^3}{b^3} + 5.6\sigma''\frac{a^4}{b^4} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \text{&c.}$$

& ainſi de ſuite.

Donc enfin ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (E) & comparant les termes affectés de x^0, x^{-1}, x^{-2} &c. on trouvera, à cauſe de $l\frac{bp}{a} = lp - l\frac{a}{b}$,

$$lp = l\frac{a}{b} + \pi + \pi'\frac{a}{b} + \pi''\frac{a^2}{b^2} + \pi'''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\varrho + 2\varrho'\frac{a}{b} + 3\varrho''\frac{a^2}{b^2} + 4\varrho'''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(1.2\sigma + 2.3\sigma'\frac{a}{b} + 3.4\sigma''\frac{a^2}{b^2} + \text{&c.}\right)$$

+

$$+ \frac{1}{2.3.4}(1.2.3\tau + 2.3.4\tau'\frac{a}{b} + 3.4.5\tau''\frac{a^2}{b^2} + \text{&c.})$$
$$+ \text{&c.}$$

$$p = \frac{a}{b} + \pi\frac{a}{b} + \pi'\frac{a^2}{b^2} + \pi''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.}$$
$$+ \frac{1}{2}(2\varrho\frac{a}{b} + 3\varrho'\frac{a^2}{b^2} + 4\varrho''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.})$$
$$+ \frac{1}{2.3}(2.3\sigma\frac{a}{b} + 3.4\sigma'\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma''\frac{a^3}{b^3} + \text{&c.})$$
$$+ \text{&c.}$$

$$p^2 = \frac{a^2}{b^2} + 2(\pi\frac{a^2}{b^2} + \pi'\frac{a^3}{b^3} + \pi''\frac{a^4}{b^4} + \text{&c.})$$
$$+ \frac{2}{2}(3\varrho\frac{a^2}{b^2} + 4\varrho'\frac{a^3}{b^3} + 5\varrho''\frac{a^4}{b^4} + \text{&c.}$$
$$+ \frac{2}{2.3}(3.4\sigma\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma'\frac{a^3}{b^3} + 5.6\sigma''\frac{a^4}{b^4} + \text{&c.})$$
$$+ \text{&c.}$$

$$p^3 = \frac{a^3}{b^3} + 3(\pi\frac{a^3}{b^3} + \pi'\frac{a^4}{b^4} + \pi''\frac{a^5}{b^5} + \text{&c.})$$
$$+ \frac{3}{2}(4\varrho\frac{a^3}{b^3} + 5\varrho'\frac{a^4}{b^4} + 6\varrho''\frac{a^5}{b^5} + \text{&c.})$$
$$+ \frac{3}{2.3}(4.5\sigma\frac{a^3}{b^3} + 5.6\sigma'\frac{a^4}{b^4} + 6.7\sigma''\frac{a^5}{b^5} + \text{&c.})$$
$$+ \text{&c.}$$

& ainſi de ſuite.

10. Maintenant, puiſqu'on a ſuppoſé $\xi = \pi + \pi' x + \pi'' x^2 +$ &c. $\xi^2 = \varrho + \varrho' x + \varrho'' x^2 +$ &c. $\xi^3 = \sigma + \sigma' x + \sigma'' x^2 +$ &c. & ainſi de ſuite, il eſt facile de voir qu'on aura, en faiſant $x = \frac{a}{b}$,

$$lp = lx + \xi + \frac{\mathrm{d}.\xi^2 x}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2.\xi^3 x^2}{2.3\,\mathrm{d}x^2} + \text{&c.}$$

$$p = x + \xi x + \frac{\mathrm{d}.\xi^2 x^2}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2.\xi^3 x^3}{2.3\,\mathrm{d}x^2} + \text{&c.}$$

$$p^2 = x^2 + 2\left(\xi x^2 + \frac{\mathrm{d}.\xi^2 x^3}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2.\xi^3 x^4}{2.3\,\mathrm{d}x^2} + \text{&c.}\right)$$

$$p^3 = x^3 + 3\left(\xi x^3 + \frac{\mathrm{d}.\xi^2 x^4}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2.\xi^3 x^5}{2.3\,\mathrm{d}x^2} + \text{&c.}\right)$$

&c.

& en général

$$p^m = x^m + m\left(\xi x^m + \frac{\mathrm{d}.\xi^2 x^{m+1}}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2.\xi^3 x^{m+2}}{2.3\,\mathrm{d}x^2} + \text{&c.}\right) \quad \text{(F)}$$

Ainſi p ſera une des racines de l'équation $0 = a - bx + cx^2 - dx^3 +$ &c., ou bien, à cauſe de $\xi = \frac{cx - dx^2 + \text{&c.}}{b}$, de l'équation

$$a - bx + bx\xi = 0 \quad \text{(G)}$$

ξ étant une fonction de x.

11. *Exemple* 2. Soit par exemple l'équation

$$a - bx + cx^n = 0$$

on aura dans ce cas $bx\xi = cx^n$ & par conſéquent $\xi = \frac{cx^{n-1}}{b}$;

donc

donc en nommant p une des racines de cette équation, on aura en général

$$p^m = x^m + m\left(\frac{cx^{m+n-1}}{b} + \frac{c^2 \mathrm{d}.x^{m+2n-1}}{2b^2\mathrm{d}x} + \frac{c^3\mathrm{d}^2.x^{m+3n-1}}{2.3b^3\mathrm{d}x^2} + \&c.\right)$$

en mettant après les différentiations $\frac{a}{b}$ à la place de x; ainſi on aura (en changeant p en x)

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\left(\frac{ca^{m+n-1}}{b^{m+n}} + \frac{(m+2n-1)c^2a^{m+2n-2}}{2b^{m+2n}} + \frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{m+3n-3}}{2.3.b^{m+3n}} + \frac{(m+4n-1)(m+4n-2)(m+4n-3)c^4a^{m+4n-4}}{2.3.4b^{m+4n}} + \&c.\right)$$

Si on fait $x = \frac{1}{y}$, en ſorte que l'on ait l'équation

$$ay^n - by^{n-1} + c = 0$$

on aura $y^m = x^{-m}$; ainſi il n'y aura qu'à faire m négatif dans la formule précédente pour avoir

$$y^m = \frac{b^m}{a^m} - m\left(\frac{cb^{m-n}}{a^{m-n+1}} - \frac{(m-2n+1)c^2b^{m-2n}}{2a^{m-2n+2}} + \frac{(m-3n+1)(m-3n+2)c^3b^{m-3n}}{2.3a^{m-3n+3}} - \&c.\right)$$

Je dois remarquer à l'égard de cette derniere formule qu'elle a déjà été trouvée par M. *Lambert* qui me l'a communiquée il y a quelque tems ſans démonſtration.

12. *Exemple* 3. Soit l'équation à quatre termes

$$a - bx + cx^n - x^r = 0$$

on fera $bx\xi = cx^n - x^r$, & par conſéquent $\xi = \frac{cx^{n-1} - x^{r-1}}{b}$;

donc $\xi^2 = \frac{c^2x^{2n-2} - 2cx^{n+r-2} + x^{2r-2}}{b^2}$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^{3n-3} - 3c^2x^{2n+r-3} + 3cx^{n+2r-3} - x^{3r-3}}{b^3}$$

& ainſi de ſuite.

Donc en mettant x à la place de p

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\left(\frac{ca^{m+n-1}}{b^{m+n}} - \frac{a^{m+r-1}}{b^{m+r}}\right)$$

$$+ \frac{m}{2}\left(\frac{(m+2n-1)c^2a^{m+2n-2}}{b^{m+2n}} - 2\frac{(m+n+r-1)ca^{m+n+r-2}}{b^{m+n+r}}\right.$$

$$\left. + \frac{(m+2r-1)a^{m+2r-2}}{b^{m+2r}}\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3}\left(\frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{m+3n-3}}{b^{m+3n}}\right.$$

$$- 3\frac{(m+2n+r-1)(m+2n+r-2)c^2a^{m+2n+r-3}}{b^{m+2n+r}}$$

$$+ 3\frac{(m+n+2r-1)(m+n+2r-2)ca^{m+n+2r-3}}{b^{m+n+2r}}$$

$$\left. - \frac{(m+3r-1)(m+3r-2)a^{m+3r-3}}{b^{m+3r}}\right)$$

$$+ \text{ \&c.}$$

14. *Exemple* 4. Soit l'équation générale

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{ \&c.} = 0$$

on

on aura $bx\xi = cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \&c.$, & par conſéquent

$$\xi = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - fx^4 + \&c.}{b}$$

$$\xi^2 = \frac{c^2x^2 - 2cdx^3 + (d^2 + 2ce)x^4 - \&c.}{b^2}$$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^3 - 3cdx^4 + \&c.}{b^3}$$

$$\xi^4 = \frac{c^4x^4 - \&c.}{b^4}$$

&c.

Donc

$$x^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$+ m\left(\frac{a^{m+1}c}{b^{m+2}} - \frac{a^{m+2}d}{b^{m+3}} + \frac{a^{m+3}e}{b^{m+4}} - \frac{a^{m+4}f}{b^{m+5}} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{m}{2}\left(\frac{(m+3)a^{m+2}c^2}{b^{m+4}} - \frac{(m+4)a^{m+3}.2cd}{b^{m+5}} + \frac{(m+5)a^{m+4}(d^2+2ce)}{b^{m+6}} - \&c.\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3}\left(\frac{(m+5)(m+4)a^{m+3}c^3}{b^{m+6}} - \frac{(m+6)(m+5)a^{m+4}.3cd}{b^{m+7}} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3.4}\left(\frac{(m+7)(m+6)(m+5)a^{m+4}c^4}{b^{m+8}} - \&c.\right)$$

$$+ \&c.$$

Si m eſt $= 1$, on aura

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{a^3d}{b^4} + \frac{a^4fe}{b^5} - \frac{a^5f}{b^6} + \&c.$$

$$+\frac{2a^3c^2}{b^5}-\frac{5a^4cd}{b^6}+\frac{3a^5(d^2+2ce)}{b^7}-\&c.$$

$$+\frac{5a^4c^3}{b^7}-\frac{21a^5cd}{b^8}+\&c.$$

$$+\frac{14a^5c^4}{b^9}+\&c.$$

$$+\&c.$$

c'eſt la formule connue de *Newton* pour le retour des ſuites.

14. Conſidérons maintenant l'équation générale

$$a-x+\varphi x=0$$

φx étant une fonction quelconque de x; comparant cette équation avec l'équation $a-bx+bx\xi=0$ de l'art. 10, ou bien $\frac{a}{b}-x+x\xi=0$, on aura $a=\frac{a}{b}$, & $\xi=\frac{\varphi x}{x}$; donc, ſi on dénote par p une des racines de l'équation propoſée, on aura par la formule (F) de l'art. cité

$$p^m=x^m+m\left(x^{m-1}\varphi x+\frac{\mathrm{d}.x^{m-1}(\varphi x)^2}{2\,\mathrm{d}x}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{d}^2.x^{m-1}(\varphi x)^3}{2.3\,\mathrm{d}x}+\&c.\right)$$

en faiſant, après les différentiations, $x=a$.

Or, puiſque $mx^{m-1}=\frac{\mathrm{d}.x^m}{\mathrm{d}x}$, il eſt viſible que la formule précédente peut ſe mettre ſous cette forme

$$p^m=x^m+\frac{\mathrm{d}.x^m}{\mathrm{d}x}\varphi x+\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}.x^m}{\mathrm{d}x}(\varphi x)^2}{2\,\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2.\frac{\mathrm{d}.x^m}{\mathrm{d}x}(\varphi x)^3}{2.3\,\mathrm{d}x^2}+\&c.$$

D'où

D'où il eſt facile de conclure qu'une fonction quelconque de p comme ψp ſera exprimée de la maniere ſuivante

$$\psi p = \psi x + \frac{\mathrm{d}.\psi x}{\mathrm{d}x}\Phi x + \frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}.\psi x}{\mathrm{d}x}(\Phi x)^2}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2.\frac{\mathrm{d}.\psi x}{\mathrm{d}x}(\Phi x)^3}{2.3\,\mathrm{d}x^2} + \text{ \&c.}$$

pourvu qu'on change, comme nous l'avons dit, x en α après avoir exécuté les différentiations indiquées; ce qui fournit le théoreme ſuivant qui eſt très remarquable par ſa ſimplicité & par ſa généralité.

15. *Théoreme.* Soit l'équation

$$\alpha - x + \Phi x = 0 \quad - \quad - \quad - \quad \text{(H)}$$

Φx étant une fonction quelconque de x. Que p ſoit une des racines de cette équation, c'eſt à dire, une des valeurs de x, & qu'on demande la valeur d'une fonction quelconque de p comme ψp. Qu'on dénote, pour plus de ſimplicité, la quantité $\frac{\mathrm{d}.\psi x}{\mathrm{d}x}$ par $\psi' x$, & je dis qu'on aura en général

$$\psi p = \psi x + \Phi x \psi' x + \frac{\mathrm{d}.(\Phi x)^2 \psi' x}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2.(\Phi x)^3 \psi' x}{2.3\,\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^3.(\Phi x)^4 \psi' x}{2.3.4\,\mathrm{d}x^3} + \text{ \&c.} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{(I)}$$

où il faudra changer x en α après les différentiations.

16. Si on fait $x = \alpha y$, en ſorte que l'équation (H) devienne $1 - y + \frac{\Phi(\alpha y)}{\alpha} = 0$, & que q ſoit la valeur de y, on aura l'expreſſion d'une fonction quelconque ψq en mettant dans la formule

mule (!) q à la place de p, y à la place de x, $\frac{\Phi(\alpha y)}{\alpha}$ à la place de Φy, & faiſant enſuite $y = 1$ après les différentiations.

Donc, puiſque $q = y = \frac{x}{\alpha}$, on aura

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi y + \frac{\Phi(\alpha y)\,\psi' y}{\alpha} + \frac{\mathrm{d}.\Phi(\alpha y)^2\,\psi' y}{2\alpha^2\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}^2.\Phi(\alpha y)^3\,\psi' y}{2.3\alpha^3\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^3.\Phi(\alpha y)^4\,\psi' y}{2.3.4\alpha^4\mathrm{d}y^3} + \&c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K)$$

où la variable y doit être ſuppoſée $= 1$ après toutes les différentiations.

17. Donc, comme $\psi y = \int \psi' y\,\mathrm{d}y$, ſi on prend la fraction

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - z\,\frac{\Phi(\alpha y)}{\alpha}\right)}$$

& qu'on la développe ſuivant les puiſſances de z, ce qui donnera

$$\frac{\psi' y}{z} + \frac{\Phi(\alpha y)\,\psi' y}{\alpha} + z\,\frac{\Phi(\alpha y)^2\psi' y}{\alpha^2} + z^2\frac{\Phi(\alpha y)^3\psi' y}{\alpha^3} + \&c.$$

qu'enſuite on y change $\frac{1}{z}$ en $\int \mathrm{d}y$., z en $\frac{\mathrm{d}.}{2\,\mathrm{d}y}$, z^2 en $\frac{\mathrm{d}^2}{2.3\,\mathrm{d}y^2}$, z^3 en $\frac{\mathrm{d}^3.}{2.3.4\,\mathrm{d}y^3}$ & ainſi des autres puiſſances de z; & qu'après avoir exécuté les différentiations indiquées de cette maniere, on faſſe $y = 1$, on aura la valeur de $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, x étant une des racines de l'équation (H) $\alpha - x + \Phi x = 0$.

Ainſi

Ainſi on pourra faire en ſorte que la ſérie qui repréſente la valeur de $\psi\left(\frac{x}{a}\right)$ ſoit ordonnée par rapport à telle lettre qu'on voudra; car pour cela il n'y aura qu'à ordonner par rapport à cette même lettre la ſérie réſultante de la fraction $\frac{1}{1 - z\frac{\Phi(ax)}{a}}$, comme on va le voir dans les exemples ſuivans.

18. *Exemple* 5. Reprenons l'équation générale de l'exemple 4, ſavoir

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \&c.$$

& comparant avec l'équation (H), on aura après avoir diviſé par b

$$a = \frac{a}{b}, \quad \Phi x = \frac{cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \&c.}{b}.$$

Donc $\frac{\Phi(ay)}{a} = \frac{cay^2}{b^2} - \frac{da^2y^3}{b^3} + \frac{ea^3y^4}{b^4} - \frac{fa^4y^5}{b^5} + \&c.$;

de ſorte que la fraction $\frac{1}{1 - z\frac{\Phi(ay)}{a}}$ ſera

$$\frac{1}{1 - z\frac{cay^2}{b^2} + z\frac{da^2y^3}{b^3} - z\frac{ea^3y^4}{b^4} + \&c.}$$

Réduiſons cette fraction en ſérie, & ſuppoſons d'abord que la ſérie ſoit ordonnée par rapport à la lettre b, il eſt clair qu'à cauſe que les dimenſions de y & $\frac{1}{b}$ ſont partout les mêmes, cette ſérie ſera de la forme ſuivante

$$1 + \frac{Py^2}{b^2} - \frac{Qy^3}{b^3} + \frac{Ry^4}{b^4} - \frac{Sy^5}{b^5} + \&c.$$

de ſorte qu'en multipliant en croix & comparant les termes on trouvera

$$P = acz$$
$$Q = a^2dz$$
$$R = a^3ez + aczP$$
$$S = a^4fz + a^2dzP + aczQ$$
$$T = a^5gz + a^3ezP + a^2dzQ + aczR$$
&c.

Or, ſi on développe ces valeurs en les ordonnant par rapport aux puiſſances de z, il eſt facile de voir qu'elles ſeront exprimées de cette maniere

$$P = Az$$
$$Q = Bz$$
$$R = Cz + C'z^2$$
$$S = Dz + D'z^2$$
$$T = Ez + E'z^2 + E''z^3$$
&c.

& l'on trouvera

$$A = ac$$
$$B = a^2d$$
$$C = a^3e, \quad C' = acA$$
$$D = a^4f, \quad D' = a^2dA + acB$$
$$E = a^5g, \quad E' = a^3eA + a^2dB + acC, \quad E'' = acC'$$
&c.

Donc on aura

$$\frac{\psi' y'}{z\left(1-\frac{z\Phi(\alpha y)}{\alpha}\right)}' = \frac{\psi' y}{z} + \frac{A}{b^2} y^2 \psi' y - \frac{B}{b^3} y^3 \psi' y$$

$$+ \frac{C+C'z}{b^4} y^4 \psi' y - \frac{D+D'z}{b^5} y^5 \psi' y + \frac{E+E'z+E''z^2}{b^6} y^6 \psi' y - \&c.$$

Donc, changeant $\frac{1}{z}$ en $\int dy$., z en $\frac{d.}{2\,dy}$ &c. (art. 17.) on aura

$$\psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi y$$
$$+ \frac{A}{b^2} y^2 \psi' y$$
$$- \frac{B}{b^3} y^3 \psi' y$$
$$+ \frac{C}{b^4} y^4 \psi' y + \frac{C'}{b^4} \times \frac{d.y^4 \psi' y}{2\,dy}$$
$$- \frac{D}{b^5} y^5 \psi' y - \frac{D'}{b^5} \times \frac{d.y^5 \psi' y}{2\,dy}$$
$$+ \frac{E}{b^6} y^6 \psi' y + \frac{E'}{b^6} \times \frac{d.y^6 \psi' y}{2\,dy} + \frac{E''}{b^6} \times \frac{d^2.y^6 \psi' y}{2.3\,dy^2}$$
$$- \&c.$$

où il n'y aura plus qu'à faire $y = 1$ après avoir exécuté les différentiations qui ne ſont qu'indiquées.

Or, comme les coëfficiens A, B, C &c. ne renferment point la lettre b, il eſt clair que cette ſérie ſera ordonnée rélativement aux puiſſances négatives de b.

Si on fait $\psi y = y^m$, ce qui donne $\psi' y = m y^{m-1}$, on aura

$b^m x^m$

$$\frac{b^m x^m}{a^m} = 1$$
$$+ \frac{mA}{b^2}$$
$$- \frac{mB}{b^3}$$
$$+ \frac{mC + \frac{m(m+3)}{2}C'}{b^4}$$
$$- \frac{mD + \frac{m(m+4)}{2}D'}{b^5}$$
$$+ \frac{mE + \frac{m(m+5)}{2}E' + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3}E''}{b^6}$$
$$- \text{ \&c.}$$

Et ſi on fait $\psi y = ly$, d'où $\psi' y = \frac{1}{y}$ on aura

$$l\frac{bx}{a} = 1$$
$$+ \frac{A}{b^2}$$
$$- \frac{B}{b^3}$$
$$+ \frac{C + \frac{3}{4}C'}{b^4}$$
$$- \frac{D + \frac{4}{4}D'}{b^5}$$
$$+ \frac{E + \frac{5}{4}E' + \frac{4.5}{2.3}E''}{b^6}$$
$$- \text{ \&c.}$$

19.

19. Les ſéries que nous venons de trouver ſont ordonnées rélativement aux puiſſances de b; ſi on vouloit qu'elles le fuſſent rélativement à celles de a, il n'y aura qu'à ordonner de cette maniere la ſérie réſultante de la fraction

$$\frac{1}{1 - 2\frac{cay^2}{b^2} + 2\frac{da^2y^3}{b^3} - 2\frac{ea^3y^4}{b^4} + \&c.}$$

Or, comme chaque puiſſance de a y eſt toujours multipliée par une pareille puiſſance de $\frac{y}{b}$, il eſt clair que la ſérie aura cette forme

$$1 + P\frac{ay}{b} + Q\frac{a^2y^2}{b^2} + R\frac{a^3y^3}{b^3} + S\frac{a^4y^4}{b^4} + \&c.$$

l'on trouvera

$$P = \frac{czy}{b}$$

$$Q = P\frac{czy}{b} - \frac{dzy}{b}$$

$$R = Q\frac{czy}{b} - P\frac{dzy}{b} + \frac{ezy}{b}$$

$$S = R\frac{czy}{b} - Q\frac{dzy}{b} + P\frac{ezy}{b} - \frac{fzy}{b}$$

&c.

Or, en développant ces valeurs ſuivant les dimenſions de $\frac{zy}{b}$, elles ſe trouveront exprimées de cette maniere

$$P = A\frac{zy}{b}$$

$$Q = B\frac{zy}{b} + B'\left(\frac{zy}{b}\right)^2$$

$$R = C\frac{zy}{b} + C'\left(\frac{zy}{b}\right)^2 + C''\left(\frac{zy}{b}\right)^3$$

$$S = D\frac{zy}{b} + D'\left(\frac{zy}{b}\right)^2 + D''\left(\frac{zy}{b}\right)^3 + D'''\left(\frac{zy}{b}\right)^4$$

&c.

De forte que l'on aura

$$A = c$$
$$B = -d$$
$$C = e$$
$$D = -f$$
&c.
$$B' = cA$$
$$C' = -dA + cB$$
$$D' = eA - dB + cC$$
&c.
$$C'' = cB'$$
$$D'' = -dB' + cC'$$
&c.
$$D''' = cC''$$
&c.

Donc on aura

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - \frac{z\Phi(ay)}{a}\right)} = \frac{\psi' y}{z} + a\frac{Ay^2}{b^2}\psi' y$$
$$+ a^2\left(\frac{By^3}{b^3} + \frac{B'zy^4}{b^4}\right)\psi' y$$
$$+ a^3\left(\frac{Cy^4}{b^4} + \frac{C'zy^5}{b^5} + \frac{C''zy^6}{b^6}\right)\psi' y$$

$+ a^4$

$$+ a^4\left(\frac{Dy^5}{b^5} + \frac{D'zy^6}{b^6} + \frac{D''z^2y^7}{b^7} + \frac{D'''z^3y^8}{b^8}\right)\psi'y$$
$$+ \text{ \&c.}$$

D'où l'on déduira (art. 17.) la formule générale

$$\psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi y$$
$$+ a\frac{A}{b^2}y^2\psi'y$$
$$+ a^2\left(\frac{B}{b^3}y^3\psi'y + \frac{B'}{b^4}\times\frac{d.y^4\psi'y}{2dy}\right)$$
$$+ a^3\left(\frac{C}{b^4}y^4\psi'y + \frac{C'}{b^5}\times\frac{d.y^5\psi'y}{2dy} + \frac{C''}{b^6}\times\frac{d^2.y^6\psi'y}{2.3dy^2}\right)$$
$$+ a^4\left(\frac{D}{b^5}y^5\psi'y + \frac{D'}{b^6}\times\frac{d.y^6\psi'y}{2dy} + \frac{D''}{b^7}\times\frac{d.y^7\psi'y}{2.3dy^2} + \frac{D'''}{b^8}\times\frac{d.y^8\psi'y}{2.3.4dy^3}\right)$$
$$+ \text{ \&c.}$$

où il faudra faire $y = 1$.

Soit p. ex. $\psi y = y^m$, & $\psi'y = my^{m-1}$, on trouvera

$$\frac{b^m x^m}{a^m} = 1$$
$$+\frac{mA}{b}\times\frac{a}{b}$$
$$+\left(\frac{mB}{b} + \frac{m(m+3)B'}{2b^2}\right)\frac{a^2}{b^2}$$
$$+\left(\frac{mC}{b} + \frac{m(m+4)C'}{2b^2} + \frac{m(m+4)(m+5)C''}{2.3b^3}\right)\frac{a^3}{b^3}$$
$$+\left(\frac{mD}{b} + \frac{m(m+5)D'}{2b^2} + \frac{m(m+5)(m+6)D''}{2.3b^3} + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^4}{b^4}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

Donc, ſi $m = 1$, on aura en multipliant par $\frac{a}{b}$

$$x = \frac{a}{b} + \frac{A}{b}\cdot\frac{a^2}{b^2} + \left(\frac{B}{b} + \frac{4B'}{2b^2}\right)\frac{a^3}{b^3} + \left(\frac{C}{b} + \frac{5C'}{2b^2} + \frac{5.6C''}{2.3b^3}\right)\frac{a^4}{b^4} + \left(\frac{D}{b} + \frac{6D'}{2b^2} + \frac{6.7D''}{2.3b^3} + \frac{6.7.8D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^5}{b^5} + \text{&c.}$$

Et ſi on fait $\psi y = ly$, on trouvera à cauſe de $ly = 0$ lorſque $y = 1$

$$l\frac{bx}{a} = \frac{A}{b}\cdot\frac{a}{b} + \left(\frac{B}{b} + \frac{3B'}{2b^2}\right)\frac{a^2}{b^2} + \left(\frac{C}{b} + \frac{4C'}{2b^2} + \frac{4.5C''}{2.3b^3}\right)\frac{a^3}{b^3} + \left(\frac{D}{b} + \frac{5D'}{2b^2} + \frac{5.6D''}{2.3b^3} + \frac{5.6.7D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^4}{b^4} + \text{&c.}$$

Au reſte les valeurs de x^m que nous venons de trouver dans cet article & dans le précédent ſont les mêmes pour le fond que celle que nous avons déjà trouvée plus haut dans l'Exemple 4eme; mais ces valeurs, & ſurtout la derniere, ſont miſes ici ſous une forme plus ſimple & plus com-

commode, par laquelle on voit clairement la loi de la ſérie, en ſorte qu'il eſt très aiſé d'en calculer les différens termes & de la continuer autant qu'on voudra.

20. *Exemple 6.* Soit propoſée l'équation

$$0 = \alpha - x + \beta x^{p} + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \&c.$$

en la comparant avec l'équation (H) de l'art. 15, on aura

$$\varphi x = \beta x^{p} + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \&c.$$

donc

$$\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha} = \beta\alpha^{p-1}y^{p} + \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q} + \delta\alpha^{p+2q-1}y^{p+2q} + \&c.$$

&

$$\frac{1}{1 - z\dfrac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}} = \frac{1}{1 - \beta\alpha^{p-1}y^{p}z - \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q}z - \&c.}$$

Faiſons pour plus de ſimplicité $\alpha^{p-q-1}y^{p-q}z = u$, & l'on aura la fraction

$$\frac{1}{1 - \beta u(\alpha y)^{q} - \gamma u(\alpha y)^{2q} - \delta u(\alpha y)^{3q} - \&c.}$$

laquelle étant développée ſuivant les puiſſances de αy deviendra

$$1 + P(\alpha y)^{q} + Q(\alpha y)^{2q} + R(\alpha y)^{3q} + S(\alpha y)^{4q} + \&c.$$

où l'on aura

$$P = \beta u$$
$$Q = P\beta u + \gamma u$$
$$R = Q\beta u + P\gamma u + \delta u$$
$$S = R\beta u + Q\gamma u + P\delta u + \varepsilon u$$
&c.

& développant de nouveau ces valeurs ſuivant les puiſſances de u

$$P = Au$$
$$Q = Bu + B'u^2$$
$$R = Cu + C'u^2 + C''u^3$$
$$S = Du + D'u^2 + D''u^3 + D'''u^4$$
$$T = Eu + E'u^2 + E''u^3 + E'''u^4 + E^{IV}u^5$$
&c.

les coëfficiens A, B étant déterminés de la maniere ſuivante

$$A = \beta$$
$$B = \gamma,\ B' = \beta A$$
$$C = \delta,\ C' = \gamma A + \beta B,\ C'' = \beta B'$$
$$D = \varepsilon,\ D' = \delta A + \gamma B + \beta C,\ D'' = \gamma B' + \beta C',\ D''' = \beta C''$$
$$E = \zeta,\ E' = \varepsilon A + \delta B + \gamma C + \beta D,\ E'' = \delta B' + \gamma C' + \beta D',$$
$$E''' = \gamma C'' + \beta D'',\ E^{IV} = \beta D'''$$
&c.

Ainſi, remettant à la place de u ſa valeur $\alpha^{p-q-1}y^{p-q}z$, on aura

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - z\frac{\Phi(\alpha y)}{\alpha}\right)} = \frac{\psi' y}{z} + A\alpha^{p-1}y^p\psi' y$$
$$+ B\alpha^{p+q-1}y^{p+q}\psi' y + B'\alpha^{2p-2}zy^{2p}\psi' y$$
$$+ C\alpha^{p+2q-1}y^{p+2q}\psi' y + C'\alpha^{2p+q-2}zy^{2p+q}\psi' y + C''\alpha^{3p-3}z^2y^{3p}\psi' y$$
$$+ \text{&c.}$$

Donc, pratiquant les transformations enſeignées dans l'art. 17, on aura la valeur de $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ exprimée par la ſérie ſuivante, dans laquelle il faudra ſe ſouvenir de faire $y = 1$ après toutes les différentiations.

$$\psi\left(\frac{x}{a}\right) = \psi y$$
$$+ A a^{p-1} y^p \psi' y$$
$$+ B a^{p+q-1} y^{p+q} \psi' y + B' a^{2p-2} \times \frac{d.y^{2p}\psi' y}{2\,dy}$$
$$+ C a^{p+2q-1} y^{p+2q} \psi' y + C' a^{2p+q-2} \times \frac{d.y^{2p+q}\psi' y}{2\,dy}$$
$$+ C' a^{3p-3} \times \frac{d^2.y^{3p}\psi' y}{2.3\,dy^2}$$
$$+ D a^{p+3q-1} y^{p+3q} \psi' y + D' a^{2p+2q-2} \times \frac{d.y^{2p+2q}\psi' y}{2\,dy}$$
$$+ D'' a^{3p+q-3} \times \frac{d^2.y^{3p+q}\psi' y}{2.3\,dy^2} + D''' a^{4p-4} \times \frac{d^3.y^{4p}\psi' y}{2.3.4\,dy^3}$$
$$+ E a^{p+4q-1} y^{p+4q} \psi' y + E' a^{2p+3q-2} \times \frac{d.y^{2p+3q}\psi' y}{2\,dy}$$
$$+ E'' a^{3p+2q-3} \times \frac{d^2.y^{3p+2p}\psi' y}{2.3.dy^2} + E''' a^{4p+q-4} \times \frac{d^3.y^{4p+q}\psi' y}{2.3.4\,dy^3}$$
$$+ E^{IV} a^{5p-5} \times \frac{d^4.y^{5p}\psi' y}{2.3.4.5\,dy^4}$$
$$+ \&c.$$

Si on fait $\psi y = y^m$, & par conſéquent $\psi' y = m y^{m-1}$, on trouvera en faiſant $y = 1$

$$\frac{x^m}{a^m} = 1$$
$$+ mAa^{p-1}$$
$$+ mBa^{p+q-1} + \frac{m(m+2p-1)}{2} B' a^{2p-2}$$

+

$$+ mC\alpha^{p+2q-1} + \frac{m(m+2p+q-1)}{2} C'\alpha^{2p+q-2}$$
$$+ \frac{m(m+3p-1)(m+3p-2)}{2.3} C''\alpha^{3p-3}$$
$$+ mD\alpha^{p+3q-1} + \frac{m(m+2p+2q-1)}{2} D'\alpha^{2p+2p-2}$$
$$+ \frac{m(m+3p+q-1)(m+3p+q-2)}{2.3} D''\alpha^{3p+q-3}$$
$$+ \frac{m(m+4p-1)(m+4p-2)(m+4p-3)}{2.3.4} D'''\alpha^{4p-4}$$
$$+ mE\alpha^{p+4q-1} + \frac{m(m+2p+3q-1)}{2} E'\alpha^{2p+3q-2}$$
$$+ \frac{m(m+3p+2q-1)(m+3p+2q-2)}{2.3} E''\alpha^{3p+2q-3}$$
$$+ \frac{m(m+4p+q-1)(m+4p+q-2)(m+4p+q-3)}{2.3.4} E'''\alpha^{4p+q-4}$$
$$+ \frac{m(m+5p-1)(m+5p-2)(m+5p-3)(m+5p-4)}{2.3.4.5} E^{IV}\alpha^{5p-5}$$
$$+ \&c.$$

Et ſi l'on fait $\psi y = ly$ on aura à cauſe de $ly = 0$

$$l\frac{x}{a} = A\alpha^{p-1}$$
$$+ B\alpha^{p+q-1} + \frac{2p-1}{2} B'\alpha^{2p-2}$$
$$+ C\alpha^{p+2q-1} + \frac{2p+q-1}{2} C'\alpha^{2p+q-2} + \frac{(3p-1)(3p-2)}{2.3} C''\alpha^{3p-3}$$

+ D

$$+ D\alpha^{p+3q-1} + \frac{2p+2q-1}{2} D'\alpha^{3p+2q-2} + \frac{(3p+q-1)(3p+q-2)}{2.3} D''\alpha^{3p+q-3}$$
$$+ \frac{(4p-1)(4p-2)(4p-3)}{2.3.4} D'''\alpha^{4p-4}$$
$$+ E\alpha^{p+4q-1} + \frac{2p+3q-1}{2} E'\alpha^{2p+3q-2} + \frac{(3p+2q-1)(3p+2q-2)}{2.3} E''\alpha^{3p+2q-3}$$
$$+ \frac{(4p+q-1)(4p+q-2)(4p+q-3)}{2.3.4} E'''\alpha^{4p+q-4}$$
$$+ \frac{(5p-1)(5p-2)(5p-3)(5p-4)}{2.3.4.5} E^{IV}\alpha^{5p-5}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

21. *Exemple* 7. Si on avoit l'équation

$$o = \alpha - x^r + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \epsilon x^{p+3q} + \text{\&c.}$$

on pourroit la ramener à celle de l'Exemple précédent en faiſant $x^r = t$ ce qui la changeroit en celle-ci

$$o = \alpha - t + \beta t^{\frac{p}{r}} + \gamma t^{\frac{p+q}{r}} + \delta t^{\frac{p+2q}{r}} + \epsilon t^{\frac{p+3q}{r}} + \text{\&c.}$$

laquelle eſt, comme l'on voit, dans le cas dont nous parlons; de ſorte qu'il n'y aura qu'à changer dans les formules précédentes x en t, p en $\frac{p}{r}$ & q en $\frac{q}{r}$ pour les appliquer à l'équation dont il s'agit ici.

Suppoſons pour plus de ſimplicité $\alpha = \varrho^r$, & l'on aura en mettant x^r à la place de t & conſervant les mêmes valeurs des coëfficiens A, B, B' &c.

$$\psi\left(\frac{x^r}{\varrho^r}\right) = \psi y$$
$$+ A\varrho^{p-r} y^{\frac{p}{r}} \psi' y$$

$$+ B\varrho^{p+q-r} y^{\frac{p+q}{r}} \psi' y + B' \varrho^{2p-2r} \times \frac{\mathrm{d}.y^{\frac{2p}{r}} \psi' y}{2\,\mathrm{d}y}$$

$$+ C\varrho^{p+2q-r} y^{\frac{p+2q}{r}} \psi' y + C' \varrho^{2p+q-2r} \times \frac{\mathrm{d}.y^{\frac{2p+q}{r}} \psi' y}{2\,\mathrm{d}y}$$

$$+ C'' \varrho^{3p-3r} \times \frac{\mathrm{d}^2.y^{\frac{3p}{r}} \psi' y}{2.3\,\mathrm{d}y^2}$$

$$+ D\varrho^{p+3q-r} y^{\frac{p+3q}{r}} \psi' y + D' \varrho^{2p+2q-2r} \times \frac{\mathrm{d}.y^{\frac{2p+2q}{r}} \psi' y}{2\,\mathrm{d}y}$$

$$+ D'' \varrho^{3p+q-3r} \times \frac{\mathrm{d}^2.y^{\frac{3p+q}{r}} \psi' y}{2.3\,\mathrm{d}y^2} + D''' \varrho^{4p-4r} \times \frac{\mathrm{d}^3.y^{\frac{4p}{r}} \psi' y}{2.3.4\,\mathrm{d}y^3}$$

$$+ \&c.$$

où il faudra faire $y = 1$ après les intégrations.

Si on suppose $\psi y = y^{\frac{m}{r}}$, on aura $\psi\left(\frac{x^r}{\varrho^r}\right) = \frac{x^m}{\varrho^m}$; donc on trouvera

$$\left(\frac{x}{\varrho}\right)^m = 1$$

$$+ \frac{m}{r} A\varrho^{p-r}$$

$$+ \frac{m}{r} B\varrho^{p+q-r} + \frac{m(m+2p-r)}{2r^2} B'\varrho^{2p-2r}$$

$$+ \frac{m}{r} C\varrho^{p+2q-r} + \frac{m(m+2p+q-r)}{2r^2} C'\varrho^{2p+q-2r}$$

$$+ \frac{m(m+3p-r)(m+3p-2r)}{2.3r^3} C''\varrho^{3p-3r}$$

+

$$+\frac{m}{r}D\varrho^{p+3q-r}+\frac{m(m+2p+2q-r)}{2r^2}D'\varrho^{2p+2q-2r}$$
$$+\frac{m(m+3p+q-r)(m+3p+q-2r)}{2.3r^3}D''\varrho^{3p+q-3r}$$
$$+\frac{m(m+4p-r)(m+4p-2r)(m+4p-3r)}{2.3.4r^3}D'''\varrho^{4p-4r}$$
$$+\ \&c.$$

Et ſi on ſuppoſe $\psi y = ly$, ce qui donne $\psi\left(\frac{x^r}{\varrho^r}\right) = l\frac{x^r}{\varrho^r} = rl\frac{x}{\varrho}$, on aura en diviſant par r

$$l\frac{x}{\varrho} = \frac{1}{r}A\varrho^{p-r}$$
$$+\frac{1}{r}B\varrho^{p+q-r}+\frac{2p-r}{2r^2}B'\varrho^{2p-2r}$$
$$+\frac{1}{r}C\varrho^{p+2q-r}+\frac{2p+q-r}{2r^2}C'\varrho^{2p+q-2r}+\frac{(3p-r)(3p-2r)}{2.3r^3}C''\varrho^{3p-3r}$$
$$+\frac{1}{r}D\varrho^{p+3q-r}+\frac{2p+2q-r}{2r^2}D'\varrho^{2p+2q-2r}$$
$$+\frac{(3p+q-r)(3p+q-2r)}{2.3r^3}D''\varrho^{3p+q-3r}$$
$$+\frac{(4p-r)(4p-2r)(4p-3r)}{2.3.4r^4}D'''\varrho^{4p-4r}$$
$$+\ \&c.$$

22. Les formules que nous venons de trouver dans les deux derniers Exemples doivent être bien remarquées tant à cauſe de leur généralité que parce qu'elles peuvent être très utiles dans la recherche des différentes racines des équations; ce qui fera l'objet du §. ſuivant.

Mais avant d'y paſſer nous croyons devoir encore faire une obſervation touchant les coëfficiens A, B, B′ &c.; c'eſt que ces coëfficiens ne dépendent nullement de la quantité α, mais ſeulement des autres quantités β, γ, δ &c.; de ſorte que nos ſéries ſeront toujours d'elles mêmes ordonnées rélativement à la lettre α, quelle que ſoit la fonction de $\frac{x}{\alpha}$ qu'elles expriment, puiſquela variable y doit toujours être ſuppoſée égale à l'unité.

De plus, ces coëfficiens une fois trouvés ſerviront pour toutes les fonctions poſſibles de $\frac{x}{\alpha}$, & comme leur loi eſt aſſés ſimple, il ſera facile de les calculer auſſi loin qu'on voudra; on trouvera par exemple

$A = \beta$

$B = \gamma$, $B' = \beta^2$

$C = \delta$, $C' = 2\beta\gamma$, $C'' = \beta^3$

$D = \varepsilon$, $D' = 2\beta\delta + \gamma^2$, $D'' = 3\beta^2\gamma$, $D''' = \beta^4$

$E = \zeta$, $E' = 2\beta\varepsilon + 2\delta\gamma$, $E'' = 3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2$, $E''' = 4\beta^3\gamma$, $E^{IV} = \beta^5$
&c.

§. III.

Maniere de trouver par les ſéries toutes les racines d'une équation quelconque.

23. Nous avons vu dans le §. préc. comment on peut trouver par les ſéries l'expreſſion d'une des racines d'une équation de degré quelconque; nous allons voir dans celui-ci de quelle maniere on peut parvenir à trouver toutes les autres racines que la même équation peut renfermer. Pour cela il eſt néceſſaire de faire quelques obſervations générales ſur la nature des différentes racines d'une même équation, & ſur la maniere de les diſtinguer l'une de l'autre.

Conſidérons l'équation générale

$$0 = a - bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 - \text{&c.}$$

laquel-

laquelle ſoit d'un degré quelconque m, & qui ait tous ſes termes en ſorte qu'aucun des coëfficiens a, b, c &c. ne ſoit nul; ſuppoſons que l'on ait trouvé l'expreſſion de chacune des racines de cette équation, dont le nombre ſera m; il eſt clair que ces expreſſions ſeront des fonctions de a, b, c &c.; mais il faut voir à quel caractere on pourra diſtinguer ces différentes fonctions l'une de l'autre.

Je remarque d'abord que ſi on ſuppoſe $a = 0$ dans l'équation propoſée, elle devient

$$0 = -bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{&c.}$$

de ſorte qu'elle ſe décompoſe en ces deux-ci

$$0 = x$$

$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{&c.}$$

d'où l'on voit que la ſuppoſition de $a = 0$ doit rendre nulle une des racines de l'équation; par conſéquent parmi les fonctions qui expriment ces racines il doit y en avoir une qui s'évanouiſſe en faiſant $a = 0$; & il eſt clair qu'il ne doit y en avoir qu'une ſeule qui ait cette propriété puiſque l'évanouiſſement de a ne réduit à zéro qu'une ſeule racine.

En conſervant la ſuppoſition de $a = 0$, & faiſant maintenant abſtraction de la racine $x = 0$ que nous avons déjà trouvée, les autres racines ſeront déterminées par l'équation

$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{&c.}$$

Suppoſons de plus $b = 0$, & l'équation précédente ſe décompoſera de nouveau en ces deux-ci:

$$0 = x$$

$$0 = c - dx + ex^2 - \text{&c.}$$

ainſi cette ſuppoſition fera évanouir une nouvelle racine; de ſorte que parmi les fonctions qui repréſentent ces racines il faudra qu'il y en ait une qui s'évanouiſſe en faiſant $a = 0$, & $b = 0$.

En continuant le même raiſonnement on verra que parmi les fonctions dont il s'agit il y en aura auſſi une qui s'évanouira par la ſuppoſition de $a = 0$, $b = 0$, & $c = 0$, une qui s'évanouira par la ſuppoſition de $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$; & ainſi de ſuite.

24. Comme il eſt indifférent dans quel ordre les termes d'une équation ſoient diſpoſés, nous ſuppoſerons toujours dans la ſuite qu'ils le ſoient de maniere que les expoſans de l'inconnue forment une progreſſion arithmétique aſcendante; ainſi par premier terme d'une équation il faudra entendre celui où l'inconnue ne ſe trouve pas, par ſecond terme celui où l'inconnue ſe trouve au premier degré, & ainſi de ſuite; cela poſé, nous appellerons en général premiere racine d'une équation celle qui devient nulle lorſque le premier terme de cette équation eſt ſuppoſé nul; ſeconde racine celle qui devient nulle lorſqu'on ſuppoſe nuls les deux premiers termes à la fois; troiſieme racine celle qui devient nulle lorſqu'on ſuppoſe nuls à la fois les trois premiers termes; & ainſi de ſuite.

De cette maniere on pourra toujours diſtinguer les différentes racines d'une équation entr'elles; & ſi l'on a pluſieurs expreſſions des racines d'une même équation, on pourra reconnoître ſi ces expreſſions repréſentent la même racine ou des racines différentes.

25. Nous venons de voir que la ſuppoſition de $a = 0$ & de $b = 0$ doit rendre nulles deux des racines de l'équation propoſée; leſquelles ſeront déjà par cette condition même diſtinguées de toutes les autres; donc, ſi on ſuppoſe d'abord $b = 0$, il eſt viſible qu'en faiſant enſuite $a = 0$ les deux racines dont il s'agit s'évanouiront toutes deux en même tems; or voici comment on pourra dans ce cas diſtinguer ces mêmes racines l'une de l'autre. En faiſant $b = 0$, l'équation propoſée devient

$$a + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \&c.$$

maintenant, au lieu de ſuppoſer a nul, ſuppoſons-le ſeulement infini-

ment

ment petit, il eſt clair que les deux racines dont il s'agit devront auſſi devenir infiniment petites (autrement elles ne s'évanouiroient pas lorſque $a = 0$); ainſi en faiſant x infiniment petit & négligeant ce qu'il faut négliger en vertu de cette ſuppoſition, l'équation précédente deviendra

$$a + cx^2 = 0$$

laquelle donne les deux racines $+\sqrt{-\frac{a}{c}}$ & $-\sqrt{-\frac{a}{c}}$; ce qui fournit un nouveau caractere pour diſtinguer les deux premieres racines de l'équation propoſée tant entr'elles que de toutes les autres. Ainſi il faudra que les fonctions qui repréſentent ces deux racines ſoient telles qu'en y faiſant $b = 0$, & a infiniment petit, elles deviennent les deux racines de l'équation $a + cx^2 = 0$.

On démontrera de même que les fonctions qui repréſentent les trois premieres racines doivent être telles qu'en y ſuppoſant à la fois $b = 0$, & $c = 0$, & a infiniment petit elles deviennent les trois racines de l'équation $a - dx^3 = 0$; & ainſi de ſuite.

De plus, comme la ſeconde & la troiſieme racine deviennent nulles en faiſant $b = 0$ & $c = 0$, après avoir déjà ſuppoſé $a = 0$ (art. préc), ſi on fait d'abord $c = 0$, il eſt viſible que la ſuppoſition de $b = 0$ rendra nulles ces deux racines en même tems, par conſéquent ſi on ſuppoſe ſeulement b infiniment petit, ces mêmes racines deviendront auſſi infiniment petites; mais ſi dans l'équation

$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \&c.$$

dont on a déjà ſéparé la premiere racine par la ſuppoſition de $a = 0$ (art. préc) on fait $c = 0$ & b & x infiniment petits, elle ſe réduit à celle-ci:

$$-b - dx^2 = 0$$

ainſi il faudra que les fonctions qui repréſentent la ſeconde & la troiſieme racine de l'équation propoſée ſoient telles qu'en y faiſant $a = 0$, $c = 0$, & b infiniment petit elles deviennent les racines de l'équation $-b - dx^2$

$— dx^2 = 0$; ce qui peut ſervir encore à reconnoître ces racines & à les diſtinguer de toutes les autres.

Pareillement ſi on fait $c = 0$, $d = 0$, & b infiniment petit, (a étant toujours ſuppoſé nul) on verra que les fonctions qui repréſentent la ſeconde, la troiſieme, & la quatrieme racine de l'équation propoſée, doivent devenir les racines de l'équation

$$— b + ex^3 = 0,$$

& ainſi de ſuite.

En procédant de la même maniere on prouvera auſſi que la troiſieme & la quatrieme racine de l'équation propoſée doivent être exprimées par des fonctions telles qu'en y ſuppoſant d'abord $a = 0$, $b = 0$, & enſuite $d = 0$ & c infiniment petit, elles deviennent les racines de l'équation

$$c + ex^3 = 0$$

& ainſi des autres.

Cette méthode de diſtinguer les racines d'une équation eſt plus générale que celle de l'art. 23, laquelle ne ſauroit être employée dans bien des cas, ſurtout lorſqu'il manque dans l'équation quelqu'un des termes intermédiaires, parce qu'alors l'évanouiſſement d'une ſeule lettre fait évanouir pluſieurs racines à la fois, comme nous venons de le voir.

Après ces réflexions ſur la maniere de diſtinguer les différentes racines d'une équation, voyons la méthode qu'on peut employer pour les trouver; pour la faire mieux comprendre nous l'appliquerons d'abord aux équations que nous avons déjà examinées dans le §. préc.

PROBLEME 1.

26. *On demande les deux racines de l'équation*

$$a — bx + cx^2 = 0.$$

Pre-

Premiere Solution. Nous avons déjà trouvé dans l'art. 8. que l'une des valeurs de x peut s'exprimer par cette ſérie

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \text{&c.}$$

or avant de chercher l'autre valeur il eſt bon d'examiner quelle eſt la racine qui eſt repréſentée par cette ſérie; pour cet effet je ſuppoſe d'abord, ſuivant la méthode de l'art. 23, $a = 0$, & comme je vois que cette ſuppoſition détruit tous les termes de la ſérie dont il s'agit, j'en conclus que cette ſérie exprime la premiere racine de l'équation propoſée; de ſorte que c'eſt la ſeconde qui reſte encore à trouver.

Pour y parvenir je donne à la propoſée cette forme

$$b - cx - \frac{a}{x} = 0$$

qui peut ſe rapporter, comme l'on voit, à l'équation de l'art. 11; en y faiſant $n = -1$, & changeant a en b, b en c, & c en $-a$. De cette maniere on aura par la formule du même art. (en y faiſant $m = 1$) x égal à la ſérie

$$\frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{b^5} - \frac{5.6a^4c^3}{2.3b^7} - \text{&c.}$$

Or en faiſant d'abord $a = 0$ cette ſuite ſe réduit à ſon premier terme $\frac{b}{c}$, lequel s'évanouit enſuite lorſqu'on ſuppoſe $b = 0$; donc (art. 24.) cette ſérie exprimera néceſſairement la ſeconde racine de l'équation propoſée; c'eſt ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans l'art. 8. par la réſolution même de l'équation propoſée.

Donc en général ſi on nomme x' & x'' la premiere & la ſeconde racine de l'équation

$$a - bx + cx^2 = 0$$

on aura par les articles cités

$$x^{I\,m} = \frac{a^m}{b^m} + \frac{m a^{m+1} c}{b^{m+2}} + \frac{m\,(m+3)\,a^{m+2} c^2}{2\,b^{m+4}}$$
$$+ \frac{m\,(m+4)\,(m+5)\,a^{m+3} c^3}{2.3\,b^{m+6}} + \&c.$$
$$x^{II\,m} = \frac{b^m}{c^m} - \frac{m b^{m-1} a}{c^{m-1}} + \frac{m\,(m-3)\,b^{m-4} a^2}{2\,c^{m-2}}$$
$$- \frac{m\,(m-4)\,(m-5)\,b^{m-6} c^3}{2.3\,c^{m-3}}$$

& ſi on veut avoir les logarithmes de x^I & x^{II}, on aura

$$l x^I = l\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{4.5a^3c^3}{2.3b^6} + \frac{5.6.7a^4c^4}{2.3.4b^8} + \&c.$$
$$l x^{II} = l\frac{b}{c} - \frac{ac}{b^2} - \frac{3a^2c^2}{2b^4} - \frac{4.5a^3c^3}{2.3b^6} - \frac{5.6.7a^4c^4}{2.3.4b^8} - \&c.$$

Seconde Solution. Je fais $x^2 = t$, & par conſéquent $x = \sqrt{t}$, ce qui réduit l'équarion propoſée à celle-ci $a + ct - b\sqrt{t} = 0$ laquelle peut ſe comparer de nouveau avec celle de l'art. 11. en y changeant b en $-c$, c en $-b$, x en t, & faiſant $n = \frac{1}{2}$; ainſi faiſant pour plus de ſimplicité $\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)} = \varrho$, on aura

$$t^m = \varrho^{2m} - 2m\varrho^{2m+1}\left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{2m.2m}{2}\varrho^{2m+2}\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$- \frac{2m(2m-1)(2m+1)}{2.3}\varrho^{2m+3}\left(\frac{b}{2a}\right)^3 +$$
$$\frac{2m(2m-2)(2m)(2m+2)}{2.3.4}\varrho^{2m+4}\left(\frac{b}{2a}\right)^4 -$$
$$\frac{2m(2m-3)(2m-1)(2m+1)(2m+3)}{2.3.4.5}\varrho^{2m+5}\left(\frac{b}{2a}\right)^5$$
$$+ \&c.$$

Or

Or x étant $= \sqrt{t}$ il n'y aura qu'à faire $m = \frac{1}{2}$ pour avoir

$$x = \varrho - \varrho^2\left(\frac{b}{2a}\right) + \tfrac{1}{2}\varrho^3\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1.1.3}{2.3.4}\varrho^5\left(\frac{b}{2a}\right)^4 + \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.6}\varrho^7\left(\frac{b}{2a}\right)^6 - \text{\&c.}$$

Mais, puiſque $\varrho = \sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$, il eſt clair que la valeur de ϱ ſera également poſitive & négative; de ſorte qu'en ſubſtituant cette valeur on aura pour x la double ſérie

$$\frac{b}{c} \pm \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{4ac} - \frac{1.1.3}{2.3.4}\cdot\frac{b^4}{2^4a^2c^2} - \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{b^6}{2^6a^3c^3} - \text{\&c.}\right)\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$$

laquelle repréſentera par conſéquent les deux racines de l'équation $a - bx + cx^2 = 0$.

En effet en faiſant $b = 0$ les deux ſéries ſe réduiſent à $\pm\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$; ce qui montre (art. 25.) que ces ſéries repréſentent effectivement la premiere & la ſeconde racine de l'équation dont il s'agit. C'eſt auſſi de quoi on peut ſe convaincre facilement *a poſteriori* en réſolvant en ſérie le radical $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ qui entre dans l'expreſſion de x (art. 8.), mais en prenant $-4ac$ pour le premier terme du binome, & b^2 pour le ſecond.

Donc faiſant $\varrho = \pm\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$ on aura en général dans l'équation

$$a - bx + cx^2 = 0$$

cette double valeur de x^m, ſavoir

$$x^m = \varrho^m \left(1 - \frac{m^2}{2} \cdot \frac{b^2}{4ac} + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4} \cdot \frac{b^4}{2^4 a^2 c^2} - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6} \cdot \frac{b^6}{2^6 a^3 c^3} + \&c.\right)$$

$$- m\varrho^{m+1} \frac{b}{2a}\left(1 - \frac{m^2-1}{2.3} \cdot \frac{b^2}{4ac} + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5} \cdot \frac{b^4}{2^4 a^2 c^2} - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{b^6}{2^6 a^3 c^3} + \&c.\right)$$

Et ſi on veut avoir le logarithme de x on trouvera

$$lx = l\varrho - \varrho \frac{b}{2a}\left(1 + \frac{1.1}{2.3} \cdot \frac{b^2}{4ac} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} \cdot \frac{b^4}{2^4 a^2 c^2} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{b^6}{2^6 a^3 c^3} + \&c.\right)$$

Remarque. Les ſéries trouvées dans la premiere ſolution ont l'avantage de ne renfermer que des quantités rationelles, au lieu que celles de la ſeconde ſolution renferment la quantité irrationelle $\sqrt{-\frac{a}{c}}$, laquelle devient même imaginaire lorſque a, & c ſont de même ſigne, quoique d'ailleurs les racines de l'équation puiſſent être réelles; de ſorte qu'à cet égard les ſéries de la premiere ſolution paroiſſent préférables, puiſqu'elles ſe préſentent toujours ſous une forme réelle; cependant ni les unes ni les autres ne peuvent être regardées comme bonnes à moins qu'elles ne ſoient convergentes; c'eſt ce que nous examinerons plus bas §. IV.

27. Pour peu qu'on ait fait d'attention à la maniere dont nous avons réſolu le Probleme précédent on verra qu'en général, quelle que ſoit l'équation propoſée, on pourra toujours trouver autant de différentes ſéries pour exprimer les racines de cette équation, que l'on pourra faire de combinaiſons deux à deux des termes de la même équation;

tion; & que de plus chacune de ces ſéries ſera ſimple ou double, ou triple &c. ſuivant qu'elle répondra à une combinaiſon où les expoſans de x dans les deux termes différeront l'un de l'autre de l'unité, ou de deux unités, ou de trois &c.

En effet il eſt évident qu'on peut trouver autant de ſéries pour la valeur de x, qu'il y a de manieres de comparer l'équation propoſée à la formule générale $\alpha - x + \varphi x = 0$ de l'art. 15; or, comme on peut prendre pour φx une fonction quelconque de x, il s'enſuit qu'on pourra prendre, pour les deux premiers termes $\alpha - x$ de cette formule, deux quelconques des termes de la propoſée à volonté; & qu'ainſi la comparaiſon pourra ſe faire d'autant de manieres différentes qu'il y aura de combinaiſons poſſibles des termes de cette équation pris deux à deux.

28. Soient en général $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ deux termes quelconques de l'équation propoſée; & ſoit déſignée par X la totalité des autres termes, enſorte que l'équation ſoit miſe ſous cette forme

$$Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu} + X = 0.$$

On diviſera d'abord par Nx^{μ}, ce qui la réduira à celle-ci $\frac{M}{N} - x^{\nu} + \frac{Xx^{-\mu}}{N} = 0$; enſuite on fera $x^{\nu} = t$, & par conſéquent $x = \sqrt[\nu]{t}$, & déſignant par T la fonction de t dans laquelle ſe changera la quantité X par la ſubſtitution de $\sqrt[\nu]{t}$ à la place de x, on aura la transformée

$$\frac{M}{N} - t + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N} = 0$$

laquelle rentre évidemment dans la formule générale $\alpha - x + \varphi x = 0$, en faiſant $\alpha = \frac{M}{N}$, $x = t$ & $\varphi x = \varphi t = \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N}$

On aura donc (art. 15.) en mettant t, ou x' à la place de p

$$\psi.x' = \psi t + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}\psi' t}{N} + \frac{d.(T^2 t^{-\frac{2\mu}{\nu}}\psi' t)}{2N^2 dt}$$

$$+ \frac{d^2(T^3 t^{-\frac{3\mu}{\nu}}\psi' t)}{2.3N^3 dt^2} + \&c.$$

où il faudra faire $t = \frac{M}{N}$ après avoir exécuté les différentiations indiquées.

Donc faisant $\psi t = t^{\frac{1}{\nu}}$ & par conséquent $\psi' t = \frac{t^{\frac{1-\nu}{\nu}}}{\nu}$, pour avoir $\psi.x' = x$, on aura

$$x = t^{\frac{1}{\nu}} + \frac{Tt^{\frac{1-\mu-\nu}{\nu}}}{\nu N} + \frac{d.(T^2 t^{\frac{1-2\mu-\nu}{\nu}})}{\nu N^2 dt}$$

$$+ \frac{d^2.(T^3 t^{\frac{1-3\mu-\nu}{\nu}})}{\nu N^3 dt^2} + \&c. \quad . \quad . \quad . \quad (L)$$

C'est l'expression de la racine x qui résultera de la combinaison des termes $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ de l'équation proposée.

29. Maintenant il est visible que l'expression de x que nous venons de trouver contiendra nécessairement le radical $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ qui proviendra de la substitution de $\frac{M}{N}$ à la place de t; & il est facile de se convaincre que cette expression ne contiendra point d'autre radical; car, puisque X est une fonction rationelle de x, T sera aussi une fonction rationelle de $\sqrt[\nu]{t}$, & par conséquent toute la série qui exprime la valeur de x sera une fonction rationelle $\sqrt[\nu]{t}$, c'est à dire que $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$.

Or

Or on ſait que le radical $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ a ν valeurs différentes qui ſont les racines de l'équation $M - Nx^{\nu} = 0$, & qui (par le théoreme connu de Cotes) peuvent ſe repréſenter en général par la formule

$$\left(\text{cof}\frac{\lambda \times 360^{\circ}}{\nu} + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}\frac{\lambda \times 360^{\circ}}{\nu}\right)\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$$

λ étant ſucceſſivement $= 1, 2, 3$ &c. juſqu'à ν.

Donc, ſi on ſubſtitue cette quantité à la place de $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$, la ſérie qui repréſentera la valeur de x, ſe transformera en ν ſéries qui donneront autant de différentes expreſſions de x.

30. Je dis préſentement que les ν ſéries, ou expreſſions de x qui réſultent de la conſidération des termes $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ de l'équation propoſée, c'eſt à dire celles qu'on trouve en prenant ces deux termes pour les premiers de la formule générale (H), repréſentent néceſſairement ν racines différentes de cette équation, & qu'en particulier elles repréſentent les racines μ^{eme}, $(\mu + 1)^{\text{eme}}$, $(\mu + 2)^{\text{eme}}$ &c. juſqu'à la $(\mu + \nu - 1)^{\text{eme}}$ de la même équation (art. 24).

Pour le prouver il ſuffit de faire voir, ſuivant la méthode de l'art. 25, qu'en ſuppoſant dans l'expreſſion générale de x de la formule (L) les coëfficiens des termes de l'équation propoſée où les expoſans de x ſeroient moindres que μ, chacun égal à zéro, comme auſſi chacun des coëfficiens des termes intermédiaires entre les deux Mx^{μ}, & $Nx^{\mu+\nu}$, & faiſant en même tems M infiniment petit, cette expreſſion ſe réduira à celle-ci $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ qui eſt la racine générale de l'équation $M - Nx^{\nu} = 0$.

Or après la deſtruction des termes dont nous venons de parler, il eſt clair que la quantité X ne renfermera plus que des puiſſances de x plus grandes que $x^{\mu+\nu}$, & qu'ainſi la quantité T ne renfermera

que

que des puiſſances de t plus grandes que $t^{\frac{\mu+\nu}{\nu}}$; d'où il eſt facile de voir que les fonctions $Tt^{\frac{1-\mu-\nu}{\nu}}$, $\frac{d.(T^2 t^{\frac{1-2\mu-\nu}{\nu}})}{dt}$ &c. de la formule (L) ne ſeront plus compoſées que de puiſſances de t plus grandes que $t^{\frac{1}{\nu}}$; donc faiſant $t = \frac{M}{N}$, & ſuppoſant enſuite M infiniment petit, c. à d. t infiniment petit, il eſt évident que toutes ces puiſſances de t s'évanouiront vis-à-vis du premier terme $t^{\frac{1}{\nu}}$ de l'expreſſion de x, laquelle ſe réduira par conſéquent à $t^{\frac{1}{\nu}}$, ou (à cauſe de $t = \frac{M}{N}$) à $\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{\nu}}$.

31. De là il eſt aiſé de conclure que pour trouver toutes les racines d'une équation donnée, par le moyen de nos ſéries, il n'y aura qu'à combiner le premier terme de cette équation avec le dernier, ou immédiatement ce qui donnera une ſérie qui renfermera toutes les racines, ou moyennant les termes intermédiaires, c'eſt à dire en combinant d'abord le premier terme avec quelqu'un des ſuivans, enſuite celui-ci avec le dernier, ou avec quelqu'un de ceux qui le précedent, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on arrive au dernier terme (par cette expreſſion *de combiner deux termes de l'équation propoſée* nous entendons qu'il faut prendre ces deux termes pour les deux premiers de notre formule générale (H); nous nous ſervirons auſſi dans la ſuite de cette même expreſſion abrégée.) Chacune de ces combinaiſons donnera une ſérie ſimple ou double, ou triple &c. qui repréſentera par conſéquent une ou deux, ou trois racines &c. ſuivant l'intervalle qu'il y aura entre les deux termes; de ſorte que quels que ſoient les termes que l'on comparera ſucceſſivement enſemble, on obtiendra toujours autant de racines ni plus ni moins que l'équation en doit avoir.

32. Il eſt bon de remarquer que les ſéries qu'on trouvera en combinant deux termes quelconques de l'équation propoſée auront autant de valeurs réelles, & autant d'imaginaires qu'il y au-

aura de racines réelles & d'imaginaires dans l'équation qu'on pourra faire en égalant ces deux termes a zéro (art. 29.); de plus il eſt clair que l'on ne trouvera de ſéries toutes rationelles que lorſqu'on combinera des termes tels que Mx^{μ} — $Nx^{\mu+\nu}$; ainſi, ſi l'équation a tous ſes termes, on pourra, en combinant chaque terme avec celui qui le ſuit immédiatement, trouver des ſéries toutes rationelles pour l'expreſſion de chacune de ſes racines; mais s'il manque quelque terme dans l'équation, comme ſi on ſuppoſe que le terme Mx^{μ} ſoit ſuivi immédiatement du terme — $Nx^{\mu+\nu}$ en ſorte qu'il manque ν — 1 termes intermédiaires, alors la combinaiſon de ces deux termes conſécutifs donnera une ſérie qui renfermera le radical $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$, & qui repréſentera par conſéquent les différentes racines qu'on auroit trouvées par la conſidération de tous les termes intermédiaires ſi ces termes n'avoient pas manqué.

Donc on aura dans ce cas autant de ſéries imaginaires que le radical $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ aura de valeurs imaginaires, c'eſt à dire qu'il y aura de racines imaginaires dans l'équation $x^{\nu} - \frac{M}{N} = 0$. Or on ſait que dans une équation qui manque de quelques uns de ſes termes, il y a néceſſairement autant de racines imaginaires qu'il y en auroit dans l'équation qu'on pourroit faire, en égalant à zéro la ſomme des deux termes de cette équation entre leſquels devroient ſe trouver les termes manquans; de ſorte qu'en ſuppoſant, comme plus haut, que le terme Mx^{μ} ſoit ſuivi immédiatement du terme — $Nx^{\mu+\nu}$, il y aura néceſſairement dans l'équation autant de racines imaginaires qu'il y en a dans l'équation $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu} = 0$, ou bien $\frac{M}{N} - x^{\nu} = 0$.

De là il s'enſuit qu'en combinant deux à deux tous les termes conſécutifs d'une équation quelconque, on ne trouvera jamais d'expreſſions imaginaires pour les racines que lorſqu'il y aura réellement

des racines imaginaires dans l'équation. Il n'en eſt pas de même lorſqu'on combine des termes qui ne ſont pas immédiatement conſécutifs; dans ce cas il arrivera ſouvent que les racines ſe préſenteront ſous une forme imaginaire, quoiqu'elles ſoient d'ailleurs réelles, comme nous l'avons déjà vu dans la *Remarque* qui eſt à la fin du *Probl. préc.*

33. Enfin il réſulte de ce que nous avons dit dans l'art. 30. que les ſéries trouvées dans les différens Exemples du §. préc. ne repréſentent que les premieres racines des équations propoſées, puiſque toutes ces ſéries ont été trouvées par la combinaiſon des deux premiers termes des mêmes équations; ainſi, pour trouver les autres racines, il n'y aura qu'à combiner le ſecond terme, ou immédiatement avec le dernier, ou avec quelqu'un des intermédiaires, & enſuite celui-ci avec le dernier, comme nous l'avons expliqué dans l'art. cité.

PROBLEME 2.

34. *On demande toutes les racines de l'équation*

$$a - bx + cx^n = 0,$$

n *étant un nombre entier poſitif.*

Premiere Solution. En combinant d'abord les deux premiers termes de cette équation $a - bx$, on trouvera pour x la même ſérie que nous avons déjà trouvée dans l'Exemple 2. de l'art. 11; cette valeur de x ſera donc la premiere racine de l'équation propoſée (art. préc.) que nous nommerons x'; ainſi on aura en général

$$x'^m = \frac{a^m}{b^m}\left(1 + \frac{mca^{n-1}}{b^n} + \frac{m(m+2n-1)c^2a^{2n-2}}{2b^{2n}} + \frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{3n-3}}{2.3b^{3n}} + \&c.\right).$$

Pour trouver maintenant les autres $n - 1$ racines de la même équation, il faudra combiner les deux termes $-bx + cx^n$; c'eſt pourquoi nous

nous mettrons d'abord (art. 28.) l'équation ſous cette forme $\frac{b}{c} - x^{n-1} - \frac{ax^{-1}}{c} = 0$; & enſuite ſous celle-ci:

$$\frac{b}{c} - t - \frac{at^{\frac{1}{1-n}}}{c} = 0,$$

en faiſant $t = x^{n-1}$, & par conſéquent $x = t^{\frac{1}{n-1}}$.

Or, cette équation étant de la même forme que la précédente en x, on pourra faire uſage de la même formule pour en tirer la valeur de t; on mettra donc b à la place de a, c à la place de b, $-a$ à la place de c, & changeant x & t, & n en $\frac{1}{1-n}$, on aura en général

$$t^m = \frac{b^m}{c^m}\left(1 - \frac{mab^{\frac{n}{1-n}}}{c^{\frac{1}{1-n}}} + \frac{m\left(m + \frac{1+n}{1-n}\right)a^2b^{\frac{2n}{1-n}}}{2c^{\frac{2}{1-n}}} - \frac{m\left(m + \frac{2+n}{1-n}\right)\left(m + \frac{1+2n}{1-n}\right)a^3b^{\frac{3n}{1-n}}}{2.3.c^{\frac{3}{1-n}}} + \&c.\right)$$

or, puiſque $t = x^{n-1}$, mettons $\frac{m}{n-1}$ à la place de m, & faiſant pour plus de ſimplicité $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \varrho$, nous aurons

$$x^m = \varrho^m\left(1 - \frac{ma}{(n-1)b\varrho} + \frac{m(m-n-1)a^2}{2(n-1)^2b^2\varrho^2} - \frac{m(m-n-2)(m-2n-1)}{2.3(n-1)^3b^3\varrho^3} + \&c.\right)$$

Or, puiſque la quantité ϱ eſt égale à la racine $(n-1)^{\text{eme}}$ de $\frac{b}{c}$, elle aura $n-1$ valeurs différentes, qui pourront s'exprimer en général de cette maniere

$$\varrho = \left(\text{cof}\,\frac{\lambda \times 360^\circ}{n-1} + \text{ſin}\,\frac{\lambda \times 360^\circ}{n-1}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n-1]{\frac{b}{c}}$$

λ étant égal à 1, ou 2, ou 3 &c. juſqu'à $n-1$.

Donc, ſubſtituant cette expreſſion de ϱ dans la formule précédente, on aura $n-1$ valeurs différentes de x^m; ce ſeront les valeurs de $x^{II\,m}$, $x^{III\,m}$ &c. $(x^n)^m$, en déſignant par x^{II}, x^{III} &c. x^n la ſeconde, la troiſieme &c. juſqu'à la n^{eme} racine de l'équation propoſée.

Ainſi on aura chacune des n racines de cette équation, & même une puiſſance quelconque de ces racines. On pourra trouver auſſi par nos formules une fonction quelconque de ces racines; c'eſt ſurquoi il ne paroit pas néceſſaire d'entrer ici dans un plus grand détail.

Seconde Solution. Prenons maintenant les deux termes extremes $a + cx^n$, & cette combinaiſon nous donnera immédiatement toutes les n racines de l'équation propoſée.

Pour cela on mettra l'équation ſous cette forme $\frac{a}{c} + x^n - \frac{bx}{c} = 0$, & on fera enſuite $x^n = t$, & par conſéquent $x = t^{\frac{1}{n}}$, pour avoir celle-ci

$$\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0.$$

Cette équation pouvant ſe rapporter à l'équation primitive $a - bx - cx^n = 0$, on pourra déduire aiſément la valeur de t^m de celle de $x^{I\,m}$ trouvée ci-deſſus, en changeant ſeulement x^I en t, b en $-c$, c en $-b$, & n en $\frac{1}{n}$. Ainſi l'on aura ſur le champ

$t^m =$

$$t^m = \frac{a^m}{(-c)^m}\left(1 - \frac{mba^{\frac{1-n}{n}}}{(-c)^{\frac{1}{n}}} + \frac{m\left(m+\frac{2-n}{n}\right)b^2a^{\frac{2-2n}{n}}}{2(-c)^{\frac{2}{n}}} - \frac{m\left(m+\frac{3-n}{n}\right)\left(m+\frac{3-2n}{n}\right)c^3a^{\frac{3-3n}{n}}}{2.3(-c)^{\frac{3}{n}}} + \&c.\right)$$

Or $t = x^n$, donc, ſi l'on met $\frac{m}{n}$ à la place de m, & qu'on faſſe pour abréger $\left(\frac{a}{-c}\right)^{\frac{1}{n}} = \varrho$, on aura

$$x^m = \varrho^m\left(1 - \frac{mb\varrho}{na} + \frac{m(m+2-n)b^2\varrho^2}{2n^2a^2} - \frac{m(m+3-n)(m+3-2n)b^3\varrho^3}{2.3n^3a^3} + \&c.\right)$$

Mais on a en général

$$\varrho = \left(\cos\frac{\lambda \times 360^\circ}{n} + \sin\frac{\lambda \times 360^\circ}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\frac{a}{-c}}$$

λ étant $= 1$, ou 2, ou 3 &c. juſqu'à n; donc, ſubſtituant cette valeur de ϱ dans l'expreſſion précédente, on aura n valeurs différentes de x^m, qui ſeront celles de x'^m, x''^m, x'''^m &c. $(x'')^m$.

PROBLEME 3.

35. *On demande toutes les racines de l'équation*

$$a - bx + cx^n - ex^s = 0$$

n, & s *étant des nombres entiers poſitifs, &* $s > n$.

Premiere Solution. 1°. Puiſque cette équation peut ſe rapporter à celle de l'*Exemple* 6. de l'art. 20. en faiſant

$\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{b}$, $\gamma = -\frac{e}{b}$, $\delta = 0$ &c. $p = n$, $q = s - n$;

il n'y aura qu'à faire ces ſubſtitutions dans les formules de cet Exemple, & l'on aura ſur le champ l'expreſſion d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\alpha}$, où x ſera néceſſairement la premiere racine de l'équation propoſée (art. 33).

2°. Pour trouver maintenant les autres racines, on prendra les deux termes $-bx + cx^n$ pour les premiers de la formule générale, en donnant à l'équation cette forme

$$b - cx^{n-1} - ax^{-1} + ex^{s-1} = 0.$$

On fera enſuite $x^{n-1} = t$, ce qui la ramenera à la même forme que celle de l'Exemple cité; ou bien, ce qui revient au même, on comparera cette équation à celle de l'Exemple 7, en faiſant

$$\alpha = \frac{b}{c}, \quad \beta = \frac{-a}{c}, \quad \gamma = \frac{e}{c}, \quad \delta = 0 \text{ &c.}$$

& $r = n - 1$, $p = -1$, $q = s$; & l'on aura ſur le champ la valeur d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\varrho}$, ϱ étant $= \sqrt[r]{\alpha} = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$; ainſi, donnant à ϱ les r valeurs que cette quantité peut avoir, & qui s'expriment en général de cette maniere

$$\varrho = \left(\cos\frac{\lambda \times 360^\circ}{r} + \sin\frac{\lambda \times 360}{r}\sqrt{-1}\right)\sqrt[r]{\alpha}$$

λ étant $= 1$, ou 2, ou 3 &c. juſqu'à r, on aura r, ou $n - 1$, formules différentes qui ſe rapporteront à la 2de, à la 3me &c. juſqu'à la n^{eme} racine inclufivement de l'équation dont il s'agit.

3°. On prendra enfin les deux derniers termes $cx^n - ex^s$ pour les premiers, en écrivant l'équation ainſi

$$c - ex^{s-n} - bx^{1-n} + ax^{-n} = 0;$$

laquel-

laquelle étant comparée de même à l'équation de l'Exemple 7, on aura

$$\alpha = \frac{c}{e},\ \beta = -\frac{b}{e},\ \gamma = \frac{a}{e},\ \delta = 0 \text{ \&c.}$$

& $s - n = \nu$, $1 - n = p$, $q = 1$; & l'on trouvera l'expreſſion d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\varrho}$, ϱ étant toujours $= \sqrt[r]{\alpha} = \left(\frac{c}{e}\right)^{\frac{1}{s-n}}$, dans laquelle mettant ſucceſſivement les r, ou $s - n$, valeurs différentes de ϱ, on aura autant d'expreſſions différentes qui ſe rapporteront aux $s - n$ dernieres racines de l'équation.

Ainſi on aura trois formules dont la premiere ſe rapportera à la premiere racine, la ſeconde comprendra les $n - 1$ racines ſuivantes, & la troiſieme renfermera les $s - n$ dernieres racines; de ſorte qu'on connoitra par ce moyen, non ſeulement la valeur de chacune des s racines de l'équation propoſée, mais auſſi une fonction quelconque de chacune de ces racines.

Seconde Solution. Dans la ſolution précédente nous avons conſidéré deux à deux les termes conſécutifs de l'équation propoſée; or la combinaiſon des termes qui ne ſont pas immédiatement voiſins nous donnera encore d'autres ſolutions.

Et d'abord il eſt clair qu'après avoir combiné les deux premiers termes $a - bx$, comme nous l'avons fait ci-deſſus pour avoir la premiere racine de l'équation, on peut combiner immédiatement le terme $-bx$ avec le dernier $-ex^s$ pour avoir les autres racines. Pour cela on regardera donc ces deux termes comme les premiers, en écrivant l'équation ainſi

$$b + ex^{s-1} - ax^{-1} - cx^{n-s} = 0$$

laquelle étant comparée à celle de l'Exemple 7 donnera

$\alpha =$

$$\alpha = \frac{b}{e},\ \beta = -\frac{a}{e},\ \gamma = -\frac{c}{e},\ \delta = 0 \text{ &c.}$$

& $\nu = s - 1,\ p = -1,\ q = n - s + 1$;

de ſorte qu'en ſubſtituant ces valeurs on aura l'expreſſion générale d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\varrho}$, ϱ étant $= \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{b}{e}\right)^{\frac{1}{s-1}}$; donc, mettant pour ϱ chacune de ſes valeurs particulieres qui ſont au nombre de $s - 1$, on aura autant d'expreſſions différentes qui ſe rapporteront aux $s - 1$ racines cherchées.

Ainſi, en combinant la formule du n°. 1. de la Solution précédente avec celle dont nous venons de parler, on trouvera la valeur d'une fonction quelconque de chacune des s racines de l'équation propoſée.

Troiſieme Solution. Combinons maintenant le premier terme a de l'équation avec le terme cx^n, c'eſt à dire, prenons ces deux termes pour les deux premiers de notre formule générale, & rapportant l'équation ſous ce point de vue à la formule de l'Exemple 7, on aura

$$\alpha = \frac{a}{c},\ \beta = -\frac{b}{c},\ \gamma = -\frac{e}{c},\ \delta = 0 \text{ &c.}$$

& $\nu = n,\ p = 1,\ q = s - 1$

ce qui étant ſubſtitué donnera une formule qui exprimera en général une fonction quelconque de $\frac{x}{\varrho}$, ϱ étant $= \sqrt[\nu]{\alpha} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}}$; donc, introduiſant à la place de ϱ chacune des n valeurs différentes que cette quantité peut avoir, on aura autant de formules particulieres qui ſe rapporteront aux n premieres racines de l'équation propoſée.

Pour trouver les $s - n$ racines reſtantes, il faudra combiner le terme cx^n avec le dernier terme $-ex^s$; or cette combinaiſon ayant déjà été faite dans le n°. 3. de la *premiere Solution*, il n'y aura qu'à emprunter ici la formule trouvée dans cet endroit.

Donc

Donc on n'aura en tout que deux formules générales comme dans la ſolution précédente; & on pourra par le moyen de ces formules trouver non ſeulement chaque racine en particulier, mais auſſi une fonction quelconque de chaque racine.

Quatrieme Solution. Il reſte encore une combinaiſon à faire, c'eſt celle des deux termes extremes a, & $-ex^s$, laquelle donnera immédiatement toutes les s racines de l'équation.

En rapportant donc ſous ce point de vue l'équation propoſée à celle de l'Exemple 7, on aura

$$\alpha = \frac{a}{e}, \beta = -\frac{b}{e}, \gamma = \frac{c}{e}, \delta = 0 \text{ &c.}$$

& $r = s, \quad p = 1, \quad q = n - 1$

& l'on trouvera une formule générale pour l'expreſſion d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\varrho}$, où $\varrho = \sqrt[r]{a} = \left(\frac{a}{e}\right)^{\frac{1}{s}}$; de ſorte qu'en y ſubſtituant ſucceſſivement les s valeurs de ϱ, on aura autant de formules particulieres, dont chacune ſe rapportera à une des racines de l'équation dont il s'agit. Ainſi une ſeule formule générale ſuffira dans ce cas pour trouver la valeur d'une fonction quelconque de chacune de ces racines.

Comme nous avons épuiſé toutes les combinaiſons poſſibles des termes de l'équation propoſée, pris deux à deux, on ne pourra pas trouver d'autres ſolutions que celles que nous venons de donner, au moins par nos formules; ainſi nous ne nous arrêterons pas davantage ſur cette matiere, les exemples donnés ci-deſſus nous paroiſſant ſuffiſans pour faire voir clairement l'application de notre méthode.

§. IV.

Sur la convergence ou divergence des ſéries qui repréſentent des fonctions quelconques des racines des équations.

36. Il ne ſuffit pas de pouvoir exprimer les racines des équations, ou leurs fonctions quelconques, par des ſéries régulieres, & dont la loi ſoit bien développée; il faut ſurtout pouvoir reconnoître par la loi même de ces ſéries ſi elles ſont convergentes à l'infini ou non; car il eſt clair que pour qu'une ſérie puiſſe être regardée comme repréſentant réellement la valeur d'une quantité cherchée, il faut qu'elle ſoit convergente à ſon extrémité, c'eſt à dire, que ſes derniers termes ſoient infiniment petits, de ſorte que l'erreur puiſſe devenir moindre qu'aucune quantité donnée. Voyons donc comment on pourra reconnoître ſi cette condition a lieu ou non dans les ſéries des §. préc.

Pour rendre notre recherche auſſi générale qu'il eſt poſſible, nous conſidérerons l'équation générale (H) de l'art. 15. ſavoir

$$a - x + \Phi x = 0$$

laquelle donne en général (art. 16. form. K)

$$\psi\left(\frac{x}{a}\right) = \psi y + \frac{\Phi(ay)\psi' y}{a} + \frac{d.(\Phi(ay)^2\psi' y)}{2a^2 dy} + \frac{d^2.(\Phi(ay)^3\psi' y)}{2.3\,a^3 dy^2} + \&c.$$

la variable y devant être faite $= 1$ après les différentiations.

Soit donc

$$\frac{d.^{i-1}(\Phi(ay)^i\psi' y)}{1.2.3 \cdot \cdot \cdot \cdot i a^i dy^{i-1}}$$

un terme quelconque de cette ſérie, dont le quantieme ſoit $i + 1$; & ſuppoſons que la fonction Φx ſoit repréſentée par une ſuite quelconque de puiſſances de x, enſorte que l'on ait

$$\Phi x = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \&c.$$

A, B,

A, B, C &c. étant des coëfficiens quelconques & a, b, c &c. des expoſans auſſi quelconques; on aura donc de même

$$\Phi(\alpha y) = A\alpha^a y^a + B\alpha^b y^b + C\alpha^c y^c + \&c.$$

par conſéquent un terme quelconque de la puiſſance i^{eme} de cette quantité, c'eſt à dire, de la valeur de $\Phi(\alpha y)^i$ ſera, comme l'on ſait,

$$\frac{1.2.3 \cdot\cdot\cdot i}{1.2.3\cdot\cdot\cdot m.1.2.3\cdot\cdot\cdot n.1.2.3\cdot\cdot\cdot p\cdot\cdot\cdot} A^m B^n C^p \cdot\cdot (\alpha y)^{am+bn+cp+\&c}$$

m, n, p &c. étant des nombres entiers poſitifs tels que

$$m + n + p + \&c. = i.$$

Suppoſons de plus que la fonction $\psi' y$ ſoit auſſi repréſentée par une ſuite de termes tels que $F y^f$; & multipliant la quantité précédente par $F y^f$, on aura pour un terme quelconque de la valeur de $\Phi(\alpha y)^i \psi' y$, l'expreſſion

$$\frac{1.2.3 \cdot\cdot\cdot i.F.A^m B^n C^p \cdot\cdot\cdot \alpha^m}{1.2.3\cdot\cdot\cdot m.1.2.3\cdot\cdot\cdot n.1.2.3\cdot\cdot\cdot p\cdot\cdot\cdot} y^{n+f}$$

en faiſant pour plus de ſimplicité

$$ma + nb + pc + \&c. = u.$$

Donc, différentiant cette quantité $i-1$ fois, en faiſant y variable & dy conſtant, & diviſant enſuite par $1.2.3\cdot\cdot\cdot i\alpha^i dy^{i-1}$, on aura pour la valeur d'un terme quelconque de $\frac{d.^{i-1}(\Phi(\alpha y)^i \psi' y)}{1.2.3\cdot\cdot\cdot i\alpha^i dy^{i-1}}$, après y avoir fait $y = 1$, la quantité

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\cdot\cdot\cdot(u+f-i+2)}{1.2.3\cdot\cdot\cdot m.1.2.3\cdot\cdot\cdot n.1.2.3\cdot\cdot\cdot p\cdot\cdot\cdot} F A^m B^n C^p \cdot\cdot\cdot \alpha^{u-i}.$$

Ainſi la difficulté ſe réduit maintenant à voir ce que cette quantité devient lorſqu'on ſuppoſe i infiniment grand.

37. Pour cet effet je remarque que l'on a, en prenant π pour le rapport de la circonférence au rayon,

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \&c. + lx =$$

$$(x + \tfrac{1}{2})\, lx - x + \tfrac{1}{2} l\pi + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \&c.$$

comme Mrs. *Stirling*, *Moivre*, & d'autres Géometres l'ont démontré (voyez ſurtout le Calcul différentiel de M. *Euler*); de ſorte que, lorſque x eſt infiniment grand, on a ſans erreur ſenſible

$$l1 + l2 + l3 + \&c. + lx = (x + \tfrac{1}{2})\, lx - x + \tfrac{1}{2} l\pi$$
$$= (x + \tfrac{1}{2})\, lx - le^x + \tfrac{1}{2} l\pi$$

d'où, en paſſant des logarithmes aux nombres, on tire dans la même hypothèſe

$$1.2.3 \;\text{-}\;\text{-}\;\text{-}\; x = \frac{\sqrt{\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}.$$

On a de plus en général, quels que ſoient x, & y,

$$lx + l(x-1) + l(x-2) + \&c. + l(x-y+1)$$
$$= (x + \tfrac{1}{2})\, lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \&c.$$
$$-(x-y+\tfrac{1}{2})\, l(x-y) + x - y - \frac{1}{12(x-y)} + \frac{1}{360(x-y)^3} - \&c.$$

de ſorte qu'en ſuppoſant x & y infiniment grand, on aura

$$lx + l(x-1) + l(x-2) + \&c. + l(x-y+1)$$
$$= (x + \tfrac{1}{2})\, lx - (x - y + \tfrac{1}{2})\, l(x-y) - y$$

& par conſéquent, en paſſant des logarithmes aux nombres,

$$x\,(x-1)\,(x-2) \;\text{-}\;\text{-}\;\text{-}\;\text{-}\;\text{-}\; (x-y+1)$$
$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}} e^{-y}}{(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}}$$

De

De là il s'enſuit, pour le dire en paſſant, que le coëfficient du $(y+1)^{eme}$ terme du binome élevé à la puiſſance x ſera, lorſque x, & y ſont très grands,

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \times (x-y)^{x-y+\frac{1}{2}} \times y^{y+\frac{1}{2}}}$$

de ſorte qu'en faiſant $y = px$, ce coëfficient deviendra, en diviſant le haut & le bas par $x^{x+\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}(1-p)^{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{y}\sqrt{y}}.$$

38. Cela poſé, puiſque $m + n + p +$ &c. $= i$, & $am + bn + cp +$ &c. $= u$, il eſt clair qu'en ſuppoſant i infiniment grand, m, n, p &c., u, le ſeront auſſi, de ſorte qu'on aura

$$1.2.3 \text{ - - - - } m = \frac{\sqrt{\pi} \cdot m^{m+\frac{1}{2}}}{e^{m}}$$

& ainſi des autres.

De plus, en faiſant pour abréger $g = f + 1$, on aura

$$(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\text{ - - - }(u+f-i+2)$$
$$= \frac{(u+g)(u+g-1)(u+g-2)\text{ - - - }(u+g-i+1)}{u+g}$$
$$= \frac{(u+g)^{u+g-\frac{1}{2}}}{(u+g-i)^{u+g-i+\frac{1}{2}}e^{i}}.$$

De ſorte qu'on aura lorſque $i = \infty$

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\text{ - - - }(u+f-i+2)}{1.2.3 \text{ - - - } m.1.2.3 \text{ - - - } n.1.2.3 \text{ - - - } p}$$
$$= \frac{(u+g)^{u+g-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{\lambda}{2}}(u+g-i)^{u+g-i+\frac{1}{2}}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}\text{ - - -}}$$

λ étant le nombre des quantités m, n, p &c., c'eſt à dire le nombre des termes de la fonction Φx.

Donc, faiſant pour abréger

$$V = \frac{(u+g)^{2g-1}}{\pi^{\lambda}(u+g-i)^{2g+1}mnp\ldots}$$

la quantité propoſée

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\cdots(u+f-i+2)}{1.2.3\cdots m.1.2.3\cdots n.1.2.3\cdots p\cdots} FA^{m}B^{n}C^{p}\ldots\alpha^{u-i}$$

deviendra, lorſque $i = \infty$,

$$FV \times \frac{(u+g)^{u}A^{m}B^{n}C^{p}\ldots\alpha^{u-i}}{(u+g-i)^{u-i}m^{m}n^{n}p^{p}\ldots}.$$

39. Suppoſons maintenant

$$\frac{m}{i} = \mu,\quad \frac{n}{i} = \nu,\quad \frac{p}{i} = \pi \text{ &c.}\quad \frac{u}{i} = \upsilon$$

& l'on aura à cauſe de $m + n + p +$ &c. $= i$ & $am + bn + cp +$ &c. $= u$,

$$\mu + \nu + \pi + \text{&c.} = 1$$
$$\mu a + \nu b + \pi c + \text{&c.} = \upsilon$$

d'où l'on voit que les nombres μ, ν, π &c. ſeront des fractions plus petites que l'unité; donc, faiſant ces ſubſtitutions dans l'expreſſion

$$\frac{(u+g)^{u}A^{m}B^{n}C^{p}\ldots\alpha^{u-i}}{(u-i+g)^{u-i}m^{m}n^{n}p^{p}\ldots}$$

elle deviendra, en diviſant le haut & le bas par i^{u}

$$\left\{\frac{\left(\upsilon+\frac{g}{i}\right)^{\upsilon}A^{\mu}.B^{\nu}.C^{\pi}\ldots\alpha^{\upsilon-1}}{\left(\upsilon-1+\frac{g}{i}\right)^{\upsilon-1}.\mu^{\mu}.\nu^{\nu}.\pi^{\pi}\ldots}\right\}^{i}$$

ou

ou bien en négligeant le terme $\frac{g}{i}$ qui devient nul lorſque $i = \infty$

$$\left(\frac{v^{v}a^{v-1}A^{\mu}.B^{\nu}.C^{\pi}\ \ldots\ \ldots}{(v-1)^{v-1}\mu^{\mu}.\nu^{\nu}.\pi^{\pi}\ \ldots\ \ldots}\right)^{i}.$$

Par les mêmes ſubſtitutions la quantité V deviendra, en diviſant le haut & le bas par i^{2g-1},

$$\frac{\left(v+\frac{g}{i}\right)^{2g-1}}{i^{\lambda+2\pi^{\lambda}}\left(v-1+\frac{g}{i}\right)^{2g+1}\mu\nu\pi\ \ldots\ \ldots}$$

ou bien, en négligeant le terme infiniment petit $\frac{g}{i}$, & remettant pour g ſa valeur $f+1$

$$\frac{v^{2f+1}}{i^{\lambda+2\pi^{\lambda}}(v-1)^{2f+3}\mu\nu\pi\ \ldots\ \ldots}.$$

40. Donc, ſi on fait

$$M = \frac{v^{2f+1}}{\pi^{\lambda}(v-1)^{2f+3}\mu\nu\pi\ \ldots\ \ldots}, \quad \&$$

$$N = v\left(\frac{va}{v-1}\right)^{v-1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\pi}\ \ldots\ \ldots$$

on aura pour un terme quelconque de la valeur de $\frac{d.^{i-1}(\Phi(ay)^{i}\psi^{i}y)}{1.2.3\ldots i\,a^{i}dy^{i-1}}$ lorſque i eſt infiniment grand, cette expreſſion fort ſimple

$$\frac{FV\!M\,.\,N^{i}}{i^{\frac{\lambda+2}{2}}}$$

dans laquelle λ eſt le nombre des termes de la fonction φx, & où μ, ν, π &c. ſont des nombres quelconques poſitifs, tels que

$\mu +$

$$\mu + \nu + \pi + \text{&c.} = 1 \quad \&$$
$$a\mu + b\nu + c\pi + \text{&c.} = u.$$

Ainſi cette quantité ſera infinie ou nulle, ſuivant que N aura une valeur, ſoit poſitive ou négative, plus grande que l'unité, ou non.

D'où il eſt aiſé de conclure que la ſérie qui repréſentera la valeur de $\psi\left(\frac{x}{a}\right)$ (art. 36), ſera convergente ſi l'on a, abſtraction faite du ſigne,

$$N = \text{ou} < 1;$$

autrement elle ſera divergente.

Or, comme la quantité N dépend ſeulement des coëfficiens A, B, C &c. & des expoſans a, b, c &c. qui entrent dans l'expreſſion de la fonction Φx, & nullement de ceux qui appartiennent à la fonction ψx, & qui ſont F, f &c., il s'enſuit que ſi la ſérie qui exprime la valeur d'une fonction quelconque de $\frac{x}{a}$ eſt convergente, elle le ſera auſſi pour toute autre fonction de $\frac{x}{a}$.

41. Au reſte, il eſt bon de remarquer que, quoique les coëfficiens A, B, C &c. puiſſent être poſitifs ou négatifs, ainſi que la quantité a; cependant, comme il ne s'agit ici que de la valeur abſolue de la quantité $\frac{(u+f)\cdots(u+f-i+2)}{1.2\cdots m.1.2\cdots n\cdots} FA^m B^n C^p \cdots a^{n-i}$ (art. 36.), il eſt indifférent de les prendre poſitivement ou négativement; ainſi, pour éviter les imaginaires dans la valeur de N, nous ſuppoſerons que les coëfficiens A, B, C &c. ſoient pris poſitivement, à cauſe que μ, ν & π doivent être poſitifs par leur nature, & à l'égard de a nous ſuppoſerons qu'il ſoit pris enſorte que $\frac{va}{v-1}$ ſoit poſitif; par

ce

ce moyen, quels que ſoient les nombres μ, ν, π &c. υ, la valeur de N ſera toujours ſous une forme réelle.

42. Suppoſons que la fonction ϕx ne renferme qu'un ſeul terme Ax^{α}, en ſorte que l'équation ſoit

$$a - x + Ax^{\alpha} = 0$$

dans ce cas on aura

$$N = \upsilon\left(\frac{\upsilon a}{\upsilon - 1}\right)^{\nu - 1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu}$$

& $\mu = 1$, $a\mu = \upsilon$; donc $\mu = 1$, $\upsilon = a$; donc

$$N = a\left(\frac{aa}{a - 1}\right)^{a - 1} A;$$

donc la ſérie ſera convergente ſi l'on a

$$A = \text{ou} < \frac{1}{a}\left(\frac{a - 1}{aa}\right)^{a - 1}.$$

Ce cas eſt celui du *Probl.* 2. du §. *prec.*; or dans la premiere ſolution on a d'abord $a = \frac{a}{b}$, $A = \frac{c}{b}$, $\alpha = n$; donc la premiere ſérie de cette ſolution, c'eſt à dire, celle qui ſe rapporte à la premiere racine ſera convergente ſi l'on a

$$\frac{c}{b} = \text{ou} < \frac{1}{n}\left(\frac{(n - 1)b}{an}\right)^{n - 1}$$

c'eſt à dire (abſtraction faite des ſignes)

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{ou} < \frac{(n - 1)^{n-1}}{n^n}$$

en prenant a, b, & c poſitivement.

Soit $n = 2$, on aura cette condition $\frac{ac}{b^2} = \text{ou} < \frac{1}{2^2}$, c'eſt à dire, $b^2 = \text{ou} > 4ac$; or c'eſt préciſément la condition qui rend con-

convergente la ſérie provenante du développement du radical $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$, & qui eſt la même que celle que nous avons trouvée par notre méthode (art. 8).

Dans la ſeconde ſérie de la même ſolution, on a en comparant l'équation $\frac{b}{c} - t - \frac{a}{c}t^{\frac{1}{1-n}} = 0$, à la formule générale ci-deſſus $\alpha = \frac{b}{c}$, $A = -\frac{a}{c}$, $a = \frac{1}{1-n}$; donc la condition de la convergence de cette ſérie ſera (abſtraction faite des ſignes)

$$\frac{a}{c} = \text{ou} < (1-n)\left(\frac{nc}{b}\right)^{\frac{n}{1-n}}$$

ou bien

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{ou} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

qui eſt la même condition que la précédente.

Dans la ſeconde ſolution on aura, en comparant l'équation $\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0$ à la même formule générale, $\alpha = -\frac{a}{c}$, $A = \frac{b}{c}$, & $a = \frac{1}{n}$; d'où la condition de la convergence des ſéries de cette ſolution ſera, abſtraction faite des ſignes,

$$\frac{b}{c} = \text{ou} < n\left(\frac{(n-1)c}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

laquelle ſe réduit à celle-ci

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{ou} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

qui eſt l'oppoſée de celle que nous avons trouvée pour la premiere ſolution.

Donc

Donc 1°. ſi dans l'équation

$$a - bx + cx^n = 0$$

on a (abſtraction faite des ſignes de a, b, c)

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{ou} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

il faudra employer la premiere ſolution du Probl. 2, laquelle donnera toujours des ſéries convergentes, & par conſéquent vraies pour toutes les racines; de ſorte que ces racines ſeront réelles ou imaginaires ſuivant que les ſéries qui les repréſentent le ſeront.

Donc (art. 32.) l'équation propoſée aura dans ce cas autant de racines réelles, & autant d'imaginaires, qu'il y en aura de telles dans les équations qu'on pourra faire en combinant enſemble deux termes conſécutifs de cette équation, & les égalant à zéro; c'eſt à dire, dans les équations $a - bx = 0$, & $b - cx^{n-1} = 0$, d'où l'on voit qu'il y en aura toujours au moins une de réelle.

2°. Si l'on a $\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{ou} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$, alors il faudra employer la ſeconde ſolution dont les ſeries ſeront néceſſairement convergentes; de ſorte que dans ce cas l'équation aura autant de racines réelles, & autant d'imaginaires, qu'il y en aura de telles dans l'équation qu'on fera en égalant à zéro le premier & le dernier terme de la propoſée, c'eſt à dire, dans l'équation $a + cx^n = 0$.

43. Si on avoit l'équation

$$a - bx^m + cx^{m+n} = 0$$

il n'y auroit qu'à faire comme dans l'art. 21. $x^m = t$, ce qui la changeroit en celle-ci

$$a - bt + ct^{\frac{m+n}{m}} = 0$$

qui eſt dans le cas de l'équation de l'art. préc. Ainſi, mettant $\frac{m+n}{m}$ à la place de n, on trouvera que la premiere ſolution ſera bonne lorſqu'on aura $\frac{a^{\frac{n}{m}}c}{b^{\frac{m+n}{m}}} = \text{ou} < \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}}}{\left(\frac{m+n}{m}\right)^{\frac{m+n}{m}}}$, ſavoir en élevant les deux membres à la puiſſance m,

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{ou} < \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

& que la ſeconde ſera bonne lorſqu'on aura

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{ou} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

de ſorte que, dans le premier cas, l'équation aura autant de racines réelles & autant d'imaginaires qu'il y en aura de telles dans les deux équations $a - bx^m = 0$, & $b - cx^n = 0$, & que dans le ſecond le nombre des racines réelles, & des imaginaires, ſera le même que dans l'équation $a + cx^{m+n} = 0$ (art. 32).

44. Si l'on avoit $\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ alors les deux conditions ſeroient les mêmes; de ſorte qu'il faudroit dire que l'équation auroit dans ce cas autant de racines réelles & autant d'imaginaires, qu'il y en auroit de telles dans les équations $a - bx^m = 0$ & $b - cx^n = 0$, & dans l'équation $a + cx^{m+n} = 0$; donc, s'il arrive que le nombre des racines imaginaires de ces deux équations-là ſoit différent de celui de cette équation-ci, il s'enſuivra qu'il y aura dans la propoſée autant de racines égales qu'il y aura plus de racines imaginaires d'un côté que de l'autre; car les racines égales étant les limites entre les racines réelles, & les imaginaires, peuvent être regardées en quelque ſorte comme appartenant aux unes, ou aux autres.

45. Nous avons vu (art. 40.) que, pour que la ſérie ſoit convergente, il faut que N ne ſoit pas ≥ 1; on cherchera donc dans chaque cas la plus grande valeur de N, en regardant les quantités μ, ν, π &c. comme variables, & ſi elle ne ſe trouve pas plus grande que l'unité, on en conclura que la ſérie eſt convergente; ſinon elle ſera divergente.

Faiſons varier ſeulement μ & ν, & l'on aura

$$\frac{dN}{N} = dv\,l\frac{\alpha v}{v-1} + d\mu\left(l\frac{A}{\mu} - 1\right) + d\nu\left(l\frac{B}{\nu} - 1\right);$$

mais il faut que $\mu + \nu + \pi +$ &c. $= 1$, & $a\mu + b\nu + c\pi +$ &c. $= v$; donc $d\mu + d\nu = 0$, $a\,d\mu + b\,d\nu = dv$; d'où $d\mu = \frac{dv}{a-b}$, $d\nu = \frac{dv}{b-a}$; donc, ſubſtituant ces valeurs, & égalant la différentielle dN à zéro, on aura

$$l\frac{\alpha v}{v-1} + \frac{l\frac{A}{\mu} - l\frac{B}{\nu}}{a-b} = 0$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a\frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^b\frac{B}{\nu}.$$

On trouveroit de même, en faiſant varier μ, & π,

$$\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a\frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^c\frac{C}{\pi}$$

& ainſi de ſuite; de ſorte que les conditions du *maximum*, ou *minimum*, ſeront renfermées dans ces équations

$$\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a\frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^b\frac{B}{\nu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^c\frac{C}{\pi} \text{ &c.}$$

On aura donc, en prenant un coëfficient quelconque λ,

$$\mu = \lambda A \left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{a}$$

$$\nu = \lambda B \left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{b}$$

$$\pi = \lambda C \left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{c}$$

&c.

donc, ſubſtituant ces valeurs dans les équations $\mu + \nu + \pi +$ &c. $= 1$, $\mu a + \nu b + \pi c +$ &c. $= v$, on aura

$$\lambda \left(A \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{a} + B \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{b} + C \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{c} + \text{&c.}\right) = 1$$

$$\lambda \left(Aa \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{a} + Bb \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{b} + Cc \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{c} + \text{&c.}\right) = v$$

d'où l'on tire, en chaſſant λ,

$$A\,(a - v)\left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{a} + B\,(b - v)\left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{b}$$

$$+ C\,(c - v)\left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{c} + \text{&c.} = 0$$

équation par laquelle on déterminera v, après quoi on aura

$$\lambda = \frac{1}{A\left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{a} + B\left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{b} + C\left(\frac{\alpha v}{v - 1}\right)^{c} + \text{&c.}}$$

& enſuite μ, ν, π &c. par les formules précédentes.

Ainſi on pourra toujours par ce moyen juger de la convergence ou de la divergence de chaque ſérie.

OB-

OBSERVATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR MR. LAMBERT.

§. 1.

Quoique tous les cas qui peuvent ſe préſenter dans la réſolution des triangles ſoient diſcutés & réſolus depuis longtems, & qu'à cet égard la Trigonométrie ſoit de toutes les parties des Mathématiques la plus complette; cependant il s'en faut de beaucoup qu'elle ne laiſſe plus rien à déſirer, ſurtout lorſqu'il s'agit d'abréger les opérations trigonométriques autant qu'il eſt poſſible. On ſait que dans les triangles obliquangles il n'y a qu'un ſeul cas où l'on puiſſe ſe contenter d'une ſeule analogie, & que tous les autres demandent, ou quelque préparation, ou deux analogies, ou l'un & l'autre. Et quelquefois la préparation n'eſt pas moins longue que la ſeconde analogie qu'elle devoit rendre ſuperflue. Ce n'eſt pas cependant que ces ſortes de préparations ſoient inutiles; elles peuvent être d'un grand uſage lorſqu'il s'agit de calculer des Tables. C'eſt alors qu'on peut ſouhaiter une préparation qui rende la ſeconde analogie ſuperflue. Mais ces ſortes de préparations ne ſont point encore trouvées pour tous les cas, & elles ſemblent même pour pluſieurs cas demander des Tables trigonométriques différentes de celles que nous avons. Je doute que ces nouvelles Tables ſoient calculées dans le ſiecle où nous ſommes, mais ce que je vais examiner dans ce Mémoire en fera voir & la poſſibilité & l'uſage.

§. 2. Je commencerai par un exemple. On ſait que toutes les fois que le Soleil, ou quelque étoile, ne ſe trouve pas dans l'équateur & que le ſpectateur n'eſt, ni ſous l'équateur, ni ſous le pole, la hauteur du Soleil ou de l'étoile ne ſe calcule que moyennant deux analogies. Mais

Mais, ſi pour cette hauteur il s'agit de calculer une Table, en ſuppoſant la déclinaiſon conſtante, alors il n'eſt pas inutile de commencer par chercher l'arc diurne; & moyennant cette préparation chaque hauteur ſe calcule par la ſimple addition de trois logarithmes. Car, ſoit l'arc ſemidiurne $= \Phi$, l'élongation du Soleil du midi $= a$, la diſtance du Soleil du pole $=$ B, la diſtance du zénith du pole $=$ C, la hauteur du Soleil $=$ H; on aura

$$\text{ſin H} = 2 \text{ ſin B. ſin C. ſin } \frac{\Phi + a}{2} \text{. ſin } \frac{\Phi - a}{2}.$$

Or le logarithme de 2 ſin B. ſin C eſt conſtant, ainſi il eſt conſtamment ajouté aux log. ſin $\frac{\Phi + a}{2}$ & l. ſin $\frac{\Phi - a}{2}$, pour avoir par une ſimple addition le log. ſin H.

§. 3. De cette façon le travail pour calculer la Table ſe réduit à la moitié. Mais il faut bien remarquer que cette formule n'eſt d'aucun uſage toutes les fois que l'aſtre reſte conſtamment au deſſus de l'horizon. Car alors l'arc diurne Φ, tel qu'il eſt employé dans cette formule, eſt un arc imaginaire, & partant les ſin $\frac{\Phi + a}{2}$, ſin $\frac{\Phi - a}{2}$ ſont des ſinus imaginaires. C'eſt ce qu'on peut rendre viſible de la façon ſuivante. Soit HZON le méridien, HCO l'horiſon, ZCN le vertical, P, *p* les poles, AE l'équateur, SM le parallele de l'équateur répondant à la déclinaiſon AS. Qu'on tire SB, MA paralleles à l'horiſon, & il ſera CA le ſinus de la hauteur méridienne de l'aſtre, CB le ſinus de ſa dépreſſion ſous l'horiſon à minuit. Sur AB décrivez le cercle AGBF, & diviſez-le en 24 heures. L'arc FAG ſera l'arc diurne, & GBF l'arc nocturne. Soit AQ une heure quelconque. Abaiſſez QK perpendiculaire ſur l'horiſon, & tirez FQ, QG. Il ſera

Planche II. Fig. 7.

$$\text{QK} = \frac{\text{FQ} \cdot \text{QG}}{\text{AB}}.$$

Or QK eſt le ſinus de la hauteur de l'aſtre en Q. Ainſi ce ſinus eſt en

en raiſon du produit FQ . QG, qui revient à $\text{ſin } \frac{\Phi + a}{2} . \text{ſin } \frac{\Phi - a}{2}$ de la formule précédente. Mais on voit que cette analogie n'eſt poſſible qu'entant que l'horiſon HCO paſſe par le cercle AGBF, ce qui n'arrive que lorſque l'aſtre ſe leve & ſe couche. Donc, dans tous les cas où l'aſtre reſte conſtamment au deſſus de l'horiſon, les points d'interſection F, G, ſont purement imaginaires.

§. 4. On peut à la vérité pour ces cas encore trouver une autre formule, en faiſant

$$\frac{\text{coſ}(B - C)}{2\,\text{ſ}B.\,\text{ſ}C} = \text{tang } \psi^2$$

$$\text{ſin } \tfrac{1}{2} a = \text{tang } \varrho.$$

Car cela donnera

$$\text{ſin } H = \frac{2\,\text{ſ}B.\,\text{ſ}C}{\text{coſ}\,\psi^2} \cdot \frac{\text{ſin}(\psi + \varrho) . \text{ſin}(\psi - \varrho)}{\text{coſ}\,\varrho^2}.$$

Mais cette formule eſt plus prolixe, en ce qu'elle contient trois termes variables, & qu'il faut même prendre le quarré du troiſieme. De la ſorte l'opération eſt beaucoup moins abrégée qu'elle ne l'étoit dans le premier cas. Voilà donc ce qui m'a fait penſer aux moyens de rendre la premiere formule (§. 2.) applicable, même dans les cas où l'arc diurne eſt imaginaire. On ſait que des ſinus imaginaires deviennent des quantités réelles quand on les transfere à l'hyperbole. Il s'agiſſoit donc d'examiner de quelle maniere les fonctions hyperboliques analogues aux fonctions circulaires peuvent être miſes en uſage dans la Trigonométrie, & quels ſont les avantages qui en réſultent, ſurtout lorſqu'il s'agit de calculer des Tables entieres. Voici ce que j'ai trouvé à cet égard.

§. 5. Soit C le centre commun du cercle QD & de l'hyperbole équilatérale QE, Q le ſommet, CQB l'axe, CA l'aſymptote de l'hyperbole, AQ la tangente initiale, q un point quelconque pris ſur l'hyperbole, qp ſon ordonnée orthogonale, Cq la droite tirée par le point q & le centre C, qui coupe la tangente AQ en T. Fig. 1.

Qu'on tire qP perpendiculaire à AQ, ou parallele à CQ, & en joignant les points C, P, par la droite CP qui coupe le cercle en S, il ſera

$$SR = QT$$
$$CP = Cp$$
$$QP = qp$$

& partant la droite ST ſera pareillement parallele à CQ. Abaiſſons encore NM perpendiculaire à CQ, & poſons le rayon $CQ = 1$. Soit enfin l'angle

$$qCQ = \Phi$$
$$PCQ = \omega$$

& il ſera

$$\text{ſin } \omega = \text{tang } \Phi.$$

C'eſt ſur ces deux angles que roulera la comparaiſon à faire entre les fonctions circulaires & hyperboliques.

§. 6. Pour cet effet je nommerai l'abſciſſe Cp le *coſinus hyperbolique* & l'ordonnée pq le *ſinus hyperbolique*, par la même raiſon que l'abſciſſe CM eſt nommée le *coſinus circulaire* & l'ordonnée MN le *ſinus circulaire*. Dans cette dénomination que je trouve déja employée par le R. P. *Riccati* dans ſes Opuſcules, il n'y a rien qui répugne à la ſignification primitive du terme *ſinus*. Mais voici ce qu'il faut bien obſerver. Les *ſinus* & *coſinus circulaires* peuvent ſe rapporter indifféremment à *l'arc*, à *l'angle* & au *ſecteur*, à cauſe de la proportionalité conſtante qui s'y trouve. Il n'en eſt pas de même pour ce qui regarde les *ſinus* & les *coſinus hyperboliques* pq, Cp. C'eſt aux ſecteurs $QCqQ$ que ces fonctions veulent principalement être rapportées, afin d'être à tous égards analogues aux *ſinus* & *coſinus circulaires*. Les angles $QCq = \Phi$, & $QCP = \omega$ entrent pareillement en conſidération, & ils ſeront d'uſage lorſque des fonctions circulaires il s'agit de paſſer aux fonctions hyperboliques, ou réciproquement de celles-ci à celles-là. A cet égard l'un & l'autre mérite d'être

d'être déſigné par un nom plus ou moins ſignificatif. J'obſerve donc que l'angle $QCq = \Phi$ peut être conſidéré comme *commun* au cercle & à l'hyperbole, en ce qu'il eſt également

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{NM}{MC} = \frac{qp}{pC}.$$

On voit donc que, ſi la tangente de l'angle $QCq = \Phi$ eſt *donnée*, on peut l'exprimer par les *ſinus* & *coſinus circulaires*, ou par les *ſinus* & *coſinus hyperboliques*.

§. 7. Il n'en eſt pas de même de l'angle $QCP = \omega$. Cet angle ſert pour paſſer des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques. Car on peut à certains égards conſidérer le *coſinus hyperbolique* Cp comme un *coſinus circulaire imaginaire*, & le *ſinus hyperbolique* pq comme un *ſinus circulaire imaginaire*. Ce qu'il y a d'imaginaire en cela regarde ſimplement la dénomination. Mais on ſait depuis longtems que dans les calculs analytiques il arrive quelquefois que la ſolution change les dénominations dans leſquelles le probleme étoit d'abord propoſé, du moins pour certains cas qu'on croyoit être compris dans le probleme. Tel eſt p. ex. le cas de l'arc diurne imaginaire dont j'ai parlé ci-deſſus (§. 3. 4.).

§. 8. Comme il eſt (§. 5.)

$$Cp = CP = \text{ſec}\,\omega$$
$$pq = PQ = \text{tang}\,\omega,$$

on voit que les *coſinus* & *ſinus hyperboliques* peuvent toujours être regardés comme des *ſécantes* & *tangentes circulaires*, & que réciproquement, au lieu des *ſécantes* & *tangentes circulaires*, on peut ſubſtituer les *coſinus* & *ſinus hyperboliques*. De là il ſuit encore que les *ſécantes* & les *tangentes circulaires* peuvent être regardées comme des *coſinus* & *ſinus circulaires imaginaires*, & réciproquement. Et comme c'eſt à cela que ſe réduit l'uſage de l'angle PCQ, je pourrai le nommer *l'angle de commutation*, en empruntant ce terme de l'Aſtronomie, ou bien

l'angle tranſcendant, parce qu'en effet c'eſt cet angle qui nous fait paſſer des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques. Quant à l'angle $qCQ = \Phi$, je le nommerai ſimplement *l'angle commun*, par la raiſon rapportée ci-deſſus (§. 6.).

§. 9. Quant à l'aire du ſecteur hyperbolique $qCQq$, il eſt aſſez indifférent de quelle unité l'on ſe ſert pour l'exprimer, tout comme dans la Trigonométrie on exprime les angles par des degrés & leurs parties ſexagéſimales. Mais, comme en poſant l'arc $QN = v$, l'aire du ſecteur circulaire $QNCQ$ devient $= \frac{1}{2}v$, on pourra à cet égard exprimer l'aire du ſecteur hyperbolique $qCQq$ par $\frac{1}{2}u$. C'eſt auſſi ce que j'ai fait dans un Mémoire inſéré dans ceux de l'Académie de 1761. De cette maniere on trouve

$$\text{pour le ſecteur circulaire } dv = \frac{d\,\text{tang}\,\Phi}{1 + t\Phi^2}$$

$$\text{pour le ſecteur hyperbolique } du = \frac{d\,\text{tang}\,\Phi}{1 + t\Phi^3}$$

& partant

$$2u = \log \frac{1 + t\Phi}{1 - t\Phi} = \log.\,\text{tang}\,(45^\circ + \Phi)$$

§. 10. Poſons donc

$$Cp = \text{cof}\,u$$

$$pq = \text{ſin}\,u$$

& il ſera

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{\text{ſin}\,u}{\text{cof}\,u}.$$

Et comme il eſt (§. 5.)

$$\text{tang}\,\Phi = \text{ſin}\,\omega$$

on voit qu'il ſera

$$2u = \log \frac{1 + \text{ſin}\,\omega}{1 - \text{ſin}\,\omega} = 2\log.\,\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega)$$

ou bien

$$u = \log\,\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega).$$

§. 11.

§. 11. J'ai déja dit qu'il eſt aſſez indifférent de quelle unité on ſe ſert pour exprimer l'aire des ſecteurs hyperboliques. Cela fait que je regarderai cette aire comme exprimée par u, & qu'au lieu des logarithmes hyperboliques je prendrai ſimplement les logarithmes tabulaires. L'avantage qui en réſulte conſiſte en ce que les Tables qu'il faudroit calculer pour les ſinus & coſinus hyperboliques ſe trouvent, ou peu s'en faut, toutes calculées dans les Tables trigonométriques, ſi on met pour baſe l'angle tranſcendant ω. Car de cette maniere on aura pour ces nouvelles Tables

1re Colonne. L'angle tranſcendant ω en degrés & minutes depuis 0 juſqu'à 90°.

2de Colonne. Le ſecteur hyperbolique $u = \log. \text{tang}\,(45° + \frac{1}{2}\omega)$.

3me Colonne. Le ſin. hyp. de $u = \text{tang}\,\omega$.

4me Colonne. Le coſ. hyp. de $u = \text{ſec.}\,\omega$.

5me Colonne. Le log. ſin hyp. $u = \log. \text{tang}\,\omega$.

6me Colonne. Le log. coſ. hyp. $u = \log. \text{ſec}\,\omega = -\log \text{coſ}\,\omega$.

7me Colonne. La $\text{tang}\,\Phi = \text{ſin}\,\omega$.

8me Colonne. Le $\log. \text{tang}\,\Phi = \log \text{ſin}\,\omega$.

9me Colonne. L'angle Φ répondant.

§. 12. Il n'y a donc que les trois dernieres colonnes qui ne ſe trouvent pas immédiatement dans les Tables, ſi on veut les réduire aux mêmes angles ω qu'on a mis pour baſe pour les colonnes précédentes. Mais, ſi pour ces trois dernieres colonnes on met pour baſe l'angle Φ, ces trois colonnes ſe trouvent également toutes calculées: mais dans ce cas il faut y joindre une colonne qui donne pour chaque angle Φ le ſecteur hyperbolique répondant

$$u = \tfrac{1}{2} \log \text{tang}\,(45° + \Phi)$$

& cette colonne ſe calcule en prenant la moitié de tous les log. tang

$(45° + \Phi)$ qui ſe trouvent dans les Tables. Je m'en tiendrai néanmoins au premier arrangement, & je donnerai à la fin de ce Mémoire un échantillon dans une Table qui n'eſt calculée que de degrés en degrés.

§. 13. Maintenant il s'agit de faire voir le paralléliſme qui ſe trouve entre la Trigonométrie circulaire & l'hyperbolique. C'eſt ce qu'on verra comme d'un coup d'œil dans la liſte ſuivante.

Formules circulaires.	*Formules hyperboliques.*
Soient deux ſecteurs circulaires y, z.	Soient deux ſecteurs hyperboliques y, z.
Il ſera	Il ſera
1°. $\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y . \sin z$	1°. $\sin(y+z) = \sin y . \cos z + \mathrm{c}.y . \sin z$
2°. $\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y . \sin z$	2°. $\sin(y-z) = \sin y . \cos z - \mathrm{c}.y . \sin z$
3°. $\cos(y+z) = \cos y . \mathrm{c}.z - \sin y . \sin z$	3°. $\cos(y+z) = \cos y . \cos z + \sin y . \sin z$
4°. $\cos(y-z) = \cos y . \mathrm{c}.z + \sin y . \sin z$	4°. $\cos(y-z) = \cos y . \cos z - \sin y . \sin z$
5°. $2 \sin y . \cos z = \sin(y+z) + \sin(y-z)$	5°. $2 \sin y . \cos z = \sin(y+z) + \sin(y-z)$
6°. $2 \cos y . \sin z = \sin(y+z) - \sin(y-z)$	6°. $2 \cos y . \sin z = \sin(y+z) - \sin(y-z)$
7°. $2 \cos y . \mathrm{c}.z = \mathrm{c}.(y-z) + \cos(y+z)$	7°. $2 \cos y . \mathrm{c}.z = \mathrm{c}.(y+z) + \mathrm{c}.(y-z)$
8°. $2 \sin y . \sin z = \mathrm{c}.(y-z) - \cos(y+z)$	8°. $2 \sin y . \sin z = \mathrm{c}.(y+z) - \mathrm{c}.(y-z)$
9°. $\sin y + \sin z = 2 \sin \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$	9°. $\sin y + \sin z = 2 \sin \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$
10°. $\sin y - \sin z = 2 \cos \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$	10°. $\sin y - \sin z = 2 \cos \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$
11°. $\cos y + \mathrm{c}.z = 2 \cos \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$	11°. $\cos y + \mathrm{c}.z = 2 \cos \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$
12°. $\cos z + \mathrm{c}.y = 2 \sin \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$	12°. $\cos y - \mathrm{c}.z = 2 \sin \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$

13°.

13°.	tang(y+z) = (ty+tz) : (1−ty.tz)	13°.	t(y+z) = (ty+tz) : (1+ty.tz)
14°.	t(y−z) = (ty−tz) : (1+ty.tz)	14°.	t(y−z) = (ty−tz) : (1−ty.tz)
15°.	ty+tz = f(y+z) ; cosy.cosz	15°.	ty+tz = f(y+z) : cosy.cosz
16°.	ty−tz = f(y−z) : cosy.cosz	16°.	ty−tz = f(y−z) : cosy.cosz
17°.	(ty+tz) : (ty−tz) = f(y+z) : f(y−z	17°.	(ty+tz) : (ty−tz) = f(y+z) : f(y−z)
18°.	(fy+fz) : (fy−fz) = $t\frac{y+z}{2} : t\frac{y-z}{2}$	18°.	(fy+fz) : (fy−fz) = $t\frac{y+z}{2} : t\frac{y-z}{2}$
19°.	$2 \sin y^2 = 1 - \cos 2y$	19°.	$2 \sin y^2 = \cos 2y - 1$
20°.	$2 \cos y^2 = 1 + \cos 2y$	20°.	$2 \cos y^2 = \cos 2y + 1$
21°.	$\sin y^2 + \cos y^2 = 1$	21°.	$\cos y^2 - \sin y^2 = 1$
22°.	$\cos y^2 - \sin y^2 = \cos 2y$	22°.	$\cos y^2 + \sin y^2 = \cos 2y$
23°.	tang 2y = 2ty : (1−ty²)	23°.	t2y = 2ty : (1+ty²)
24°.	sin 2y = 2ty : (1+ty²)	24°.	f2y = 2ty : (1−ty²)
25°.	cos 2y = (1−ty²) : (1+ty²)	25°.	cos 2y = (1+ty²) : (1−ty²)
	&c.		&c.

§. 14. Comme donc les formules hyperboliques ne different des formules circulaires répondantes que tout au plus dans les signes + —, & que même dans la plus grande partie de ces formules l'identité s'étend jusques sur les signes, on conçoit aisément qu'on peut attendre des formules hyperboliques les mêmes avantages qu'on a eus des formules circulaires répondantes. Du reste toutes ces formules se trouvent aisément, en ce qu'il est

pour le cercle	pour l'yperbole
$\sin y = \frac{e^{yV-1} - e^{-yV-1}}{2V1}$	$\sin y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$
$\cos y = \frac{e^{yV-1} - e^{-yV+1}}{2}$	$\cos y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est = 1.

§. 15.

§. 15. Je vais maintenant éclaircir par quelques exemples plus détaillés l'uſage qu'on pourra faire de la Trigonométrie hyperbolique.

Fig. 2. Soient dans un triangle ſphérique les quatre parties continues A, c, B, a. L'angle c & le côté B ſont donnés, & il s'agit de calculer une Table qui pour chaque angle c indique l'angle répondant a. La Trigonométrie donne pour le cas de quatre parties continues

$$\text{ſin B. cot A} = \text{coſ } c. \text{ coſ B} + \text{ſin } c. \text{ cot } a.$$

Et dans cette formule les côtés & les angles ſont ſuppoſés ne point excéder les 90 degrés. Nous aurons donc

$$\frac{\text{cot } a}{\text{coſ B}} = \text{t B. cot A. coſec } c - \text{cot } c.$$

Faiſons

$$\text{t B. cot A} = \text{t } k$$
$$c = 90^\circ - c'$$

& il ſera

$$\frac{\text{cot } a}{\text{coſ B}} = \text{t } k. \text{ ſec } c' - \text{t} c'$$

Or, pour transférer cette formule à l'hyperbole, on regardera k comme un angle commun, & c' comme un angle tranſcendant. Soient les ſecteurs hyperboliques répondans $\varkappa$, γ, & il ſera

$$\frac{\text{cot } a}{\text{coſ B}} = \text{t } \varkappa. \text{ coſ } \gamma - \text{ſin } \gamma$$

& partant

$$\frac{\text{cot } a}{\text{coſ B}} = \frac{\text{ſ } \varkappa \text{ coſ } \gamma - \text{coſ } \varkappa \text{ ſ } \gamma}{\text{coſ } \varkappa}$$

ce qui donne

$$\text{cot } a = \frac{\text{coſ B}}{\text{coſ } \varkappa}. \text{ ſin } (\varkappa - \gamma)$$

ou,

ou, pour diſtinguer les fonctions hyperboliques des circulaires,

$$\cot \alpha = \frac{\cos B}{\cos \text{h. } \varkappa} \cdot \sin \text{hyp } (\varkappa - \gamma).$$

De cette maniere le calcul eſt réduit à une ſeule analogie, ou bien à la ſimple addition du logarithme conſtant de

$$\frac{\cos B}{\cos \text{hyp. } \varkappa}$$

au logarithme variable de

$$\sin \text{hyp. } (\varkappa - \gamma).$$

§. 16. Voici maintenant comment ce calcul peut être arrangé en nombres. Soit

$$B = 37°.\,30'$$
$$A = 70°.\,0.$$

On aura d'abord

$$\log. \text{t} B = 9,8849805$$
$$\log. \cot A = 9,5610659$$

donc $\log. \text{t} K = 9,4460464.$

Ce logarithme étant cherché dans la 8me Colonne (§. 11) donnera dans la 2de Colonne le ſecteur hyperbolique répondant

$$\varkappa = 0,1245962$$

& dans la 6me Colonne le

$$\log. \cos \text{hyp } \varkappa = 0,0176718:$$

mais il eſt $\log \cos B = 9,8994667$

donc $\log \frac{\cos B}{\cos. \text{hyp.} \varkappa} = 9,8817949.$

Et voilà la préparation faite. On cherchera donc chaque angle α' dans la premiere Colonne, & la ſeconde donnera le ſecteur γ répondant; par-là on trouve $\varkappa - \gamma$ par la ſimple ſouſtraction. Et en cher-

chant le ſecteur $\varkappa - \gamma$ dans la ſeconde Colonne, on trouvera dans la 5me le log. ſin hyp ($\varkappa - \gamma$) répondant, auquel on ajoutera le log (cof B : cof hyp $\varkappa$) qu'on vient de trouver, & la ſomme donnera le log. cot a moyennant lequel l'angle a ſe trouve dans les Tables circulaires. Voici le calcul pour les angles c' de 15 en 15 degrés.

	$\Phi = 0{,}1245962$	$\Phi - \gamma$	9,8817948	l cot a
$c' = 0$	$\gamma = 0{,}0000000$	$+0{,}1245962$	9,4636576	9,3454524
15	$= 0{,}1150195$	$+0{,}0095767$	8,3357462	8,2175410
30	$= 0{,}2385606$	$-0{,}1139644$	9,4239595	9,3057543
45	$= 0{,}3827754$	$-0{,}2581795$	9,7994183	9,6812131
60	$= 0{,}5719475$	$-0{,}4473513$	10,0871152	9,9789100
75	$= 0{,}8805709$	$-0{,}7559747$	10,4413765	10,3231713
90	$=$ infini.	$-$ infini.	infini.	infini.

Il ſera donc

c'	c	a
90	0	180°. 0′. 0″
75	15	154. 35. 8
60	30	133. 36. 34
45	45	115. 38. 22
30	60	101. 25. 49
15	75	89. 3. 6
0	90	77. 30. 31.

On voit que pour continuer il faut prendre c négatif, ce qui dans la troiſieme Colonne, au lieu de $\Phi - \gamma$, donnera $\Phi + \gamma$. Du reſte les angles a repréſentent dans cet exemple les azimuths pour l'élévation du Pole $90° - B = 52°.30'$, & la déclinaiſon boréale $90° - A = 20°$, & les angles horaires c, c'.

§. 17. Comme l'angle commun k ne ſauroit ſurpaſſer les 45°, on voit que, s'il avoit été

$$\text{tang B. cot A} > 1$$

au

au lieu de

$$\frac{\cot a}{\text{cof B}} = t\,k.\ \text{fec}\ c' - t\,c'$$

il eût fallu faire

$$\frac{\cot a}{\text{cof B}.\,t\,k} = \text{fec}\ c' - \cot k.\ t\,c$$

ce qui, en faiſant $\cot k = t\,\lambda$, eût donné

$$\frac{\cot a}{\text{cof B}.\ \cot \lambda} = \frac{\text{cof hyp}\ \gamma.\ \text{cof hyp}\ \lambda' - \text{ſ hyp}\ \gamma.\ \text{ſ hyp}\ \lambda'}{\text{cof hyp}\ \lambda}$$

& partant

$$\cot a = \frac{\text{cof B}}{\text{ſin hyp}\ \lambda}.\ \text{cof hyp}\ (\lambda' - \gamma).$$

§. 18. De cette maniere j'ai repaſſé les autres cas des triangles obliquangles, pour voir ſi moyennant quelque préparation le calcul des Tables peut être réduit à une ſeule analogie, ſoit avec les Tables circulaires, ſoit en employant encore les Tables hyperboliques. Voici le réſultat de mes eſſais.

§. 19. Comme l'exemple que je viens de détailler eſt pris du cas des parties continues A, c, B, a, on voit que les Tables qu'on pourra avoir beſoin de calculer ſeront de 6 eſpeces: car elles pourront faire voir le rapport entre

$$\begin{array}{llll} \text{AB}, & \text{B}a, & ac \\ \text{A}a, & \text{B}c, \\ \text{A}c. \end{array}$$

Ces 6 eſpeces ſe doublent lorſqu'on a égard à la différence entre la quantité donnée & celle qu'on cherche. En voici la ſpécification.

§. 20. La formule générale pour les parties continues eſt

$$\text{ſ B}.\ \cot \text{A} = \text{cof}\,c.\ \text{cof B} + \text{ſ}\,c.\ \cot.\ a.$$

Qu'il s'agiſſe maintenant d'exprimer

I°. A par a.

On aura

$$\frac{\int B.\cot A}{\int c} = \cot c.\cos\int B + \cot a.$$

Qu'on faſſe

$$\cot c.\cos\int B = \cot\psi$$

& il ſera

$$\frac{\int B.\cot A}{\int c} = \cot\psi + \cot a = \frac{\int(a+\psi)}{\int\psi.\int a}$$

ce qui donne

$$\cot A = \frac{\int c}{\int B.\int\psi}\cdot\frac{\int(a+\psi)}{\int\psi}.$$

Or le facteur

$$\frac{\int c}{\int B.\int\psi}$$

étant conſtant, on voit que la Table ſe calcule par une ſimple analogie, & il n'y entre que des fonctions circulaires.

II°. a par A.

On aura

$$\frac{\int c.\cot a}{\int B} = \cot A - \cot B.\cos\int c.$$

Qu'on faſſe $\cot B.\cos\int c = \cot\psi$

& on aura

$$-\cot a = \frac{\int B}{\int c.\int\psi}\cdot\frac{\sin(A-\psi)}{\int A}$$

formule qui ſe réduit à une ſimple analogie, & où il n'entre que des fonctions circulaires.

III°.

III°. A par c.

On aura

$$\frac{\text{ſ}B.\ \cot A}{\cot a} = \text{coſ}c.\ \text{t}\,a.\ \text{coſ}B + \text{ſ}c.$$

Qu'on faſſe

$$\text{t}\,a.\ \text{coſ}B = \text{t}\,\psi$$

& il ſera

$$\cot A = \frac{\cot a}{\text{ſ}B.\ \text{ſ}\psi}.\ \text{ſ}(c + \psi)$$

analogie ſimple & fonctions circulaires.

IV°. c par A.

On aura (N°. III.)

$$\text{ſ}(c + \psi) = (\text{ſ}B.\ \text{ſ}\psi.\ \text{t}\,a).\ \cot A\,;$$

or $c + \psi$ étant trouvé, c ſe trouve ſans peine.

V°. a par B.

On aura

$$\cot a.\ \text{t}\,A.\ \text{ſ}c = \text{ſ}B - \text{coſ}c.\ \text{t}\,A.\ \text{coſ}B.$$

Qu'on faſſe

$$\text{coſ}c.\ \text{t}\,A = \text{t}\,\psi$$

& il ſera

$$\cot a = \frac{\cot A}{\text{ſ}c.\ \text{coſ}\psi}.\ \text{ſin}\,(B - \psi)$$

analogie ſimple & fonctions circulaires.

VI°. B par a.

On aura (N°. V.)

$$\text{ſ}(B - \psi) = \cot a.\ (\text{t}\,A.\ \text{ſ}c.\ \text{coſ}\psi)$$

& $B - \psi$ étant trouvé, on ajoute ψ pour avoir B.

VII°. A par B.

On aura

$$\frac{\cot A}{\cos c} = \cot B + \text{t } c.\ \cot a.\ \text{cosec } B.$$

Qu'au lieu de B on prenne $90° - B = B'$, & en faiſant

$$\text{t } c.\ \cot a = \text{tang } \psi$$

il ſera $\quad \cot A = \text{t } B' + \text{t } \psi.\ \text{ſec } B'.$

Faiſant donc $\quad \text{t } B' = \text{ſin hyp } \mathcal{E}.$

$$\text{ſec } B' = \text{cof hyp } \mathcal{E}.$$

& nommant ψ' le ſecteur hyperbolique répondant à l'angle commun ψ, on aura

$$\frac{\cot A}{\cos c} = \text{ſ hyp } \mathcal{E} + \text{cof hyp } \mathcal{E}.\ \text{t}\psi' = \frac{\text{ſ hyp } (\mathcal{E} + \psi')}{\text{cof hyp } \psi'}$$

ce qui donne $\quad \cot A = \frac{\cos c}{\text{cof hyp } \psi'}.\ \text{ſin hyp } (\mathcal{E} + \psi').$

Le calcul eſt fort reſſemblant à celui que j'ai détaillé ci-deſſus (§. 15 - - 17). Et s'il ſe trouve

$$\text{t } c.\ \cot a > 1$$

on fera $\quad \frac{\cot A}{\text{ſ } c.\ \cot a} = \cot c.\ \text{t } a.\ \cot B + \text{cosec } B$

$$90° - B = B'$$

$$\text{t } B' = \text{ſin hyp } \mathcal{E}$$

$$\text{ſec } B' = \text{cof hyp } \mathcal{E}$$

$$\cot c.\ \text{t } a = \text{t } \psi$$

& il ſera

$$\frac{\cot A}{\text{ſ } c.\ \cot a} = \text{t}\psi'.\ \text{ſin hyp } \mathcal{E} + \text{cof hyp } \mathcal{E} = \frac{\text{cof hyp } (\mathcal{E} + \psi')}{\text{cof hyp } \psi'}$$

ce qui

ce qui donne $\cot A = \frac{\text{ſ}c.\cot a}{\text{cof hyp}\,\psi'}.\text{cof hyp}\,(\mathfrak{C}+\psi')$.

VIII°. B par A.

On aura (N°. VII.)

$$\text{ſin hyp}\,(\mathfrak{C}+\psi') = \cot A.\frac{\text{cof hyp}\,\psi'}{\text{cof}\,c}$$

ou dans le ſecond cas

$$\text{cof hyp}\,(\mathfrak{C}+\psi') = \cot A.\frac{\text{cof hyp}\,\psi'}{\text{ſ}c.\cot a}.$$

Ici le log. ſin. ou le log. cof. hyp. du ſecteur $\mathfrak{C}+\psi'$ étant cherché dans la 5me ou 6me Colonne (§. 11), on trouvera dans la ſeconde Colonne le ſecteur hyperbolique $\mathfrak{C}+\psi'$ répondant, duquel le ſecteur ψ' étant ſouſtrait, on cherchera le ſecteur $\mathfrak{C}$ dans la ſeconde Colonne, & on aura dans la premiere Colonne l'angle $B' = 90 - B$ répondant.

IX°. *a* par *c*.

C'eſt le cas détaillé ci-deſſus (§. 15, 16, 17); on aura donc

$$\cot a = \frac{\text{cof}\,B}{\text{cof hyp}\,\varkappa}.\ \text{ſin hyp}\,(\varkappa-\gamma) \quad (\S.\,15)$$

ou bien $$\cot a = \frac{\text{cof}\,B}{\text{ſin hyp}\,\lambda}.\ \text{cof hyp}\,(\lambda-\gamma) \quad (\S.\,17).$$

X°. *c* par *a*.

On aura (N°. IX.)

$$\text{ſin hyp}\,(\varkappa-\gamma) = \cot a.\frac{\text{cof hyp}\,\varkappa}{\text{cof}\,B}$$

ou bien $$\text{cof hyp}\,(\lambda-\gamma) = \cot a.\frac{\text{ſin hyp}\,\lambda}{\text{cof}\,B}.$$

Ici le ſecteur $\lambda - \gamma$ ou $\varkappa - \gamma$ étant trouvé, le ſecteur γ ſe trouve par une ſimple ſouſtraction, & en le cherchant dans la ſeconde

conde Colonne, on trouvera dans la premiere l'angle $c' = 90 - c$ répondant.

XI°. & XII°. B par c, ou c par B.

Ces deux cas ſont les moins traitables. Tout ce qu'on pourra faire ſera d'exprimer $B + c$ par $B - c$, ou réciproquement $B - c$ par $B + c$.

§. 21. Si les quatre parties du triangle ſphérique, qui entrent dans le calcul, ſont les trois côtés A, B, C, avec l'angle a, que je ſuppoſe être oppoſé au côté A; on aura la formule générale Fig. 3.

$$\text{cof A} = \text{cof B. cof C} + \text{ſin B. ſin C. cof } a.$$

Voici la ſpécification des cas particuliers qui peuvent ſe préſenter lorsqu'il s'agit de calculer des Tables.

I°. A par a.

On aura $\dfrac{\text{cof A}}{\text{ſ B. ſ C}} = \text{cot B. cot C} + \text{cof } a.$

Qu'on faſſe $\text{cot B. cot C} + \text{cof } \psi$

& on aura $\text{cof A} = 2\,\text{ſ B. ſ C. cof}\dfrac{\psi + a}{2}\text{. cof}\dfrac{\psi - a}{2}.$

Ces fonctions ſeront circulaires toutes les fois qu'il ſera

$$\text{cot B. cot C} < 1.$$

Mais lorſqu'il eſt $\text{cot B. cot C} > 1$

on fera $90° - a = a'$

$$\text{cot B. cot C} = \text{ſin hyp } \psi$$

on cherchera ſin a' dans la troiſieme Colonne de la Table, & dans la ſeconde on trouvera le ſecteur hyperbolique répondant. Ce ſecteur étant poſé $= \alpha$, on aura

$$\frac{\text{cof A}}{\text{ſ B. ſ C}} = \text{ſin hyp } \psi + \text{ſin hyp } \alpha = 2.\text{ſ hyp}\frac{\psi + \alpha}{2}\text{. cof hyp}\frac{\psi - \alpha}{2}$$

&

& partant $\operatorname{cof} A = 2 \operatorname{f} B . \operatorname{f} C . \operatorname{f} \operatorname{hyp} \frac{\psi + a}{2} . \operatorname{cof} \operatorname{hyp} \frac{\psi - a}{2}$.

II°. a par A.

On aura $\operatorname{cof} a = \frac{\operatorname{cof} A - \operatorname{cof} B . \operatorname{cof} C}{\operatorname{f} B . \operatorname{f} C}$.

Qu'on faſſe $\operatorname{cof} B . \operatorname{cof} C = \operatorname{cof} \psi$

& il ſera $\operatorname{cof} a = \frac{2}{\operatorname{f} B . \operatorname{f} C} . \operatorname{f} \frac{\psi + A}{2} . \operatorname{f} \frac{\psi - A}{2}$.

Ces fonctions ſont toujours circulaires.

III°. A par B.

On aura $\operatorname{cof} A = \operatorname{cof} C (\operatorname{cof} B + \operatorname{f} B . \operatorname{t} C . \operatorname{cof} a)$.

Qu'on faſſe $\operatorname{t} C . \operatorname{cof} a = \operatorname{t} \psi$

& il ſera $\operatorname{cof} A = \frac{\operatorname{cof} C}{\operatorname{cof} \psi} . \operatorname{cof} (B - \psi)$.

Ces fonctions ſont toujours circulaires.

IV°. B par A.

On aura (N°. III.)

$$\operatorname{cof} (B - \psi) = \frac{\operatorname{cof} \psi}{\operatorname{cof} C} . \operatorname{cof} A.$$

V°. a par B.

On aura $\operatorname{f} B . \operatorname{f} C . \operatorname{cof} a = \operatorname{cof} C \left(\frac{\operatorname{cof} A}{\operatorname{cof} C} - \operatorname{cof} B \right)$.

Qu'on faſſe $\frac{\operatorname{cof} A}{\operatorname{cof} C} = \operatorname{cof} \psi$

& il ſera

$$\operatorname{cof} a = 2 \operatorname{cot} C . \operatorname{f} \frac{B + \psi}{2} . \operatorname{f} \frac{B - \psi}{2} : \operatorname{ſin} B.$$

Ces fonctions ne ſont circulaires que lorſqu'il eſt

$$\frac{\text{cof A}}{\text{cof C}} < 1.$$

Voici une autre ſolution. Comme il eſt

$$\text{cof } a. \text{ f C} = \text{cof A. cofec B} - \text{cof C. cot B},$$

faiſons $90° - B = B'$

$$\frac{\text{cof A}}{\text{cof C}} = \text{tang } k,$$

il ſera $\text{cof } a. \text{ t C} = \text{t } k. \text{ ſec B}' - \text{t B}'.$

Or ici k eſt un angle commun, & B' un angle tranſcendant. Cherchant donc t k dans la 8me, ou log t k dans la 7me Colonne, on trouvera dans la 2de Colonne le ſecteur hyperbolique répondant, qui ſoit $= u$. Enſuite, en prenant B' dans la premiere Colonne, on trouvera dans la ſeconde le ſecteur hyperbolique répondant, qui ſoit $= \mathfrak{E}$. De cette façon on aura

$$\text{cof } a. \text{ t C} = \frac{\text{ſin hyp } (u - \mathfrak{E})}{\text{cof hyp } u}$$

& partant $\text{cof } a = \frac{\text{cot C}}{\text{cof hyp } u}$. ſin hyp $(u - \mathfrak{E})$.

Cette formule ſert pour tous les cas.

VI°. B par a.

On aura (N°. V.)

$$\text{ſin hyp } (u - \mathfrak{E}) = \text{cof hyp. } u. \text{ t C. cof } a.$$

Par cette formule on trouve le ſecteur hyperbolique $u - \mathfrak{E}$, qu'on ſouſtrait du ſecteur u, afin d'avoir le ſecteur $\mathfrak{E}$, lequel étant cherché dans la ſeconde Colonne donne dans la premiere l'angle répondant $B' = 90 - B$.

VII°. A par C. Tout comme A par B. (N°. III.)

VIII°.

VIII°. C par A. Tout comme B par A. (N°. IV.)

IX°. *a* par C. Tout comme *a* par B. (N°. V.)

X°. C par *a*. Tout comme B par *a*. (N°. VI.)

Car on voit par la formule générale que les côtés B, C, peuvent être changés l'un contre l'autre.

XI°. XII°. B par C, ou C par B. Ces deux cas qui en effet ne different point l'un de l'autre, ſont les moins traitables, & tout ce qu'on peut faire c'eſt de déterminer B + C par B — C, ou réciproquement B — C par B + C.

§. 22. Le troiſieme cas général eſt celui où les quatre parties du triangle ſphérique ſont ſes trois angles *a*, *b*, *c* & un côté A qu'on ſuppoſe être oppoſé à l'angle A. La formule générale pour ce cas étant Fig. 4.

$$\text{cof } a = \text{cof } b.\ \text{cof } c - \text{ſ } b.\ \text{ſ } c.\ \text{cof A},$$

on voit qu'elle ne differe que dans les ſignes de la formule du ſecond cas général (§. 21). Et ainſi les 12 cas particuliers ſe traitant d'une façon tout à fait ſemblable, je ne m'arrêterai pas à les expoſer tout au long.

§. 23. Enfin le quatrieme cas général eſt celui des parties oppoſées A, *a*, B, *b*. Et comme ici il eſt ſimplement Fig. 5.

$$\text{ſ A} : \text{ſ } a = \text{ſ B} : \text{ſ } b$$

on voit que cettte analogie peut toujours être employée ſans aucune autre réduction.

Mais il ne ſera pas inutile de rendre viſible le paſſage des quantités circulaires aux quantités hyperboliques. Je reprendrai pour cet effet l'exemple que j'ai rapporté ci-deſſus (§. 3.) & la conſtruction que j'en ai donnée pour le cas où les quantités circulaires n'offrent rien d'imaginaire, c'eſt à dire, pour le cas où l'horiſon paſſe en effet par le cercle AGBF. Retenons la ſignification que j'ai donnée aux lettres *a*, B, C, H, φ (§. 2) & la formule générale eſt Fig. 7.

$$\text{ſin H} = \text{cof B. cof C} + \text{ſin B. ſin C. cof. } a.$$

Cette formule ſe change en

$$\frac{\text{ſin H}}{\text{ſin B. ſin C}} = \text{cot B. cot C} + \text{cof } a,$$

& en faiſant $\quad - \text{cot B. cot C} = \text{cof } \Phi$

il ſera $\quad \frac{\text{ſin H}}{\text{ſin B. ſin C}} = \text{cof } a - \text{cof } \Phi,$

& Φ exprimera l'arc ſemidiurne. Soit donc dans la 7me figure le rayon $DL = 1$, on aura

$$AQ = a, \quad DT = \text{cof } a$$
$$AQG = \Phi, \quad DC = -\text{cof } \Phi$$

donc $\quad \text{cof } a - \text{cof } \Phi = DT + DC = TC = QK.$

Ainſi il ſera $\quad QK = \frac{\text{ſin H}}{\text{ſin B. ſin C}} = \text{cof } a - \text{cof } \Phi.$

Fig. 8. Mais, dans les cas où le cercle AB n'eſt plus coupé par l'horiſon, comme dans la 8e Figure, on voit que DC ne pourra plus repréſenter un cofinus circulaire, parce que le point C ne ſe trouve pas au dedans du cercle AB. Qu'on décrive donc l'hyperbole équilaterale ILV, qui ait le même centre D, & dont l'axe ſoit DL, on aura

$DC = kc$, ſinus hyperbolique du ſecteur LkD,
$DT = qt$, ſinus hyperbolique du ſecteur LqD.

Et comme il eſt $\quad \frac{\text{ſin H}}{\text{ſin B. ſin C}} = QK = DT + DC,$

il ſera également $\quad \frac{\text{ſin H}}{\text{ſin B. ſin C}} = qt + ck.$

Faiſant donc $\quad qt = \text{cof } a = \text{ſin hyp } \alpha$
$ck = \text{ſin hyp } \psi$

il ſera

il ſera $$\frac{\text{ſin H}}{\text{ſin B. ſin C}} = \text{ſin hyp } \alpha + \text{ſin hyp } \psi$$
$$= 2 \text{ ſin hyp } \frac{\psi+\alpha}{2} . \text{ cof } \frac{\psi-\alpha}{2},$$

donc $$\text{ſin H} = 2 . \text{ſin B. ſin C. ſin hyp } \frac{\psi+\alpha}{2} . \text{ cof } \frac{\psi-\alpha}{2},$$

tout comme §. 21. N°. I. On voit que ψ repréſente ici le ſecteur LkD, qui pour une même déclinaiſon eſt conſtant, & α repréſente le ſecteur $Lq D$, qui varie avec l'arc horaire AQ, en ſorte que Qq eſt toujours parallele à l'horiſon.

§. 24. Les ſecteurs hyperboliques employés dans ces formules ſont en effet des logarithmes (§. 9. 10.). Ainſi, en prenant la ſomme ou la différence de deux ſecteurs hyperboliques, c'eſt prendre la ſomme ou la différence de deux logarithmes; mais, comme ces ſecteurs ne ſont des logarithmes que rélativement à quelque fonction circulaire de l'angle commun ou de l'angle tranſcendant, il eſt clair que la ſomme ou la différence de deux ſecteurs ne ſera non plus un logarithme que rélativement à une ſemblable fonction. De cette maniere on pourroit plus ou moins faire abſtraction des fonctions hyperboliques; mais, outre que les formules ne s'abregent point par-là, l'analogie qu'il y a entre les fonctions hyperboliques & les fonctions circulaires ſe perdroit de vue: & il eſt très ſûr que cette analogie mérite l'attention & les recherches des Géometres, d'autant que ſon uſage ne ſe borne pas au calcul trigonométrique.

§. 25. Ainſi p. ex. on ſait que les racines imaginaires d'une équation quelconque peuvent être repréſentées par des facteurs de la forme $0 = x^2 - 2a \text{ cof } \omega . x + a^2$.

Si donc, au lieu du cof ω circulaire, on emploie des cof ψ hyperboliques, le facteur de la forme

$$0 = x^2 - 2a . \text{cof hyp } \psi . x + a^2$$

exprimera deux racines réelles, & toutes les conſéquences qu'on a déduites de la premiere de ces formules ſe déduiront de la ſeconde. On pourra même réunir ces deux formules en laiſſant indécis, ſi le coſinus qui s'y trouve eſt circulaire ou logarithmique.

§. 26. Soit propoſé p. ex.

$$0 = x^2 - 2a.\ \text{cof}\,\Phi.\ x + a^2.$$

Qu'on faſſe $y = x^m$

on aura $0 = y^2 - 2a^m \text{cof}\, m\Phi.\ y + a^2.$

Si donc $\text{cof}\,\Phi$ eſt hyperbolique, le $\text{cof}\, m\Phi$ le ſera auſſi, & les racines y ſeront réelles, quelle que ſoit la puiſſance m, & le ſecond terme ſera toujours négatif à moins que a ne ſoit négatif & m un nombre impair. Mais, ſi le $\text{cof}\,\Phi$ eſt circulaire, le $\text{cof}\, m\Phi$ le ſera auſſi, & le ſecond terme ſera poſitif ou négatif ſuivant la valeur qu'on donne à m. Si donc pour m on prend un nombre pair, tel que le ſecond terme devienne poſitif, alors les racines y devant être poſitives, comme étant une puiſſance paire des racines x, on voit que par-là on peut s'aſſurer que dans une équation propoſée il ſe trouve des racines imaginaires.

§. 27. On trouvera encore pour les ſinus & coſinus hyperboliques des formules pour les ſinus & coſinus des ſecteurs multiples. Ainſi p. ex. il eſt

$$\text{cof hyp}\ \omega = \text{cof hyp}\ \omega$$
$$\text{cof hyp}\ 2\omega = 2\,\text{cof hyp}\ \omega^2 - 1$$
$$\text{cof hyp}\ 3\omega = 4.\text{cof hyp}\ \omega^3 - 3\,\text{cof hyp}\ \omega.$$
$$\&c.$$

Cette derniere formule fait voir qu'une équation cubique qui n'a qu'une racine réelle ſe réduit à la triſection d'un ſecteur hyperbolique, tout comme une équation cubique dont toutes les racines ſont réelles ſe réduit à la triſection d'un arc ou d'un ſecteur circulaire.

§. 28.

§. 28. Je paſſerai encore à d'autres cas qui peuvent ſe préſenter dans la Trigonométrie ſphérique. Soit AR l'horiſon, AQ l'équateur, P ſon pole, V le zénith, M quelque point du ciel, dont il s'agit de trouver la hauteur MN, l'azimuth AN & l'angle parallactique PMV = NMR. Les données ſont l'élévation du pole AP, la déclinaiſon QM, & l'arc horaire AQ. Ce probleme ſe réduit ordinairement au triangle PMV, dont on connoit les arcs PM, PV, & l'angle MPV qu'ils renferment. Si donc il faut trouver MV, PVM, PMV, il eſt clair que le calcul demande tout au moins quatre analogies, outre quelques réductions. Et comme ce cas revient aſſez ſouvent, il me ſemble qu'un Aſtronome attaché à un Obſervatoire facilitera le travail au moyen d'une Table ſubſidiaire qu'il calculera pour ſon Obſervatoire, dès qu'il en a bien conſtaté l'élévation du pole. Cette Table doit indiquer pour chaque arc horaire AQ, de degrés en degrés, l'amplitude AR, l'arc ou la déclinaiſon RQ, & l'angle ARQ compris entre ces deux arcs. Cette Table en renferme virtuellement une autre; car, en prenant AR pour l'arc horaire, AQ ſera l'azimuth, RQ la hauteur du point de l'équateur R, & l'angle ARQ ſera l'angle parallactique.

§. 29. Mais le principal uſage de cette Table conſiſte en ce que, pour un arc horaire AQ & une déclinaiſon MQ quelconque, on trouve MN, AN, NMR, moyennant le triangle rectangle RNM. Car, pour chaque angle horaire AQ, la Table donne QR, d'où on obtient RM par une ſimple addition ou ſouſtraction. Enſuite la Table donne l'angle ARQ. Or, moyennant cet angle & l'arc RM, on trouve RMN, MN, RN, par trois analogies ſimples. Et RN étant ſouſtrait de l'arc AR que donne la Table, on trouve AN. Si on ne vouloit chercher que la hauteur NM, elle ſe trouve par une ſimple analogie, quel que puiſſe être l'arc horaire & la déclinaiſon du point M. Un obſervateur qui ſe rencontre ſouvent dans ce cas trouvera ſans contredit de l'avantage à calculer une Table ſemblable pour l'élévation du pole de ſon Obſervatoire.

§. 30.

§. 30. Suppoſons maintenant que AR ſoit l'équateur, AQ l'écliptique, M un point du ciel quelconque; AQ ſera ſa longitude, MQ ſa latitude, AN ſon aſcenſion droite, & NM ſa déclinaiſon. Et il eſt clair qu'en calculant une Table ſemblable pour l'obliquité de l'écliptique, qu'on voudra mettre pour baſe, elle donnera les mêmes avantages lorſque la longitude & la latitude d'un point quelconque M étant données, on veut en trouver l'aſcenſion droite & la déclinaiſon.

§. 31. Suppoſons réciproquement, que AR ſoit l'écliptique, AQ l'équateur; AQ ſera l'aſcenſion droite, RQ la déclinaiſon du point R, & ARQ l'angle de l'écliptique. Enſuite AQ ſera l'aſcenſion droite, MQ la déclinaiſon, AN la longitude, & NM la latitude d'un point quelconque M. Ainſi, moyennant une ſemblable Table, on trouvera avec une égale facilité AN, NM, moyennant AQ, QM.

TABLE.

I. Angle transſc.	II. Secteur hyperboli-que.	III. Sinus hyperbol.	IV. Cosinus hyperbol.	V. Log. du ſi-nus hyper-bol.	VI. Log. du coſ. hyperbol.	VII. Tang. de l'angle com-mun.	VIII. Log. tang. de l'angle com-mun.	IX. Angle [illegible]
0	0, 0000000	0000000	1, 0000000	infini négatif	10, 0000000	0000000	infini négatif	0. 0. 0
1	75803	174551	1. 0001523	8. 2419215	10. 0000662	174524	8. 2418553	0. 59. 59, 5
2	151628	349208	1. 0006095	8. 5437838	10. 0001646	349993	8. 5428192	1. 59 55, 7
3	227500	524078	1. 0013723	8. 7193958	10. 0005956	523360	8. 7188002	2. 59. 45, 2
4	303441	699268	1. 0024419	8. 8446437	10. 0010592	697565	8. 8435845	3. 59. 25, 0
5	379475	874887	1. 0038198	8. 9419518	10. 0016558	871557	8. 9403960	4. 58. 51, 8
6	455626	1051042	1. 0055082	9. 0216202	10. 0023857	1045285	9. 0191346	5. 58. 2, 2
7	531916	1227846	1. 0075099	9. 0891438	10. 0032493	1218693	9. 0858945	6. 56. 54, 0
8	608369	1405408	1. 0098276	9. 1478035	10. 0042472	1391731	9. 1435553	7. 55. 23, 0
9	685011	1583844	1. 0124651	9. 1997125	10. 0053801	1564345	9. 1943324	8. 53. 27, 5
10	761865	1763270	1. 0154267	9. 2463188	10. 0066485	1736481	9 2396702	9. 51. 8, 9
11	838955	1943803	1. 0187168	9. 2886523	10. 0080534	1908090	9. 2805989	10. 48. 9, 7
12	916308	2125565	1. 0223407	9. 3274745	10. 0095956	2079117	9. 3178789	11. 44. 43, 2
13	993948	2308683	1. 0263039	9. 3633641	10. 0112761	2249511	9. 3520880	12. 40. 39, 8
14	1071902	2493280	1. 0306135	9. 3967711	10. 0130959	2419119	9. 3836752	13. 35. 59, 3
15	1150195	2679492	1. 0352762	9. 4280525	10. 0150562	2588190	9. 4129962	14. 30. 38, 9
16	1228856	2867454	1. 0403994	9. 4574964	10. 0171584	2756374	9. 4403381	15. 24. 36, 7
17	1307911	3057307	1. 0458918	9. 4853390	10. 0194037	2923717	9. 4659353	16. 17. 50, 7
18	1387390	3249197	1. 0517622	9. 5117760	10. 0217937	3090170	9. 4899824	17. 10. 19, 3
19	1467320	3443276	1. 0580207	9. 5369719	10. 0243299	3255682	9. 5126419	18. 2. 1, 0
20	1547733	3639706	1. 0646778	9. 5610658	10. 0270142	3420202	9. 5340517	18. 52. 54, 2
21	1628657	3838640	1. 0717450	9. 5841774	10. 0298483	3583679	9. 5543292	19. 42. 57, 8
22	1710126	4040261	1. 0792347	9. 6064096	10. 0328341	3746066	9. 5735756	20. 32. 10, 6
23	1792171	4244749	1. 0871604	9. 6278519	10. 0359739	3907311	9. 5918780	21 20. 31, 7
24	1874826	4452287	1. 0955363	9. 6485831	10. 0392698	4067366	9. 6093133	22. 8. 0, 1
25	1958127	4663077	1. 1033779	9. 6686715	10. 0427243	4226183	9. 6259483	23. 54. 35. 3
26	2042108	4877326	1. 1136019	9. 6881818	10. 0463397	4383712	9. 6418420	23. 40. 16, 5
27	2126807	5095254	1. 1223262	9. 7071650	10. 0501190	4539905	9. 6570468	24 25. 8, 4
28	2212263	5317094	1. 1325701	9. 7256744	10. 0540651	4694716	9. 6716093	25. 8. 55, 4
29	2298515	5543090	1. 1433481	9. 7437520	10. 0581827	4848096	9. 6855712	25. 51. 52, 4
30	2385606	5773503	1. 1547005	9. 7614394	10. 0624694	5000000	9 6989700	26. 33. 54, 2
31	2473540	6008606	1. 1666334	9. 7787737	10. 0669344	5150381	9. 7118393	27. 15. 0, 7
32	2562480	6248694	1. 1791784	9. 7957892	10. 0715795	5299193	9. 7242097	27. 55. 11, 9
33	2652356	6494076	1. 1923633	9. 8125174	10. 0764086	5446390	9. 7361088	28. 34. 28, 0
34	2743256	6745085	1. 2062180	9. 8289874	10. 0814258	5591929	9. 7475617	29. 12. 49, 0
35	2835233	7002075	1. 2207746	9. 8452268	10. 0866315	5735764	9. 7585913	29. 50. 15, 2
36	2928341	7265426	1. 2360680	9. 8612610	10. 0920434	5877853	9. 7692187	30. 26. 47. 0
37	3022637	7535540	1. 2521357	9. 8771144	10. 0976514	6018150	9. 7794630	31. 2. 24, 7
38	3118183	7812856	1. 2690182	9. 8928098	10. 1034679	6156615	9. 7893420	31. 37. 8, 4
39	3215039	8097840	1. 2867596	9. 9083692	10. 1094974	6293204	9. 7988718	32, 11. 59, 0
40	3313275	8390996	1. 3054073	9. 9238135	10 1157460	6427876	9. 8080675	32. 43. 56, 4
41	3412960	8692868	1. 3250130	9. 9391631	10. 1222201	6560590	9. 8169429	33 15 57. 9
42	3514169	9004041	1. 3456327	9. 9544374	10. 1289265	6691306	9. 8255109	33 47. 15. 7
43	3616981	9325151	1. 3673275	9. 9696559	10. 1358725	6819984	9. 8337833	34. 17. 38, 1
44	3721481	9656888	1. 3901636	9. 9848372	10. 1430659	6946584	9. 8417713	34 47 10 0
45	3827757	1. 0000000	1. 0000000	10. 0000000	10. 1505150	7071068	9. 8494850	35. 15. 52, 0

I. Angle tranſc.	II. Secteur hyperboli-que.	III. Sinus hyperbol.	IV. Coſinus hyperbol.	V. Log. du ſi-nus hyper-bol.	VI. Log. du coſ. hyperbol.	VII. Tang. de l'angle com-mun.	VIII. Log. tang. de l'angle com-mun.	IX. Angle commun.
45	3827757	1.0000000	1.4142136	10.0000000	10.1505150	7071068	9.8494850	35. 15. 52,0
46	3935904	1.0355303	1.4395565	10.0151628	10.1582286	7193398	9.8569341	35. 43. 44,3
47	4046025	1.0723687	1.4662792	10.0303441	10.1662167	7313537	9.8641275	36. 10. 48,0
48	4158226	1.1106125	1.4944765	10.0455626	10.1744891	7431448	9.8710735	36. 37. 15,5
49	4272623	1.1503684	1.5242531	10.0608369	10.1830571	7547096	9.8777799	37. 2. 31,9
50	4389341	1.1917536	1.5557238	10.0761865	10.1919325	7660444	9.8842540	37. 27. 13,4
51	4508513	1.2348972	1.5890157	10.0916308	10.2011282	7771460	9.8905026	37. 51. 8,7
52	4630281	1.2799416	1.6242692	10.1071902	10.2106580	7880107	9.8965321	38. 14. 18,6
53	4754801	1.3270448	1.6616401	10.1228856	10.2205370	7986355	9.9023486	38. 36. 43,6
54	4882240	1.3763819	1.7013016	10.1387390	10.2307813	8090170	9.9079576	38. 58. 24,4
55	5012777	1.4281480	1.7434468	10.1547732	10.2414087	8191521	9.9133645	39. 19. 21,9
56	5146610	1.4825610	1.7883916	10.1710126	10.2524383	8290376	9.9185742	39. 39. 36,0
57	5283952	1.5398650	1.8360784	10.1874826	10.2638912	8386706	9.9235914	39. 59. 8,1
58	5425036	1.6003345	1.8870799	10.2042108	10.2757903	8480481	9.9284205	40. 17. 58,4
59	5570117	1.6642795	1.9416040	10.2212263	10.2881607	8571673	9.9330656	40. 36. 7,5
60	5719475	1.7320508	2.0000000	10.2385606	10.3010300	8660254	9.9375306	40. 53. 36,2
61	5873419	1.8040478	2.0626653	10.2562480	10.3144288	8746197	9.9418193	41. 10. 24,9
62	6032289	1.8807265	2.1300545	10.2743256	10.3283907	8829470	9.9459349	41. 26. 34,1
63	6196463	1.9626105	2.2026893	10.2928341	10.3429532	8910065	9.9498809	41 42. 4,5
64	6366359	2.0503038	2.2811720	10.3118182	10.3581580	8987940	9.9536602	41. 56. 56,4
65	6542448	2.1445069	2.3662016	10.3313275	10.3740517	9063078	9.9572757	42 11. 10,3
66	6725255	2.2460368	2.4585933	10.3514169	10.3906867	9135454	9.9607302	42. 24. 47,2
67	6915374	2.3558524	2.5593047	10.3721481	10.4081220	9205049	9.9640261	42. 37. 47,0
68	7113477	2.4750869	2.6694672	10.3935904	10.4264246	9271839	9.9671659	42 50. 10,3
69	7320331	2.6050891	2.7904281	10.4158226	10.4456708	9335804	9.9701517	43. 1. 57,4
70	7536812	2.7474774	2.9238044	10.4389341	10.4659483	9396926	9.9729858	43. 13. 9,0
71	7763935	2 9042109	3.0715535	10.4630281	10.4873581	9455185	9.9756701	43. 23. 45,2
72	8002875	3.0776835	3.2360680	10.4882240	10.5100176	9510565	9.9782063	43. 33. 46,8
73	8255012	3.2708526	3.4203036	10.5146610	10.5340647	9563048	9.9805963	43. 43. 13,7
74	8521975	3.4874144	3.6279553	10.5425036	10.5596619	9612617	9.9828416	43. 52. 6,4
75	8805709	3.7320508	3.8637033	10.5719475	10.5870038	9659258	9.9849438	44. 0. 25,3
76	9108562	4.0107809	4.1335655	10.6032289	10.6163248	9702957	9.9869041	44. 8. 20,9
77	9433405	4.3314759	4.4454115	10.6366359	10.6479120	9743701	9.9887239	44 15. 22,5
78	9783798	4.7046301	4.8097343	10.6725255	10.6821211	9781476	9.9904044	44. 22. 1,5
79	1.0164231	5.1445540	5.2408431	10.7113477	10.7194012	9816271	9.9919466	44. 28. 7,6
80	1.0580482	5.6712818	5.7587705	10.7536812	10.7603298	9848077	9.9933515	44 33. 41,2
81	1.1040158	6.3137515	6.3924532	10.8002875	10.8056676	9876883	9.9946199	44. 38. 42,4
82	1.1553563	7.1153697	7.1852965	10.8521975	10.8564447	9902680	9.9957528	44. 43. 11,4
83	1.2133139	8.1443464	8.2055090	10.9108562	10.9141055	9925462	9.9967507	44. 47. 8,4
84	1.2809042	9 5143645	9.5667722	10.9781798	10.9807654	9945218	9.9976143	44. 50. 33,5
85	1.3599059	11.4300523	11 4737132	11 0580482	11.0597040	9961947	9.9983442	44. 53. 26,7
86	1.4569162	14.3006663	14.3355870	11.1553563	11.1564155	9975640	9.9989408	44. 55. 48,5
87	1.5819321	19.0811367	19.1073226	11.2809042	11.2811998	9986295	9.9994044	44. 57. 38,6
88	1.7580785	28.6362533	28.6537083	11.4569162	11.4571808	9993908	9.9997354	44. 58. 57,2
89	2.0591416	57.2899617	57.2986885	11.7580785	11.7581447	9998477	9.9999338	44. 59. 43,6
90	infini.	infini.	infini.	infini.	infini.	1.0000000	10.0000000	45. 0. 0,0

Mé-

Fig 1

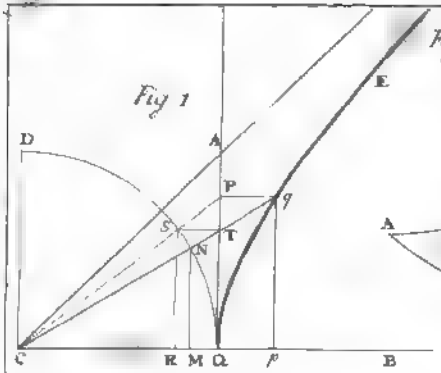


Fig 6

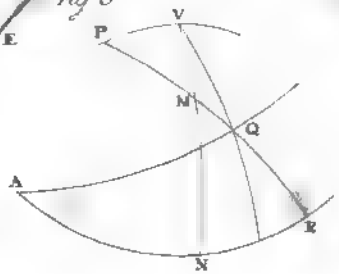


Fig. 7

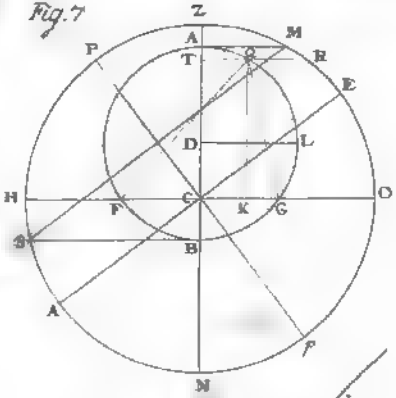


Fig. 2

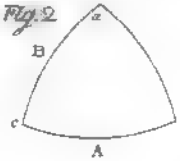


Fig. 3

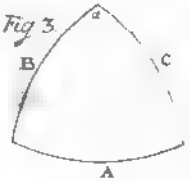


Fig 4

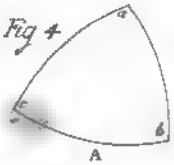


Fig 5.

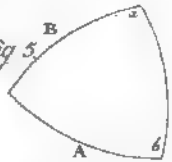
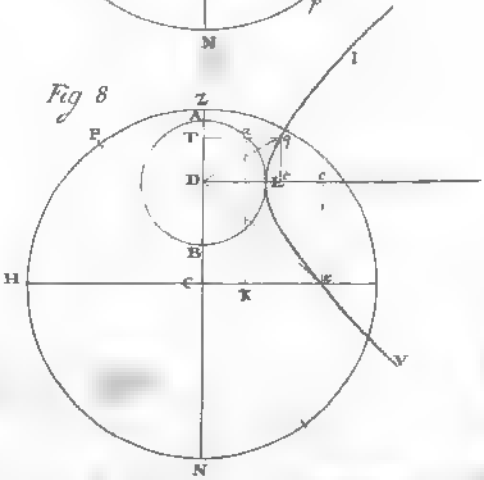


Fig 8



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

CONSIDÉRATIONS

SUR

CE QU'ON PEUT REGARDER AUJOURD'HUI

COMME LE BUT PRINCIPAL DES ACADÉMIES, ET COMME LEUR EFFET LE PLUS AVANTAGEUX. (*)

SECOND DISCOURS. (**)

PAR Mr. FORMEY.

Il y a un an, Meſſieurs, que j'ai déjà eu l'honneur de Vous entretenir ſur ce ſujet. Les bornes qui conviennent à nos Diſcours académiques ne me permirent pas d'achever ces Conſidérations; je n'indiquai pas même l'objet principal que j'y ai en vue, ce but auquel je crois que les Académies doivent ſurtout tendre, cet effet que je regarde comme le plus avantageux qu'elles puiſſent procurer dans l'état préſent des choſes. Il a fallu préalablement montrer d'où nous ſommes partis en fait de Science, & voir juſqu'où nous ſommes arrivés. Nous ſommes partis de l'ignorance qui eſt naturelle à l'homme; ſes ténebres ont été inſenſiblement diſſipées par les travaux d'une longue ſuite de ſiecles: on a obſervé les phénomenes; on a cherché leurs cauſes,

(*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 28 Janvier, 1768.

(**) Voyez le premier dans le Tome précédent, p. 367. & ſuiv.

ſes, & l'on eſt parvenu à en connoître un certain nombre. Mais, tandis que ce paſſage de l'ignorance à la ſcience s'opéroit avec la plus grande lenteur, & par des efforts qui le plus ſouvent n'étoient que des tâtonnemens, il ſurvint une eſpece de maladie épidémique de l'eſprit humain, qui arrêta tout court l'activité des recherches, & qui retint pendant une autre ſuite de ſiecles les hommes au point où ils étoient arrivés, dans la fauſſe & folle perſuaſion qu'ils ne pouvoient pas aller plus loin, & qu'il n'y avoit aucune queſtion qui ne fût actuellement décidée.

Vous comprenez, Meſſieurs, que je parle du Regne de la Scholaſtique. Les Docteurs angéliques, ſubtils, illuminés, n'ignoroient rien; ils avoient la ſcience infuſe & univerſelle; ils la communiquoient à leurs diſciples, qui la tranſmettoient à d'autres, toujours la même; à peu près comme ce talent enfoui qu'on retire de la Terre tel qu'il lui a été confié. Avec des Cieux de criſtal on n'avoit pas beſoin du Syſteme de *Copernic* & de l'Aſtronomie de *Newton*. Avec des qualités occultes, on étoit diſpenſé de connoître les loix de la Nature, la compoſition des maſſes, le méchaniſme de l'organiſation. Avec des diſtinctions on ſe débarraſſoit de toutes ces difficultés: il n'y avoit point de nœud Gordien dont leur redoutable trenchant ne vint à bout.

Une pareille ſituation auroit pu durer toujours, & il eſt ſurprenant qu'elle ait pris fin, puiſque l'orgueil & la pareſſe, les deux penchans les plus chers à l'homme, y trouvoient également leur compte. Cependant un rayon d'évidence perça; les yeux ſe deſſillerent, quoiqu'après une longue & opiniâtre réſiſtance: on eut honte du faux ſavoir, on comprit qu'il étoit pire que l'ignorance: & ce ſont certainement les Académies qui, depuis leur établiſſement, ont le plus contribué, ſoit à défricher les terres incultes, ſoit à arracher les ronces & les épines de deſſus celles qui en étoient couvertes. On n'admet plus aucun fait ſans des preuves de fait; on n'affirme plus aucune propoſition ſans des preuves de raiſonnement. Quand les unes ou les autres de ces preuves manquent, on ſuſpend ſon jugement; ou ſi l'on hazarde des déci-

déciſions, elles ſont vigoureuſement relancées, perſonne n'étant plus d'humeur à voir par les yeux d'autrui & à ſe rendre à la ſimple autorité de qui que ce ſoit.

Que reſte-t-il donc à faire, Meſſieurs? Je ne Vous tiendrai pas en ſuſpens aujourd'hui, & je me hâte de Vous dire que, ſelon moi, les Académies ont une nouvelle tâche à remplir, une nouvelle révolution à opérer; tâche peut-être plus difficile que les précédentes, révolution à laquelle je prévois les obſtacles les plus puiſſans, ſi tant eſt qu'ils ne ſoient pas inſurmontables. L'ennemi que la Science a aujourd'hui en tête, & qui partage avec elle l'empire des Lettres, ou plutôt qui l'a preſque uſurpé & envahi tout entier, c'eſt le *demi-ſavoir*. Qu'eſt-ce que ce demi-ſavoir? Que peuvent & que doivent faire les Académies pour l'extirper? Je ne crois pas, Meſſieurs, que ces objets ſoient indignes de votre attention.

Le demi-ſavoir eſt une expreſſion connue & reçue, mais dont je me propoſe de fixer le ſens rélativement à mon but. J'en fais donc un terme générique, par lequel j'entens tout degré de connoiſſance qui n'eſt pas exactement apprécié par ceux qui le poſſedent. Ainſi le mot de *demi* n'eſt employé que pour abréger. Diviſons le ſavoir en cent portions: celui qui en a dix, & celui qui en a quatre-vint-dix, s'ils croyent l'un & l'autre avoir les cent, ſont des demi-ſavans: ils prennent la partie quelconque pour le tout.

Il s'enſuit donc d'abord de là que je n'appelle pas demi-ſavans ceux qui, ne ſachant que certaines choſes, ſavent en même tems & reconnoiſſent qu'ils ne ſavent que ces choſes-là. Ce ſont au contraire les Citoyens les plus eſtimables de la République des Lettres. Le ſavoir univerſel n'exiſte point: les Savans qu'on a décorés de cette épithete, ſont ceux qui ont le mieux ſenti combien peu elle leur convenoit. Si vous poſſédez un champ que vous avez bien cultivé, je vous regarderai comme un bon Laboureur, & je vous donnerai les éloges que vous méritez inconteſtablement; mais, ſi vous prétendez être un

Sei-

Seigneur, un Prince, je me moquerai de votre vanité. Le Botaniſte eſt un Savant, quoiqu'il ne ſoit pas Chymiſte; & le Chymiſte un Savant, quoiqu'il ne ſoit pas Botaniſte. Celui qui n'eſt exactement au fait que des champignons eſt un Savant, quoiqu'il ignore le reſte de la Botanique; il en eſt de même du Métallurgiſte, quoique toutes les opérations du Laboratoire Chymique ne ſoient pas ſon fait. En un mot, celui qui ſait bien une choſe, eſt ſavant quant à cette choſe-là; & n'eſt point un demi-ſavant s'il ne s'arroge rien au delà. En faiſant alluſion à un Proverbe qui n'eſt pas aſſez noble pour le citer, je dis que, ſi chacun faiſoit ainſi ſon métier, les Sciences ſeroient mieux cultivées.

Ces hommes ſimples & modeſtes ſont le petit nombre ici, tout comme en Morale & dans la Société: on ne rencontre de toutes parts que gens à prétentions: il s'agit de les caractériſer, &, pour ainſi dire, de les nuancer.

La premiere nuance, mais ſi obſcure qu'elle ne mérite pas d'arrêter longtems nos regards, c'eſt celle qu'offrent des gens qui n'ont que la teinture d'une ſeule Science, & qui croyent y primer, y exceller. Cette illuſion eſt rare dans les Sciences exactes, telles que la Géométrie & toutes ſes dépendances. Mais elle eſt commune dans les autres Sciences, telles que la Métaphyſique, la Morale, le Droit Naturel, la Politique: tout fourmille de gens qui s'annoncent & s'affichent pour ſavoir le fin, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, & avoir le ſecret de ces Sciences, tandis qu'ils ne font qu'y balbutier.

Ne les tirons pas d'avantage de leur obſcurité, & conſidérons ceux qui poſſedent en effet une Science, & y ont même pris un vol auſſi élevé qu'elle le permet. La hauteur de ce vol leur fait quelquefois tourner la tête; & alors ils donnent aiſément dans l'une ou l'autre de ces deux chimeres, c'eſt de croire leur Science unique, ou de la croire univerſelle. Ils croyent leur Science unique, lorſque toutes les autres s'appetiſſent & s'anéantiſſent preſque à leurs yeux. A quoi

bon

bon les ſpéculations du Métaphyſicien, dit le Géometre? A quoi bon les calculs du Géometre, dit le Métaphyſicien? Et ainſi des autres. Ils croyent leur Science univerſelle, lorſqu'en admettant la réalité, l'utilité des autres ſciences, ils veulent les ſubordonner à celle qu'ils profeſſent, dont les principes ſont, à leur avis, primitifs & irréſolubles. Cependant il n'y a qu'une Science premiere, c'eſt l'Ontologie; & quiconque méconnoit ſes droits, eût-il réſolu les plus importans problemes des plus hautes Sciences, n'eſt qu'un demi-ſavant; il n'eſt ſurtout qu'un demi-Philoſophe, ou pour mieux dire, il n'eſt point Philoſophe, puiſqu'on ne l'eſt pas entant qu'on s'eſt approprié les connoiſſances qui ſont du reſſort de la Philoſophie, mais entant qu'on a cet eſprit philoſophique, qui eſt pour le vrai Savant ce qu'eſt l'Art de la Tactique pour un grand Général. Cependant il n'eſt point du tout ſurprenant qu'un homme qui s'eſt dévoué à une Science, qui en a fait ſon ſeul objet pendant toute ſa vie, en ait la plus haute idée, la regarde comme unique ou comme univerſelle: c'eſt là une des foibleſſes les plus naturelles à l'homme. On a bien vu à Paris un Maître à danſer, le fameux Marcel, qui parloit de ſon art comme s'il donnoit le branle à la Société, à l'Etat; & pour peu qu'on l'eût fâché, il auroit peut-être ajouté, aux Planetes & à toutes les Spheres.

Les nuances précédentes ne ſont que partiales: en voici une générale, dominante, qui donne à ce ſiecle le ton de couleur auquel il eſt reconnoiſſable, & le demeurera probablement aux yeux des ſiecles à venir. On aime à l'appeller le ſiecle de la Philoſophie: ſans nier entierement l'aſſertion, je l'appellerois volontiers le ſiecle du demi-ſavoir. Il s'agit de juſtifier ce que j'oſe avancer: & c'eſt à quoi je vais travailler.

La premiere révolution opérée dans l'eſprit humain, vous l'avez vu, Meſſieurs, a été de lui faire ſecouer le joug du faux ſavoir. *Deſcartes*, *Newton*, *Leibnitz*, les Académies; voilà les inſtrumens de cette révolution. Et je ne puis m'empêcher de remarquer qu'aucun Ouvrage n'a peut-être été plus efficace à cet égard que cette partie des

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris qui porte le nom d'Hiſtoire, & que M. *de Fontenelle* a faite pendant un demi-ſiecle d'une maniere qui doit lui mériter une reconnoiſſance immortelle de la part de nos derniers neveux. C'étoit là la bonne route: il falloit y reſter; on auroit été bien loin. Mais elle étoit trop ſimple & trop ſérieuſe pour fixer tous ceux qu'on inviroit à y marcher, & ſurtout la Nation volage aux yeux de laquelle on la traçoit.

Deux ſecours prétendus par leſquels on voulut étendre & faciliter les études, vinrent plutôt en détourner, & égarerent les hommes dans toutes ſortes de ſentiers, dont les uns ne menent au but que par de longs circuits, & les autres y font entierement tourner le dos. Je parle des Journaux & des Dictionnaires. Je n'en ferai pas l'hiſtoire qui rempliroit des Volumes. Je n'en conteſterai pas les avantages, à les prendre dans la ſimplicité de leur origine & dans les limites de leur deſtination. Mais, bon Dieu! à quoi ces premiers commencemens n'ont-ils pas conduit? Une comparaiſon exprimera ce que j'en penſe. Quelcun ſouhaite de la pluie pour arroſer ſon champ; un nuage ſe forme, groſſit, & en crevant au deſſus le ſubmerge. Voilà préciſément l'effet du déluge des deux ſortes de productions que nous venons de nommer. Cependant, & c'eſt ce qui les a tant multipliées, rien n'égale l'avidité avec laquelle elles ont été reçues; & quoiqu'elles ſouffrent actuellement quelque diſcrédit, il ſe paſſe peu d'années où l'on n'en voye éclorre de nouvelles. D'où vient cette vogue? De l'eſpérance qu'on a conçue de devenir ſavant par ces lectures, ſans eſſuyer la longueur & la ſéchereſſe des études proprement dites. Auſſi le ſavoir a-t-il germé & pullulé de toutes parts. Mais quel ſavoir! Liſez ces Ecrits qui ont paru depuis le commencement de ce ſiecle, ou pour ne pas vous demander l'impoſſible, liſez-en ſeulement les titres; & vous verrez qu'au lieu d'un petit nombre de vrais Savans qui ſeroient le ſel de la terre, cette terre eſt couverte de légions innombrables de demi-ſavans, qui ne ſont pas ſeulement dignes d'en être appellés le fumier, matiere certainement bien plus précieuſe que leurs

Ecrits.

Ecrits. Tout regorge d'Eſſais, d'Examens, de Recherches, de Diſſertations & de Traités; les preſſes gémiſſent, le papier enchérit, & le ſavoir diminue en raiſon de ces progrès: il eſt relégué dans les Cabinets de quelques Adeptes, qui ne s'empreſſent pas à le produire au grand jour, connoiſſant & mépriſant la frivolité du ſiecle.

Je ne puis taire ici une choſe trop vraie, ce me ſemble, pour que perſonne de ceux qui m'écoutent puiſſent la déſavouer, ou me blâmer de l'avoir dite. Il eſt fâcheux que des hommes de la plus grande célébrité, & qui ont à bien des égards illuſtré les tems & les lieux où ils ont vêcu, préferent au ton de la décence celui d'une plaiſanterie dont on eſt à la fin excédé, & qui donne le plus ſouvent dans le bas, dans le trivial. Se jouant également de tous les ſujets, ne mettant aucune différence entre les plus importans & les plus legers, ou plutôt ſe plaiſant à noyer par préférence les premiers dans des flots de ridicule, ils introduiſent un genre de burleſque qui, à ce que j'eſpere, fera une fin auſſi ignominieuſe que celui du ſiecle paſſé. On diſtinguera les chefs-d'œuvre de ces Ecrivains de leurs productions manquées; ou bien, au lieu que de ſemblables écarts étoient autrefois ſupportés, quand on pouvoit les intituler *juvenilia*, on fondera l'indulgence pour eux ſur le titre de *ſenilia*.

Mais, en attendant, voici le mal déſolant qui en réſulte. C'eſt qu'il y a une foule de ſubalternes, de véritables goujats, qui, voulant ſe mettre au ton de ceux qu'ils prennent pour leurs chefs & leurs modeles, barbouillent, ſaliſſent, infectent le papier, d'inutilités, d'indécences, d'horreurs. A la vue de ce bouleverſement des loix, de cette dépravation des mœurs, qui deshonorent la République des Lettres, ne ſeroit-ce point le cas de dire comme un de ceux qui y ont figuré avec le plus d'éclat: Vive l'ignorance! Qu'elle revienne! Ou allons la retrouver parmi les Sauvages? Point du tout. Ne nous jettons pas d'une extrémité dans l'autre. Vive ſeulement, vive le bon eſprit & la ſaine Philoſophie! Mais où les rencontrer? Qui nous les procurera? Je pourrois faire ici plus d'une réponſe; mais je ſuis borné par l'énon-

cé de mon ſujet à charger les Académies de cette fonction. Il ne reſte qu'à faire voir qu'elles doivent s'en acquitter, & comment elles peuvent le faire?

Elles doivent s'en acquitter. On a apellé les plus ſages d'entre les anciens Philoſophes, les Apôtres de la raiſon. Cela eſt fort bien dit: c'eſt un titre que les vrais Philoſophes ſont en droit de revendiquer dans tous les tems. Il n'en faudroit qu'un ſeul dans un ſiecle, ou du moins dans un Etat, pour y répandre les clartés les plus ſalutaires, ſi la ſageſſe qui a toujours ſon prix en elle-même, l'avoit toujours aux yeux des hommes. Mais on l'a preſque continuellement vûe la victime, tantôt de l'ignorance & de la barbarie, tantôt du faux zele & de la ſuperſtition, juſqu'à ce qu'enfin la voilà devenue le jouet de la frivolité & de la malignité. Quand un ſeul homme voudroit réſiſter à un pareil torrent, il ne feroit que troubler le repos de ſes jours, ſans contribuer au bonheur de ſes contemporains: s'il évitoit la ciguë, au moins boiroit-il l'abſynthe à longs traits. Si la choſe eſt faiſable, ce n'eſt qu'à des Corps, à des Compagnies, qu'elle eſt réſervée. L'union des forces les augmente. Quand de ſemblables Corps jouiſſent de la conſidération qui leur eſt due, ils peuvent être le ſoutien de la bonne cauſe dans l'étendue de leur ſphere & de leur vocation. L'Egliſe veille au dépôt ſacré de la Religion; les Tribunaux au maintien des Loix: c'eſt aux Académies à faire régner un ſavoir épuré, ſolide, fécond en fruits précieux, qui donne, pour ainſi dire, la chaſſe au demi-ſavoir, comme on l'a donnée précédemment au faux ſavoir. Il faut précipiter dans l'abyme de l'opprobre & de l'oubli toutes les vaines productions de notre âge, comme on y a précipité les productions mauſſades, d'abord de la Scholaſtique, & enſuite de la pédanterie, qui étoient révérées dans les âges précédens. Les Académies n'ont point de devoir plus eſſentiel à remplir, de tâche plus glorieuſe à exécuter. Qu'ont-elles à faire pour y réuſſir?

D'abord, & j'avoue que ce premier article ne dépend pas entierement d'elles, il convient qu'elles ſoient compoſées d'hommes également éclairés & bien intentionnés, qui n'ayent d'autre but que la vérité

rité & le bien public. Quelle que ſoit d'ailleurs la Science particuliere à laquelle ils s'attachent, le concours & le concert d'Académiciens de cet ordre produira l'effet déſiré. On admirera, on aimera, on reſpectera, on imitera des hommes dévoués par état à étendre les limites des connoiſſances humaines; lorſqu'on verra qu'exempts de partialité, de paſſion, de vues ambitieuſes & intéreſſées, de jalouſies & de diſcordes, chacun d'eux reſſemble à la diligente abeille, qui porte fidélement à la ruche un miel qu'elle a recueilli ſur les plantes les plus ſalutaires. Pourroit-on nier que ſi les Académies étoient & avoient toujours été telles, on verroit revivre dans chacune d'elles l'Aréopage le plus impoſant & le plus efficace? Que ſont-elles effectivement? L'éloge ni la ſatire ne ſeroient ici à leur place. Je les crois cependant, en les prenant telles qu'elles ſont, en état d'influer beaucoup ſur l'extirpation du demi-ſavoir: & c'eſt à quoi je les invite.

Pour ne pas multiplier les moyens dont elles peuvent ſe ſervir dans cette vue, je me reſtrains à en indiquer deux; le gout qui doit régner dans leurs propres productions, l'approbation qu'elles donnent à celles des autres. Au premier égard, les Académiciens peuvent compoſer deux ſortes d'Ouvrages, les Mémoires qu'ils font entrer dans les Recueils académiques, & les Livres qu'ils publient ſéparément. Il eſt de leur dignité & de celle du Corps auquel ils ont l'honneur d'appartenir, que ces Ecrits ſoient d'abord conſacrés à la vérité, & enſuite ſoumis aux loix de la décence, *verum ac decens*, deux conditions qu'a déjà exigées un des plus beaux Génies & des plus judicieux Ariſtarques de l'Antiquité. Il ne s'agit pas de proſcrire le goût, & de négliger les ornemens qui rehauſſent un ſujet ſans l'altérer ni le dégrader. On peut être un Ecrivain ſolide & agréable, ſans être froid, ſec, peſant. Des hommes célebres ont très heureuſement ſaiſi ce juſte milieu. S'il n'exiſtoit pas, cela ſeroit fâcheux; mais, dans le cas d'opter, un Académicien ne devroit-il pas être tout décidé?

Quand les Membres d'une Académie ſe ſeront preſcrit de ſemblables loix, ils n'en diſpenſeront pas aſſurément les autres, ils ne don-

neront leur attache qu'à des Ecrits marqués au même coin de la vérité & de la décence. Le public littéraire eſt naturellement diſpoſé à conſulter les Compagnies ſavantes, & à regarder leurs réponſes comme des déciſions, des Oracles. Voilà une grande avance: il ne s'agit que de réaliſer l'attente publique, & de rendre effectivement des Oracles, autant que cela convient à des bouches mortelles. Il s'agit d'encourager & de diriger ceux en qui ſe trouvent réunies les lumieres & les bonnes intentions, de diſſuader & de détourner avec douceur ceux à qui les talens manquent, de réprimer, d'écraſer s'il le faut, ceux qui aſſocient l'incapacité à l'inſolence & à la turpitude. Un demi-ſiecle d'une ſemblable Dictature ſagement exercée par une Académie, produiroit les changemens les plus avantageux dans l'étendue des contrées ſur leſquelles ſon exemple a une influence immédiate, & ne pourroit qu'être utile à tout le reſte du genre humain.

La nôtre, Meſſieurs, a les plus grandes facilités pour y réuſſir. Elle a pour Chef, pour Protecteur, un Monarque éclairé & vraîment connoiſſeur, qui voit & veut le bien de ſes peuples, & qui y rapporte tous ſes deſſeins, toutes ſes opérations. La durée de ſa vie, celle de ſon Regne, ſont celle de notre gloire & de notre bonheur. Ce jour où nous célébrons l'anniverſaire de ſa naiſſance, n'eſt une Fête, un jour ſolemnel, que parce que nous y faiſons éclater nos ſentimens & retentir nos vœux: il reſſemble d'ailleurs parfaitement à tous les autres, puiſqu'il n'y en a aucun où nous ne ſoyons pénétrés des mêmes ſentimens, où nous ne formions les mêmes vœux.

DE

L'USAGE DU PRINCIPE DE LA RAISON SUFFISANTE DANS LES LOIX GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE.

CINQUIÉME MÉMOIRE SUR LES PRINCIPES MÉTAPHYSIQUES. (*)

PAR MR. BE'GUELIN.

Le grand *Leibnitz* a déterminé avec beaucoup de préciſion les départemens différens des deux premiers principes de la Métaphyſique. L'un nous démontre les vérités éternelles & néceſſaires: l'autre nous prouve les vérités contingentes & conditionelles. Mais quelque ſéparés que ſoient ces départemens, il ſe préſente des cas où ils paroiſſent ſe confondre, & où il eſt important néanmoins de les diſtinguer. La Géométrie & la Science des quantités en général ſont indubitablement fondées ſur le ſeul principe *de la contradiction;* mais quand on applique la Géométrie & l'Analyſe aux corps phyſiques, & à l'Univers exiſtant, par conſéquent à des êtres contingens, il eſt plus difficile de décider ſi les vérités qu'on découvre par cette application ſont auſſi néceſſaires que la Géométrie, ou ſi elles ſont auſſi contingentes que l'objet ſur lequel elles roulent. On a trouvé, par exemple, le principe *de la raiſon ſuffiſante* dans la démonſtration qu'Archimede a donnée de la loi de l'équilibre, qui eſt le fondement de la Statique. Cette ſcience ſeroit-elle de *vérité néceſſaire*, ſi elle ne peut être démontrée que par le principe des *vérités de fait*? On diſpute depuis longtems

(*) Lû le 8. Septembre 1768.

tems ſur la nature des loix du mouvement. Elles ſont *vraies;* cela ſuffit ſans doute au Géometre, au Phyſicien, au Mécanicien. Mais le Métaphyſicien doit aller plus loin. La ſageſſe de ces loix démontrée par la découverte du principe *de l'épargne*, a fourni à l'illuſtre Auteur de cette découverte une preuve excellente de l'exiſtence d'un Dieu. On ne ſauroit éluder la force de cet argument dès qu'on reconnoit avec *Leibnitz* que les loix du mouvement admettoient un choix. Car, ſi ces loix pouvoient être autres qu'elles ne ſont en effet, & que celles-ci ſoient de toutes les loix poſſibles les ſeules qui pûſſent produire les effets les plus merveilleux, avec la plus grande économie dans les moyens, elles portent ſans contredit en elles-mêmes le témoignage le plus univerſel, le plus perpétuel, & le plus convainquant de l'exiſtence du ſage Auteur de la Nature. Mais, ſi au contraire les loix du mouvement réſultent néceſſairement de la nature des corps, le Créateur n'avoit plus de choix à leur égard. Il lui reſtoit à la vérité le choix de créer des Corps, ou de n'en point créer, d'imprimer un mouvement à la Matiere, ou de la laiſſer immobile; l'Univers actuel reſte ſans doute, quelque ſentiment qu'on embraſſe ſur la nature des loix du mouvement, une preuve bien évidente de la Sageſſe divine; mais cette Sageſſe ne ſe démontre plus par les loix du mouvement.

Depuis la découverte aſſez moderne de ces loix, la queſtion ſur leur nature a partagé les plus grands Philoſophes & les plus célebres Géometres; mais cette matiere a été tant débattue que le procès paroiſſoit pleinement inſtruit: auſſi, quoiqu'elle tînt immédiatement au ſujet que j'ai traité dans mes Mémoires précédens, j'avois réſolu de la laiſſer à l'écart, mais elle a été diſcutée de nouveau dans des Ouvrages récens, ſous des points de vue ſi différens de ceux ſous leſquels on l'avoit enviſagée juſqu'ici, que je n'ai pû me diſpenſer de revenir à l'examen de cette intéreſſante queſtion. Je laiſſe à de plus habiles que moi à la décider ſans replique.

Avant d'aller plus loin, il eſt à propos, pour éviter toute ambiguité, d'obſerver que j'emploie ici les expreſſions de *Vérités néceſſaires*,

res, & de *vérités contingentes*, dans le ſens que Mr. *de Leibnitz* leur attribuoit. Ce n'eſt pas dans ce ſens, ce me ſemble, qu'on les emploie aujourd'hui; & cette remarque ſuffira peut-être pour faire évanouir l'oppoſition qui paroit exiſter entre le ſentiment *de Leibnitz* & celui de l'Auteur d'un des Ecrits dont j'ai parlé ſur la nature des loix du mouvement. Les loix que ce dernier nomme de *vérité néceſſaire*, pourroient encore être, dans l'acception *de Leibnitz*, de *vérité* ſimplement *contingente*; & ce qu'on appelle dans cet Ecrit loix de *vérité contingente*, *Leibnitz* l'auroit déſigné par le nom de *volonté arbitraire*, ou tout au plus de *loi arbitraire*, ſi cette volonté eſt ſuppoſée *générale* & *conſtante*.

Je me flatte donc qu'en me déclarant pour le ſentiment du grand *Leibnitz*, je n'ai pas à combattre celui de l'illuſtre Auteur des *Elémens de Philoſophie*; car, dès que ce célébre Philoſophe reconnoit que *le Créateur eût pû établir des loix du mouvement & de l'équilibre toutes différentes de celles qu'il a établies*, il reconnoit auſſi que celles-ci ſont de *vérité contingente* dans le ſens de Mr. *Leibnitz*. En effet, le caractere de *contingence* dans ces loix, eſt d'avoir *pû*, abſolument parlant, même en admettant l'exiſtence de la matiere & du mouvement, être autres qu'elles ne ſont, & de n'avoir pas *dû* l'être; de découler non d'une néceſſité invincible, non d'une volonté arbitraire du Créateur, mais des Loix ſupremes de la convenance, de cette raiſon éternelle qui dirige les décrets d'un Etre infiniment ſage. (*)

Si les loix de l'équilibre & du mouvement ſont de *vérité néceſſaire*, ni l'ame, ni l'Etre ſupreme ne peuvent les changer. Elles ſeront auſſi inaltérables que les loix d'une progreſſion donnée, ou l'équation d'une courbe algébrique. Il ne ſeroit pas plus poſſible à Dieu de

(*) Les loix de la nature qui reglent les mouvemens, ne ſont ni tout à fait néceſſaires, ni entiérement arbitraires. Le milieu qu'il y a à prendre, eſt qu'elles ſont un choix de la plus parfaite ſageſſe. *Leibnitz, Eſſai de Théod.* §. 349. *ibid.* §. 345. *& ſeq.*

de faire qu'un corps poussé par deux forces vers deux côtés différens ne suivît pas précisément la diagonale, qu'il ne lui seroit possible de rendre la matiere pénétrable, ou de faire que le mouvement existât & n'existât pas tout à la fois dans un même corps. Si l'on dit que Dieu ou l'ame peuvent agir immédiatement sur les corps, ce n'est pas dire que les corps puissent suivre de nouvelles loix, autres que celles qu'ils observent dans leur équilibre, ou dans leurs mouvemens. C'est mettre Dieu ou l'ame à la place d'un corps étranger qui agiroit sur eux avec la même force & dans la même direction, & dont l'action produiroit par conséquent un effet conforme aux loix actuelles. Qu'un esprit puisse presser un des bassins de balance, tandis que l'autre est chargé d'un poids, cet esprit ne changeroit point la loi du levier, quelque effort qu'il déployât. Enfin, si ces loix sont de vérité nécessaire, il n'est pas plus besoin de consulter l'expérience pour savoir si elles s'observent dans la nature, qu'il n'est besoin de recourir à l'expérience pour voir si le quarré de l'hypothenuse est en effet égal à la somme des quarrés de deux côtés. Avec la satisfaction de concilier les sentimens de deux grands hommes, qui ne different que dans l'énoncé, j'ai donc aussi l'avantage de pouvoir appuyer de deux autorités de ce poids les raisons qui combattent le sentiment contraire que nous allons examiner.

Les principes de la Mécanique auront la même évidence, ils seront d'une vérité aussi nécessaire que les principes de l'Algebre & de la Géométrie, si l'on peut prouver que ceux-là suivent aussi nécessairement de l'idée abstraite de l'*impénétrabilité* des corps, que ceux-ci découlent de l'idée abstraite du *nombre* & de *l'étendue*. L'Analyse & la Géométrie n'ont pas un seul principe qui ne soit d'une nécessité absolue, parce que l'on peut toujours démontrer que la proposition contradictoire à ce principe conduiroit nécessairement à quelqu'autre proposition qui répugneroit à l'idée abstraite des nombres ou de l'étendue.

Un des premiers Géometres de nos jours, le Philosophe dont je viens de parler, a pû réduire les principes fondamentaux de la Mécanique à trois loix générales, dont chacune est indépendante des deux autres.

autres. Pour que l'on puiſſe donc aſſûrer que les principes de la Mécanique ſont de la même nature que ceux de l'Algebre & de la Géométrie, il faut démontrer que ces trois loix différentes ſont trois ſuites abſolument néceſſaires de l'idée abſtraite de l'impénétrabilité des corps; ou, ce qui revient au même, il faut prouver qu'il répugne à l'idée de l'impénétrabilité que les loix de l'*inertie*, de la *compoſition des forces* & de l'*équilibre* ſoient autres qu'elles ne ſont. Auſſi longtems que cette démonſtration n'exiſtera pas, il paroit évident qu'on ne ſauroit affirmer que les loix de la Mécanique ſoient d'une *néceſſité abſolue;* mais il faut convenir auſſi que cela ſeul ne prouveroit pas qu'elles ne fuſſent que de *vérité contingente*. Il peut y avoir pluſieurs vérités néceſſaires dont la démonſtration nous manque encore. Pour s'aſſûrer qne les principes de la Mécanique ne réſultent que des raiſons de *convenance*, du choix libre & infiniment ſage de l'Auteur de la nature, il ne ſuffit pas de ne point voir de liaiſon néceſſaire entre ces principes & l'impénétrabilité des corps, il faut de plus prouver que cette impénétrabilité pouvoit également ſubſiſter avec des Principes de Mécanique différens de ceux que la nature ſuit. Il n'eſt pas beſoin cependant d'étendre cette preuve à chacune des trois loix générales qu'on a découvertes. Car, ſi une ſeule de ces loix a pû être autre qu'on ne l'obſerve dans l'univers actuel, ſans choquer l'impénétrabilité des corps, il ſera prouvé que les loix de la Mécanique ne ſont pas de vérité néceſſaire.

Il y a cependant encore une objection à prévenir avant d'inſiſter ſur ce raiſonnement. Mr. le Chevalier *de Fontenex*, dans un Mémoire ſur le même ſujet que je traite ici, s'eſt propoſé de démontrer que les loix de la Mécanique ſont de *vérité néceſſaire*. Il eſt néanmoins bien éloigné de penſer que la premiere de ces loix, la *Force d'inertie*, ſoit une ſuite néceſſaire de l'étendue & de l'impénétrabilité des corps. Il croit du moins que la démonſtration en eſt impoſſible, mais à la faveur d'une diſtinction très délicate & très ingénieuſe il entreprend de parvenir également à ſon but. Selon lui, il n'eſt pas queſtion en Mécanique de ſavoir ce qui s'obſerve actuellement dans la nature, pour découvrir

couvrir les loix que les corps exiſtans ſuivent dans le repos & dans le mouvement. La Mécanique n'appartiendroit plus aux Mathématiques pures; ce ſeroit une ſcience *mixte*, qui emprunteroit en partie ſes principes de l'expérience. Il veut qu'on ne conſidere la Mécanique que comme une ſcience abſtraite qui, ſans égard à ce qui ſe paſſe dans le monde actuel, tire ſes principes & ſa certitude géométrique des idées abſtraites & intellectuelles de la ſimple impénétrabilité; perſuadé avec raiſon, que ce qui aura été démontré dans cette ſcience abſtraite n'en ſera pas moins vrai en paſſant du monde intellectuel à l'univers des corps qui exiſtent réellement. Ainſi, dans le ſens de M. *de Fontenex*, la loi *d'inertie* n'eſt en Mécanique, ni une vérité de fait, ni une conſéquence néceſſaire de l'impénétrabilité; ce n'eſt qu'une *propoſition identique*, qui ſe réduit à affirmer que les corps doivent être conſidérés comme perſévérant dans l'état où ils ſont, ſoit de repos ou de mouvement, ſi l'on fait abſtraction de tous les changemens qui pourroient arriver dans leurs vîteſſes & dans leurs directions. On ne ſauroit diſconvenir ſans doute que la loi *d'inertie* ainſi énoncée ne ſoit une propoſition identique, de vérité ſi néceſſaire qu'elle n'a pas même beſoin de démonſtration; mais il ne paroit pas que, priſe dans ce ſens, elle puiſſe ſervir de principe fondamental à la Mécanique, ni qu'elle ſoit d'un grand ſecours pour la découverte des loix particulieres que cette ſcience doit nous donner ſur le mouvement, la rencontre, le choc & la chûte des corps.

I. Quand on parle de la loi *d'inertie*, ou l'on veut ſimplement dire, qu'*un corps eſt cenſé en repos ou en mouvement déterminé, tant qu'il eſt cenſé être en repos ou en mouvement déterminé;* vérité qui aſſurément ne ſeroit pas féconde en corollaires: ou l'on veut dire qu'*un corps impénétrable doit conſerver invariablement ſon état de repos ou de mouvement déterminé, tant qu'une cauſe étrangere ne l'empêchera pas d'y perſévérer:* ou l'on veut dire enfin, que *les corps actuels conſervent effectivement leur état de repos ou de mouvement déterminé, auſſi longtems qu'une cauſe étrangere ne les en tire pas.* Le premier énon-

énoncé eſt une propoſition identique, qui ne ſauroit mener à rien. Le ſecond eſt un théoreme d'où découlent les principales propoſitions de la Mécanique; mais ce théoreme a beſoin lui-même d'être démontré; le troiſieme énoncé enfin eſt ce même théoreme exprimé comme une ſimple vérité de fait. La queſtion ſe réduit donc toujours, non à ſavoir ſi un corps qui perſiſte dans ſon état eſt cenſé y perſiſter, mais à ſavoir 1°. s'il eſt réellement vrai que les corps obſervent la loi de permanence dans leur état quelconque de repos ou de mouvement, & 2°. ſi cette loi eſt une ſuite néceſſaire de l'impénétrabilité de la matiere; ou, pour dire la choſe en d'autres termes, ſi les corps ne ſauroient varier d'eux-mêmes leur état de repos ou de mouvement ſans ceſſer d'être impénétrables? Il n'y a que la premiere de ces deux queſtions qui intéreſſe proprement la Mécanique; il ſuffit dans cette ſcience d'admettre le fait comme un principe d'expérience très bien conſtaté, mais auſſi il eſt indiſpenſablement néceſſaire en Mécanique d'admettre ce fait; car d'une ſimple propoſition identique qui laiſſeroit le fait indécis, on n'en apprendroit pas mieux ſi la réaction eſt égale à l'action, s'il y a quelque proportionalité entre les cauſes & les effets, ſi toute impulſion ne ſuffit pas pour imprimer à toute maſſe tout degré de célérité, ſi un mobile perd autant de ſon mouvement qu'il en communique, ſi la viteſſe d'un corps s'accélere pendant ſa chûte, &c. ou ſi rien de tout cela n'a lieu dans la nature. Le fait une fois conſtaté, c'eſt à la Métaphyſique à réſoudre la ſeconde queſtion, & à remonter à la nature de la loi que ce fait ſuppoſe.

Que cette loi *d'inertie* ſoit une ſuite néceſſaire de l'impénétrabilité des corps, c'eſt ce qui, de l'aveu de pluſieurs grands Géometres, n'a point encore été démontré. Mais on peut aller plus loin. On peut prouver aiſément que l'impénétrabilité ne ſauroit répugner au changement d'état des corps, de quelque endroit que ce changement parte. Elle n'empêche point que les corps n'éprouvent à chaque inſtant de pareils changemens par l'action des corps étrangers; pourquoi l'empêcheroit-elle lorſque la force réſideroit dans le corps même? Un animal eſt-il moins impénétrable qu'une boule? Celle-ci ne change ſon

état de repos ou de mouvement qu'au gré des cauſes étrangeres; celui-là varie ſon état à ſon propre gré. D'ailleurs, s'il avoit plû à l'Auteur de la nature que la matiere fût indifférente au repos & au mouvement, en ſeroit-elle moins impénétrable? De ce que deux portions de matiere ne ſauroient occuper à la fois le même lieu, s'enſuit-il que, quand l'une d'entr'elles vient d'occuper un nouveau lieu pour faire place à celle qui l'a délogée, elle ne puiſſe pas s'y fixer? Par quelle néceſſité faut-il qu'elle continue de paſſer de place en place juſqu'à ce qu'elle rencontre un obſtacle qui l'arrête? Elle étoit en repos dans ſa place primitive, une autre portion de matiere l'en a fait ſortir; auſſi longtems que cette portion de matiere la talonne, il faut bien ſans doute qu'elle lui faſſe place, puiſque nous ſuppoſons qu'elle n'a pû réſiſter au premier déplacement; mais, dès que le corps qui en a déplacé un autre ne le pourſuit pas, l'impénétrabilité de celui-ci ne ſauroit aſſûrément le néceſſiter à faire un pas plus loin.

Ce n'eſt pas tout. Ceux qui attribuent aux loix du mouvement une néceſſité géométrique, ne regardent point le repos ou le mouvement comme des propriétés eſſentielles & inhérentes à la matiere; ce ne ſont que des rélations extrinſeques & accidentelles, à l'égard deſquelles le corps eſt entiérement paſſif. Il ne ſe donne à lui-même, il ne tire de ſon propre fond, ſelon eux, ni l'état de repos, ni celui de mouvement. Une cauſe qui lui eſt étrangere le met ſucceſſivement dans l'un ou l'autre de ces états. Donc ſuppoſer que le déplacement continué ſoit un état ſubſiſtant par lui-même, c'eſt déjà ſuppoſer la loi d'inertie dont on veut prouver la néceſſité; cette loi miſe à part, il ſeroit plus naturel de conclure que, puiſqu'il a fallu une force étrangere pour mettre le corps en mouvement, c. à d. pour le placer dans une autre rélation accidentelle au dehors, à l'égard de laquelle il eſt abſolument paſſif, il faut une action continuée de cette force étrangere pour le contraindre de changer uniformément cette rélation. On conçoit ſans peine une permanence dans l'état de repos, indépendamment de la loi d'inertie, parce que le repos ſemble ne ſuppoſer qu'une négation d'activité;

tivité; mais une permanence dans un état qui n'a rien de permanent que ſon inconſtance perpétuelle, tel qu'eſt l'état de mouvement, ne ſe ſeroit peut-être jamais préſentée à l'eſprit comme une ſuite naturelle de la rencontre des corps, ſi l'expérience ne l'avoit fait remarquer; & depuis qu'on eſt convaincu que la loi d'inertie s'étend également au mouvement comme au repos, on ne ſauroit encore ſe diſſimuler que l'état de mouvement uniforme n'eſt qu'une conception de notre eſprit, compoſée des idées abſtraites de changement de lieux, de direction vers un même point, & d'eſpaces égaux parcourus en des tems ſucceſſifs d'une égale durée. On auroit auſſi bien pû nommer cela *un changement perpétuel d'état, continué uniformément*, qu'on l'a nommé une *permanence dans l'état actuel;* mais la commodité de pouvoir énoncer la loi d'inertie d'une maniere plus conciſe, a dû faire préférer cette derniere dénomination, qui d'ailleurs ne change point la nature des choſes.

Quand même on pourroit démontrer que, ſans la loi d'inertie, le mouvement ne ſauroit ſe conſerver longtems, il n'en ſeroit pas plus vrai que cette loi fût une ſuite néceſſaire de la nature des corps, ou de leur impénétrabilité. La matiere n'en auroit pas moins toutes les propriétés que nous lui connoiſſons, l'étendue, la figure, la ſolidité, la mobilité même. Il eſt vrai qu'un monde où chaque élément tendroit vers l'engourdiſſement n'offriroit pas cette marche pompeuſe des corps céleſtes, ce tableau mouvant & diverſifié, ces viciſſitudes harmoniques qui concourent à former l'ordre & la beauté de notre univers; mais c'eſt préciſément ce qui a dû donner l'excluſion à d'autres loix qui, bien qu'également compatibles avec la nature des corps, auroient amené moins de ſcenes raviſſantes ſur cet immenſe théatre. C'eſt donc le choix de la ſageſſe infinie, c'eſt la ſuprême regle de la convenance, & non une néceſſité géométrique & inévitable qui a établi *l'inertie*, la premiere loi du mouvement qui s'obſerve dans le monde actuel.

Au

Au reſte, il n'eſt rien moins que prouvé, que ſans cette loi le mouvement n'eût pû ſe perpétuer. L'*inertie* ſuppoſe néceſſairement un premier moteur. Si le ſupreme Architecte de l'univers ne met pas lui-même les pieces de cette machine compliquée en activité, l'inertie les condamne à un repos éternel. S'il n'imprime du mouvement qu'à quelques unes, l'inertie de toutes les autres l'aura bien vîte conſumé. Et quand même chacune d'elle auroit reçu ſon degré déterminé de mouvement, comme il peut diminuer à chaque colliſion, il ne ſeroit point impoſſible qu'il ſe perdît tout à fait. Au lieu de *l'inertie*, prenons l'extreme oppoſé; que la matiere ſoit abſolument indifférente au repos & au mouvement, le moindre corpuſcule mis en activité auroit ſuffi pour répandre le mouvement dans tout l'univers. C'eût été une étincelle capable de produire un embraſement général. Il auroit pû ſe perdre quelque mouvement par la rencontre directe des corps prêts à s'arrêter au moindre obſtacle; mais, dans tous les autres cas, le plus petit mobile auroit mû ſans effort les plus lourdes maſſes. Il n'étoit ſans doute pas digne de la ſageſſe du Créateur d'introduire une telle loi dans la nature; elle n'auroit pas rempli le meilleur plan de l'univers; mais elle n'étoit point incompatible avec l'impénétrabilité de la matiere. Entre les deux extremes de *l'inertie* & de *l'indifférence*, on peut concevoir une infinité de loix moyennes, ſelon leſquelles les corps auroient pû accélérer ou retarder leur mouvement, qui toutes euſſent été compatibles avec l'impénétrabilité, mais dont aucune n'eût été auſſi convenable que celle que l'Auteur de la nature a choiſie. C'eſt donc la raiſon ſupreme, & non la néceſſité, qui en eſt le véritable fondement. Auſſi cette loi qui ſe prouve ſi facilement à l'aide du principe de la Raiſon ſuffiſante, ne peut jamais être démontrée dès qu'on tente de la fonder ſur le principe de la Contradiction. Il impliqueroit ſans doute que le corps A fût dans le même inſtant, & dans le même ſens, en repos, & en mouvement; mais qu'il paſſe l'inſtant d'après d'un de ces états à l'autre, c'eſt ce qui n'implique plus, & ce qui au contraire arrive à tout moment. Mais il eſt beſoin qu'il y ait une raiſon ſuffiſante de ce paſſage d'un état à l'autre: ſans quoi les changemens produits dans l'univers

vers n'auroient rien de réglé, de déterminé, ni de conſtant; & ce beſoin d'une raiſon ſuffiſante dans les changemens du monde matériel, n'eſt autre choſe que ce qu'on exprime par le terme unique d'*inertie*, dont de grands Géometres ont fait aſſez improprement une eſpece de force indéterminée, inhérente à la matiere. C'eſt cette *inertie*, ce beſoin d'une raiſon ſuffiſante, qui fait qu'un mobile doit perdre de ſon mouvement à meſure qu'il en communique à un autre; effet que le principe de la contradiction n'auroit jamais découvert, & qui n'étoit pas plus néceſſaire qu'il ne l'eſt qu'une bougie perde autant de ſa flamme qu'elle en communique à une autre bougie en l'allumant. Ce n'eſt qu'en enviſageant l'inertie ſous ce point de vue, qu'on s'aſſure que la réſiſtance eſt proportionnée à la denſité des corps. Chaque élément de matiere a beſoin d'une raiſon ſuffiſante pour changer ſon état; l'effort qui doit remuer la maſſe entiere, doit donc être proportionné au nombre des élémens qu'elle contient; dès qu'on s'écarte de cette idée, qu'on regarde l'inertie comme une propriété eſſentielle & néceſſaire des corps, on eſt réduit, pour raiſonner conſéquemment, à dire avec un très grand Géometre, que la réſiſtance pourroit bien n'être pas proportionnée à la quantité de matiere propre que le corps renferme, puiſque ce ſeroit l'inertie & non la maſſe qui produiroit la réſiſtance. (*) Enfin, c'eſt ſous ce point de vue uniquement que la loi de *l'épargne* n'eſt ni reſtrainte à des cas particuliers, ni une conſéquence purement mathématique de quelques formules algébriques. Tout changement d'état dans la nature a beſoin d'une raiſon ſuffiſante: telle eſt la loi d'inertie; dès-là tous les corps qui agiſſent les uns ſur les autres déploient & éprouvent une force proportionnée au changement qui s'opere ſur eux tous. Ainſi le changement total qui arrive dans la nature ſuppoſe une force déterminée par le beſoin d'une raiſon ſuffiſante; force par conſéquent la plus petite qu'il ſoit poſſible pour produire ce nouvel état.

Il ſuffiroit d'avoir prouvé que la premiere loi de la Mécanique n'eſt pas de néceſſité abſolue, pour en conclure légitimement que les loix

(*) *Euleri Theoria motûs.* C. II. §. 157.

loix du mouvement ne ſont que de *vérité contingente.* Cependant il ne ſera pas inutile d'examiner de même la nature de deux autres loix fondamentales, qui, conjointement avec celle de *l'inertie*, donnent tous les principes de la Mécanique.

II. La ſeconde loi générale eſt celle de la *compoſition & décompoſition des forces*, ou plutôt *du mouvement*: l'énoncé de cette loi eſt: que ſi un mobile eſt pouſſé en même tems vers deux côtés différens, il parcourra la diagonale du parallélogramme dont les côtés expriment les directions & les mouvemens imprimés à ce mobile.

Il eſt évident d'abord que les notions de l'*étendue*, de la *figure*, de l'*impénétrabilité*, ou de quelque autre propriété eſſentielle du corps n'entrent en aucune façon dans l'énoncé de cette loi. On ne ſauroit donc affirmer qu'elle ſoit une ſuite néceſſaire de l'idée abſtraite de ces propriétés. La nature de la matiere n'empêchoit donc pas que le Créateur n'établît une autre loi dans les mouvemens combinés, à moins qu'il ne ſoit démontré que la loi des mouvemens compoſés eſt une ſuite néceſſaire de la loi des mouvemens ſimples établie par l'Auteur de l'Univers. Mais, dans ce cas même, la ſuite néceſſaire d'une loi fondée ſur le principe de la raiſon ſuffiſante ne ſeroit elle-même qu'une loi *contingente.*

Qu'un corps pouſſé à la fois vers l'*eſt*, & vers le *ſud*, ſe meuve en même tems vers ces deux plages, c'eſt ce qui eſt abſolument impoſſible; c'eſt ce qui choqueroit manifeſtement le principe de la contradiction. Voilà la conſéquence qui eſt de vérité néceſſaire. Mais que ce corps, auquel il ne reſte qu'à prendre une ſeule direction quelconque, ou à reſter immobile, doive préciſément recevoir telle quantité de mouvement, & ſuivre telle direction, préférablement à toutes les autres, qui n'impliqueroient contradiction ni par la nature des corps, ni par celle du mouvement, c'eſt ce qui ne peut être que de vérité contingente. Le degré de vîteſſe de ce corps & la direction qu'il doit prendre ſeront exactement déterminés par le principe du beſoin

ſoin d'une raiſon ſuffiſante qui exclut le fortuit, l'arbitraire, l'irrégulier & l'indéterminé. Par conſéquent, la loi de la compoſition du mouvement eſt encore une loi de convenance, fondée ſur le choix infiniment ſage de la Raiſon ſupreme.

Je ſai que des Géometres du premier ordre ont donné ſucceſſivement des démonſtrations mathématiques très élégantes & très rigoureuſes du principe de la compoſition des forces; ce qui devroit prouver inconteſtablement que cette loi eſt de vérité néceſſaire. Mais il faut obſerver, & il ſeroit aiſé de le montrer en détail, que toutes ces démonſtrations ſuppoſent, ou expreſſément, ou tacitement, le principe de la *raiſon déterminante*. Ce n'eſt qu'après avoir ſuppoſé qu'il faut une raiſon ſuffiſante pour que le mobile prenne la direction & le degré de vîteſſe qu'il prend, qu'on parvient à exclure toutes les autres directions & toutes les autres vîteſſes poſſibles. Le caractere diſtinctif d'une vérité néceſſaire, c'eſt quand le Géometre ou le Philoſophe peuvent dire: *il eſt impoſſible que la choſe ſoit autrement*; mais lorſqu'il faut ſe borner à dire: *il n'y auroit point de raiſon pourquoi cela ſeroit autrement*, dès-lors les calculs les plus exacts, l'enchaînure des propoſitions les plus géométriquement démontrées, n'empêcheront jamais que la concluſion ne puiſſe être de *vérité contingente*. On ſe ſert, je l'avoue, aſſez ſouvent de cette derniere façon de raiſonner pour prouver des vérités géométriques, qui n'en deviennent ſans doute pas plus contingentes pour cela; mais c'eſt qu'alors on ne le fait que par commodité, & pour abréger; & le Géometre eſt toujours prêt, ſi on le chicane, de démontrer directement que ſa propoſition eſt de *vérité néceſſaire*, ou que le contraire impliqueroit contradiction.

Nous connoiſſons ſi peu l'action des forces, que ſi l'expérience ne nous eût appris la loi de la compoſition du mouvement, nous l'ignorerions peut-être encore. Qu'un domeſtique debout dans le coin d'une chambre, & appellé de deux côtés à la fois coure ſur la diagonale vers le quatrieme angle où perſonne ne l'appelle; ou qu'il reſte immobile entre ſon maître & ſa maîtreſſe lorſque l'un & l'autre le de-

mandent en même tems; rien ne ſeroit plus abſurde: mais étoit-il beaucoup plus probable, ou plutôt quelle néceſſité abſolue y avoit-il, qu'un corps attiré avec une vîteſſe de trois degrés vers le nord, & de quatre degrés vers l'oueſt, dût diriger ſa courſe vers une plage qui n'eſt ni l'oueſt, ni le nord, ni le nord-oueſt; & prendre une vîteſſe de cinq degrés, qui n'eſt ni la ſomme des vîteſſes imprimées, ni leur différence, ni l'une de ces vîteſſes priſe ſéparément; ni leur produit, ni leur quotient?

Pour que la loi de la compoſition des forces fût de néceſſité abſolue, il faudroit 1°. qu'il fût *néceſſaire*, que le mouvement produisît un mouvement; ce qui ſuppoſeroit déjà la *néceſſité* des loix de la communication du mouvement qu'on en voudroit inférer. 2°. Que le corps pouſſé conſervât *néceſſairement* l'impreſſion une fois reçue; ce qui ſuppoſeroit la néceſſité de la loi d'inertie, dont nous venons de prouver la contingence. 3°. Qu'il impliquât contradiction que l'effet total de deux forces diverſes qui agiſſent à la fois, fût différent de l'effet de ces forces lorſqu'elles agiſſent l'une après l'autre. 4°. Qu'on pût démontrer, ſans recourir à la loi d'inertie, que dans le mouvement compoſé la direction du mobile doit être une ligne droite, & ſa vîteſſe uniforme. Or, de ces quatre propoſitions, il ne paroit pas qu'il y en ait une ſeule qui puiſſe être démontrée autrement qu'à l'aide du principe de la raiſon ſuffiſante.

III. Il nous reſte encore à examiner la nature de la troiſieme loi générale, celle de l'*équilibre*, ſavoir, que deux corps dont les tendances ſont oppoſées, doivent pour ſe faire équilibre avoir des vîteſſes virtuelles qui ſoient en raiſon inverſe des maſſes de ces corps.

Cette loi paroit être en effet de vérité néceſſaire; puiſqu'elle réſulte naturellement des ſimples idées abſtraites de l'équilibre & de l'égalité ſuppoſée entre les forces qui doivent le produire.

Que ces forces ſoient, par exemple, la peſanteur; nous diſons que deux poids égaux appliqués aux deux bras d'une balance à des diſ-

tances

tances égales du point d'appui doivent faire équilibre. Mais le diſons-nous ſimplement parce qu'il n'y a point de raiſon pourquoi un poids devroit l'emporter ſur l'autre? ce qui n'indiqueroit qu'une vérité contingente; ou eſt-ce qu'il implique réellement que dans ce cas-ci un des deux poids faſſe pencher la balance de ſon côté? ce qui rendra l'équilibre de vérité néceſſaire.

Nous avons ici deux ſuppoſitions différentes, par la réunion deſquelles nous concluons l'équilibre. La premiere, c'eſt que nous ſuppoſons les poids égaux. Mais qu'eſt-ce que des *poids égaux*, ſinon des corps qui tirent ou qui preſſent avec une égale force; qui, ſubſtitués l'un à l'autre dans un même baſſin de la balance, y exercent exactement le même effort? Et qu'eſt-ce enſuite que l'*équilibre* d'une balance, ſi ce n'eſt une preſſion égale ſur les deux bras qui s'entredétruit mutuellement? Donc, dire que des poids égaux, ſuppoſés agir également ſur les bras d'une balance, la tiendront en équilibre, c'eſt dire que, ſi une balance eſt tirée également par des forces égales & oppoſées, elle eſt également tirée des deux côtés; vérité néceſſaire ſans doute, & dont le contraire impliqueroit.

La ſeconde ſuppoſition, c'eſt que les bras de la balance ſont d'égale longueur. Ici il n'y a plus de propoſition identique. Cette condition ſuppoſe un théoreme dont l'énoncé ſeroit: que, *pour que des puiſſances égales ſoient cenſées produire des effets égaux, elles doivent être appliquées à des diſtances égales du point d'appui.* Or l'égalité des diſtances ne paroit pas entrer auſſi néceſſairement dans l'égalité d'action, que l'égalité des poids. Que les poids ſoient immédiatement appliqués aux bras, ou qu'ils y ſoient appendus par des chaines d'inégale longueur, l'action reſte la même; que les bras du levier ſoient longs ou courts, l'effort des poids ſur le point d'appui n'augmente ni ne diminue; ainſi, à conſidérer ſimplement l'état de repos ou d'équilibre, il ne ſeroit pas aiſé de démontrer l'effet qui doit réſulter de l'égalité ou de l'inégalité des bras, ſans avoir recours au principe de la raiſon ſuffiſante. Il n'y a point de raiſon ſans doute pourquoi, tout ſe paſ-

ſant également des deux côtés du point d'appui, un bras ſoit plus élevé que l'autre; l'équilibre devient donc certain dans cette ſuppoſition. Mais la contingence produit la certitude auſſi bien que le feroit la néceſſité abſolue. Il n'implique pas que l'effet de deux poids ſoit préciſément le même, quoiqu'ils different en figure & en volume: comment démontrera-t-on qu'il implique que l'effet ſoit encore le même lorſque les bras qui les ſoutiennent différeront en longueur? Auſſi la plûpart des Géometres, pour démontrer la loi du *repos*, ont recours au mouvement. Ils ſuppoſent l'équilibre dérangé, & calculent les eſpaces qu'auroient à parcourir en un même tems les corps qui doivent faire équilibre entr'eux. A' la faveur de cette fiction la Géométrie ramene la Mécanique ſur ſon propre terrain. Il eſt de vérité néceſſaire que les eſpaces parcourus par les bras d'une balance ou d'un levier ſoient proportionnels à la longueur de ces bras. Si l'on peut donc démontrer, ſans employer au moins implicitement le principe de la raiſon ſuffiſante, 1°. que c'eſt *agir également* que de donner des vîteſſes égales à des maſſes égales; 2°. que l'on doit conclure de l'action des forces quand elles agiſſent réellement, à leur effort lorſqu'elles n'ont qu'une tendance à agir; le principe du levier ſera démontré rigoureuſement dans le cas des poids égaux appliqués à des diſtances égales du point d'appui. Il ne reſtera plus, pour démontrer le principe de l'équilibre dans toute ſon étendue, qu'à prouver de même; 3°. que la vîteſſe doit néceſſairement entrer pour autant que la maſſe dans l'eſtimation du mouvement, ou de l'action des forces qui le produiſent; & 4°. que cette eſtimation eſt encore juſte lorſque les vîteſſes ne ſont que ſuppoſées ou virtuelles. Mais je crois n'avoir pas beſoin d'examiner ici, ſi nous avons actuellement ces démonſtrations rigoureuſes, ou ſi elles nous manquent encore. Après ce que j'ai dit ſur les deux premieres loix fondamentales de la Mécanique, je puis, ce me ſemble, ſans rien ôter à la certitude de cette ſcience, légitimement conclure avec l'illuſtre *Leibnitz*, (*) que les loix du mouvement ne naiſſent pas entierement du principe de la néceſ-

(*) *Théodicée*. §. 345.

néceſſité, mais qu'elles naiſſent du principe de la perfection & de l'ordre; qu'elles ſont un effet du choix & de la ſageſſe de Dieu; & que leur beauté eſt une preuve merveilleuſe de l'exiſtence d'un Etre ſuprême, intelligent & libre. Mais la beauté de ces loix conſidérée ſous le point de vue du célebre principe de l'épargne, ajoute encore un nouveau degré de force à la vive admiration que les reſſources inépuiſables de la nature, l'immenſe variété de ſes productions, & la ſimplicité de ſes moyens nous inſpirent pour ſon divin Auteur.

MÉMOIRE
SUR UN PROBLEME
DE
LA DOCTRINE DU HAZARD.

PAR M. JEAN BERNOULLI.

§. 1.

A l'occaſion de certains calculs d'Arithmétique politique dans leſquels je m'étois engagé, le Probleme ſuivant, que le calcul des probabilités revendique entiérement, s'eſt offert à mon eſprit.

Un nombre quelconque de perſonnes d'un même âge, moitié hommes, moitié femmes, ſe mariant enſemble le même jour, trouver la probabilité que, la moitié de ce nombre complet de perſonnes mariées étant morte, tous les mariages ſeront rompus.

§. 2. En réfléchiſſant ſur ce probleme, je vis qu'il pouvoit être conſidéré ſous plus d'un point de vue: Que d'abord il étoit plus à propos de traiter ſéparément le cas où le nombre total des perſonnes eſt pair, & celui où ce nombre eſt impair.

Enſuite: qu'on peut chercher la ſolution du probleme pour l'un & l'autre cas, en ſuppoſant la poſſibilité que dans le nombre des perſonnes qui meurent il y ait de la diſparité rélativement aux ſexes & que peut-être il ne s'y trouve même abſolument que des hommes, & *vice verſa*; ou bien, en regardant comme plus naturel & comme certain que la mort aura enlevé un nombre égal d'hommes & de femmes.

Je commencerai par admettre la premiere ſuppoſition, & pour le cas où le nombre des perſonnes dont une moitié ſe marie avec l'autre,

tre, eſt pair; & je me ſervirai de la méthode facile de chercher la loi que ſuit la progreſſion des probabilités qu'on veut déterminer, en remontant depuis la queſtion qui renferme le moins de cas. Pour aider auſſi à l'imagination j'indiquerai les hommes par les lettres majuſcules de l'alphabet & leurs femmes par les mineures qui leur répondent.

§. 3. Notre queſtion eſt la plus ſimple lorſqu'il n'y a qu'un couple, $A + a$, & la probabilité qu'on cherche eſt ici certitude, c'eſt à dire, ſuivant la façon ordinaire de s'exprimer, $= 1$.

§. 4. Quand il y a deux couples $A + a$, $B + b$, il peut arriver de deux façons qu'il en meure un, & alors les mariages n'étant pas rompus, ces deux cas donnent 0; mais il y a 4 cas où la mort de deux perſonnes rompt les mariages & donne 1 de probabilité: ainſi celle qu'on demande eſt $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

§. 5. Suppoſons qu'il y ait 3 couples: $A + a$, $B + b$, $C + c$, on pourra dès à préſent s'épargner des énumérations de cas, qui deviendroient tédieuſes, en conſidérant que par la Doctrine des combinaiſons on trouve d'abord le nombre de cas qui ont lieu en tout, quand d'un nombre quelconque de choſes on en enleve la moitié, & qu'enſuite on n'a qu'à ſuivre le raiſonnement que voici. Je dis: lorſqu'il étoit queſtion de deux couples il y avoit 4 cas dans leſquels ces mariages étoient rompus par la mort de la moitié des perſonnes; or, pour que cet évenement ait lieu auſſi dans l'état préſent de la queſtion, il faut abſolument que ces 4 cas précédens ſe combinent avec ceux où il meurt une perſonne du troiſieme couple, c'eſt à dire, C ou c, ce qui donne 8 cas. Mais 6 choſes peuvent être priſes trois à trois de 20 manieres différentes; ainſi la probabilité pour la diſſolution de 3 mariages eſt $\frac{8}{20}$ ou $\frac{4}{10}$.

§. 6. On raiſonnera de la même maniere pour 4 mariages, en combinant les 8 cas de la queſtion précédente avec les deux que fournit le nouveau couple, & en diviſant le produit 16 par le nombre to-

tal des cas qui eſt 70, de ſorte que la probabilité que les 4 mariages ſeront rompus par la mort de 4 perſonnes eſt $= \frac{16}{70}$.

§. 7. Nous n'avons pas beſoin d'aller plus loin. On s'appercevra ſans doute déjà que le nombre des mariages étant quelconque $= m$, le nombre des cas où les perſonnes qui reſtent en vie ſont chacune d'un couple différent, ne peut qu'être conſtamment exprimé par le nombre 2 élevé à m. C'eſt ce qui fait le numérateur de la fraction. Quant au dénominateur il eſt égal toujours à la quantité de fois dont on peut combiner m à m le nombre total des perſonnes $2m$. Enfin on voit que la formule générale de la probabilité que nous cherchons eſt

$$\frac{2^m}{(2m.(2m-1).(2m-2)\cdots(2m-m+1)):(1.2.3\cdots m)}.$$

§. 8. On pourroit diviſer cette formule par 2, mais la conſtruction s'en découvriroit moins aiſément. Au reſte on auroit alors au lieu de la progreſſion

$$\frac{2}{2},\ \frac{4}{6},\ \frac{8}{20},\ \frac{16}{70},\ \frac{32}{252},\ \&c.$$

celle-ci

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{10},\ \frac{8}{35},\ \frac{16}{126},\ \&c.$$

Cela ſe voyoit au premier coup d'œil.

Mais on auroit mal fait de commencer par réduire ainſi la progreſſion, parce qu'alors il auroit fallu en comparer quelques termes avec la table des nombres figurés pour trouver la loi générale qu'elle ſuit.

§. 9. Je vais conſidérer à préſent le Probleme dans l'hypotheſe qu'il ne meure jamais qu'un nombre égal d'hommes & de femmes. Je ne vois pas qu'on puiſſe admettre de milieu avec raiſon entre cette hypotheſe & la précédente; car, ſi d'un côté dans celle-ci on trouve qu'il eſt hors de toute vraiſemblance & de poſſibilité phyſique que la mort n'enleve que des hommes ou des femmes ſur pluſieurs milliers de perſonnes des deux ſexes en nombre égal, dont la moitié meurent,

je dis

je dis que ce cas auſſi n'entre en ligne de compte que pour le degré de probabilité qu'il a, lequel eſt très petit. Où voudroit-on ceſſer de tenir compte de ces cas peu probables? Ils n'entrent jamais dans le calcul pour plus que la rigueur mathématique & la poſſibilité phyſique ne le permettent. Concluons donc qu'il faut dans notre queſtion regarder tous les cas comme poſſibles, ou admettre l'hypotheſe que dans le nombre des morts il ſe trouvera autant d'hommes que de femmes.

§. 10. J'indiquerai de nouveau les hommes par les lettres majuſcules & les femmes par les petites lettres de l'alphabet. Et conſidérant dabord le cas le plus ſimple, celui d'un ſeul mariage, je vois que la probabilité qu'on demande eſt ſans contredit $= 1$. Mais, m'objectera-t-on peut-être, il eſt impoſſible ici qu'il meure un égal nombre d'hommes & de femmes puiſqu'il ne doit mourir qu'une perſonne. Je répondrois que ſans doute on ne ſuppoſe pas qu'il meure la moitié d'un homme & la moitié d'une femme, mais qu'il arrive ici qu'une alternative de cas ſeulement puiſſe avoir lieu, laquelle ne fait rien au fond de la queſtion & ne change pas le réſultat.

Il faut faire le raiſonnement ſuivant: Une perſonne ſeulement devant mourir, le riſque eſt par l'hypotheſe égal pour l'un & pour l'autre ſexe. Ainſi, quand par l'énumeration des cas pour la probabilité que je cherche, j'aurai trouvé un réſultat, je devrai dire enſuite: Un demi (riſque de A) donne *tant* de probabilité; un demi (riſque de *a*) donne ou multiplie la même probabilité: ajoutant ces produits enſemble & diviſant par deux demis ou un, ne voit-on pas que le réſultat reſte le même, & qu'ainſi la remarque qui ſembloit relever une contradiction entre l'hypotheſe & le procédé n'eſt pas fondée? Je me ſuis étendu ſur ce ſujet parce que la même difficulté, ſi c'en eſt une, revient toutes les fois que le nombre des couples eſt impair, & avec plus de force encore quand c'eſt le nombre total des perſonnes qui eſt impair.

§. 11. Mais allons plus loin & voyons toujours quel eſt le nombre total des cas qui peuvent arriver par la mort de la moitié des

perſonnes mariées; retranchons en ceux que la condition exclut, & ſur ceux qui reſtent cherchons combien rompent toutes les unions.

Quand il y a deux mariages A + a, B + b, on a 6 combinaiſons pour la mort de deux perſonnes; mais il faut en exclure deux, ſavoir celle de deux hommes & celle de deux femmes; il en reſte 4; ſur ces 4 deux, A + a & A + b, ne rompent pas les mariages & donnent 0; la probabilité qu'on cherche eſt donc $= \frac{2 \times 1 + 2 \times 0}{4} = \frac{2}{4}$.

§. 12. Qu'il y ait 3 mariages; le nombre des combinaiſons trois à trois eſt 20; il faut en exclure d'abord 2 pour les cas où les 3 hommes ou les 3 femmes mourroient. Il en reſte 18 dont 9 ſont celles de 2 H^{s}. & 1 F^{e}. & 9 celles de 2 F^{s}. & 1 H^{e}. Or ce cas retombe dans celui du §. 10; car il eſt indifférent de regarder les 9 premieres ou les 9 dernieres combinaiſons comme poſſibles, puiſqu'il y a $\frac{1}{2}$ de probabilité pour chaque eſpece. Suppoſons donc par ex. que 2 H^{s}. & 1 F^{e}. meurent, il ſuffira de conſidérer que, ſur ces 9 cas, ceux qui rompent les mariages ſont les 3 combinaiſons à deux des trois H^{s}. avec la femme de celui qui a été omis dans la combinaiſon, c'eſt à dire ABc, ACb & BCa, pour avoir auſſitôt la probabilité cherchée $= \frac{3}{9}$.

§. 13. Quand il y a 4 unions, on a le nombre total des cas $= 70$. Ceux qu'il faut rejetter ſont la mort des 4 H^{s}. celle des 4 F^{e}., les combinaiſons de 3 H^{s}. avec 1 F. & celles de 3 F^{s}. avec 1 H. Ce qui fait 2 + 2 fois 16, en tout 34 cas. Il en reſte 36 qui peuvent avoir lieu; mais nous ne demandons que les combinaiſons de deux hommes avec les femmes des deux autres; qui ſont au nombre de 6; ainſi le réſultat eſt $= \frac{6}{36}$.

§. 14. Soient les couples au nombre de cinq: A + a, B + b, C + c, D + d, E + e. Le nombre des cas eſt 252; ôtons-en d'abord les 2 ABCDE & $abcde$; enſuite les 25 cas où 4 H^{e}. meurent & 1 F. & 25 autres de 4 F^{e} & 1 H. Il faudra maintenant d'après les prin-

principes établis plus haut regarder comme poſſibles la moitié des 200 cas qui reſtent & chercher la probabilité dont il eſt queſtion en ſuppoſant à volonté, ou que $3\,H^{t}$ & $2\,F^{t}$, ou bien que $3\,F^{t}$ & $2\,H^{t}$ meurent. Si on regarde comme certain que $3\,H^{t}$. & $2\,F^{t}$. mourront, on voit que les mariages ſe trouvent rompus par les combinaiſons de $5H^{t}$. trois à trois avec les 2 autres femmes. Ce qui fait donc 10 cas à diviſer par 100 ou $\frac{10}{100}$ de probabilité.

§. 15. Pour 6 couples on a en tout 924 cas. Il faut en retrancher 524 qui ne ſauroient avoir lieu dans notre hypotheſe; & ſur les 400 qui reſtent, il y en a 20 qui rompent les mariages: donc la probabilité que nous cherchons eſt ici $= \frac{20}{400}$.

§. 16. Les 6 cas que nous venons de développer, étoient néceſſaires pour la conſtruction d'une formule générale, quoiqu'on ait pu remarquer déjà plutôt une grande harmonie dans les expreſſions. On a pu voir que le nombre des cas poſſibles eſt toujours le quarré de celui des cas qui font que toutes les unions ſe trouvent rompues par la mort de la moitié des perſonnes qui les ont contractées; qu'ainſi le numérateur de la fraction qu'on détermine ſe réduit toujours à l'unité, & le dénominateur à la racine quarrée des cas dans leſquels il ſe trouve autant de perſonnes d'un ſexe que de l'autre dans le nombre de celles qui meurent; enfin que la progreſſion

pour	I,	II,	III,	IV,	V,	VI	&c. mariages
eſt	$\frac{1}{1}$,	$\frac{2}{4}$,	$\frac{3}{9}$,	$\frac{6}{36}$,	$\frac{10}{100}$,	$\frac{20}{400}$	&c.
ou	$\frac{1}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{20}$	&c.

Il faut quelque attention à la Table des nombres figurés pour continuer ces progreſſions, & ſurtout pour en conſtruire le terme général. Si l'on conſulte cette Table, on verra dabord une propriété laquelle concerne déjà la formation des termes qui expriment nos probabilités: c'eſt que dans l'énumération de tous les cas, tant de ceux qui ne peuvent avoir lieu, que des autres, pour un nombre quelconque M de mariages, on paſſe ſucceſſivement par les quarrés de tous les nombres figurés, Voyez la Table à la fin du Mém.

qui ſe trouvent dans la M — 1ᵉ colonne tranſverſale, ou, ce qui revient au même par les quarrés des coëfficiens de tous les termes d'un binome élevé à M. Ainſi, par ex. pour 5 couples on a

1 cas non admiſſible que les	5 H⁵.	— meurent
25 cas non admiſſibles que	4 H⁴.	& 1 F¹.
100 admiſſibles à demi pour	3 H³.	& 2 F².
100 — — —	2 H².	& 3 F³.
25 cas non admiſſibles pour	1 H¹.	& 4 F⁴.
1 cas non admiſſible pour	—	5 F⁵.

Cette propriété ſuffiroit pour exprimer immédiatement le terme général de la progreſſion, parce qu'on ſait quel eſt le coëfficient du terme ou des termes moyens de la puiſſance Mᵉ. d'un binome. Je vais cependant indiquer comment j'ai trouvé cette formule en conſidérant les termes de la ſérie formés & réduits, & reſpectivement à notre queſtion.

§. 17. Ce n'eſt toujours que des dénominateurs de nos fractions qu'il s'agit. Or on voit que pour I & II paires ils expriment le 2ᵈ & le 3ᵉ terme des nombres naturels; pour III & IV paires, le 4ᵉ & le 5ᵉ des nombres triangulaires; pour V & VI paires, le 6ᵉ & le 7ᵉ des nombres pyramidaux, &c.

Si donc le nombre des couples eſt en général, m ou $m - 1$, (où m ſignifie un nombre pair,) il faudra chercher le dénominateur de la fraction qui exprime la probabilité qu'on demande, dans les nombres figurés de l'ordre $\frac{m}{2}$; & la loi de la progreſſion de ces probabilités exige qu'on ſubſtitue pour n le nombre des couples m ou $m - 1$. (*) Le

(*) Ce n'eſt pas, comme il le ſemble d'abord, le nombre des couples augmenté de l'unité qu'il faut ſubſtituer, mais ſeulement le nombre des couples, par la raiſon que dans les termes généraux des nombres figurés on trouve le 1ᵉʳ terme de la ſuite, en faiſant $n = 0$.

Le terme général des nombres figurés de l'ordre $\frac{m}{2}$ eſt

$$\frac{n \times (n-1) \cdot (n-2) \cdots n - \frac{m}{2} + 1}{1.2.3 \cdots \frac{m}{2}}$$; par conſéquent la formule eſt pour m mariages

$$\frac{1}{\frac{m(m-1)(m-2)\cdots m-\frac{m}{2}+1}{1.2.3 \cdots \frac{m}{2}}} = \frac{1.2.3 \cdots \frac{m}{2}}{m(m-1)(m-2)\cdots\left(m-\frac{m}{2}+1\right)}$$

& pour $m-1$ mariages $\dfrac{1.2.3 \cdots \frac{m}{2}}{(m-1)(m-2)(m-3) \cdots \left(m-\frac{m}{2}\right)}$

m ſignifiant toujours un nombre pair.

Si on veut éviter l'inconvénient d'avoir recours à une formule différente ſuivant que le nombre des mariages eſt pair ou impair, on peut le faire, mais en introduiſant deux lettres dans l'expreſſion générale qu'on demande. Car nommons le nombre des mariages M & ſubſtituons cette lettre à la place de n dans le terme général $\frac{n.(n-1)\cdots n-\frac{m}{2}+1}{1.2.3\cdots\frac{m}{2}}$, nous parvenons à la ſeule expreſſion générale

$$\frac{1.2.3 \cdots \frac{m}{2}}{M\,(M-1)\,(M-2) \cdots M - \frac{m}{2} + 1}$$

dans

dans laquelle m eſt toujours un nombre pair, $=$ M ſi M eſt pair, & $=$ M $+$ 1 ſi M eſt impair.

§. 18. L'ordre que je me ſuis propoſé demande que je continue ces recherches par l'examen des cas où le nombre des perſonnes qui ſe marient enſemble eſt impair. Je ne m'arrêterai pas à défendre l'abſurdité apparente de cette hypotheſe; dans les calculs de mortalité on peut y être conduit, & celui des probabilités l'admet dans ſes principes.

Je ferai précéder plûtôt quelques autres conſidérations plus néceſſaires.

1°. Quand dans un nombre impair de perſonnes l'*égalité* du nombre eſt auſſi grande entre l'un & l'autre ſexe que cela eſt poſſible, il ne peut jamais y avoir qu'une perſonne célibataire. Et comme *in abſtracto* cette perſonne peut également être un homme ou une femme, je ſuppoſerai dans la ſuite que le nombre des hommes a été d'une unité plus grand que celui des femmes, & qu'ainſi c'eſt un homme qui a été condamné au célibat lorſque les mariages ont été contractés.

2°. Je ſuppoſerai auſſi que cet homme reſte garçon toute ſa vie; ce ſeroit une condition embarraſſante de lui faire épouſer une des femmes qui deviennent veuves. D'ailleurs on fait abſtraction de la longueur de la vie de chaque individu, & ceux qui meurent ſont cenſés mourir enſemble.

3°. La moitié d'un nombre impair de perſonnes devant mourir, ſi ce nombre eſt $2m + 1$, on ſuppoſera à la vérité que $\frac{2m+1}{2}$ perſonnes mourront, mais de façon que la ſuppoſition roule ſur les deux cas équivalens de la mort de $\frac{2m+1}{2} - 1$ & de $\frac{2m+1}{2} + 1$ perſonnes.

4°. Il m'a paru plus avantageux de faire l'énumération des cas en ſéparant ceux où le célibataire ſe trouve d'avec ceux où il ne ſe trouve pas.

Ces

Ces choſes étant poſées, je vais entrer en matiere comme au commencement de ce Mémoire, dans l'hypotheſe que tous les rapports entre les morts des deux ſexes ſont poſſibles.

§. 19. Comme c'eſt des nombres impairs qu'il s'agit, on ne peut pas paſſer ſous ſilence le cas où le nombre des perſonnes eſt $= 1$; mais la probabilité en queſtion étant l'unité dans ce cas, on n'a pas beſoin de s'y arrêter.

§. 20. Quand il y a 3 perſonnes $A + a$, B, & qu'on ſuppoſe qu'il en meurt deux, la probabilité eſt $= 1$, puiſque toutes les trois combinaiſons rompent les mariages. Mais, ſi l'on ſuppoſe qu'il ne meurt qu'une perſonne, de 3 cas qui peuvent arriver il n'y en a que 2, A & a, qui rompent les mariages: donc la probabilité n'eſt alors que $\frac{2}{3}$: or il eſt également probable qu'il mourra 2 perſonnes, ou qu'il n'en mourra qu'une: donc l'expreſſion entiere pour notre probabilité eſt $\frac{1 \times 1 + 1 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{6}$. Ce réſultat ſe voit auſſi dès le premier coup d'œil dans la diſpoſition ſuivante du calcul, laquelle me ſervira principalement dans la ſuite pour plus d'ordre & de briéveté.

Combinaiſons poſſibles des mourans			Cas qui rompent les mariages		
Hommes		Femmes	Sans le célibat.	Avec le célibataire	
2	&	0	0	1	Somme 3
1	—	1	1	1	
1	—	0	1	0	Somme 2
0	—	1	1	0	

La raie tranſverſale ſépare, comme on voit, le calcul pour la ſuppoſition de la mort de la grande moitié, de celui qu'on fait en ſuppoſant que la petite moitié du nombre total des perſonnes ceſſe de vivre. On voit à la fin les ſommes des cas, qu'il ſuffit d'ajouter enſemble & de diviſer par le double de la ſomme des combinaiſons poſſibles pour la mort de la grande ou de la petite moitié. Cette ſomme eſt toujours la même dans les 2 cas par une propriété connue.

§. 21. Qu'il y ait maintenant 5 perſonnes A + *a*, B + *b*, C, on aura

Combin. poſſ. des mourans H^s. F^s.	Cas qui rompent les mariages: Sans le célibat.	Avec le célibat.	Sommes
3 & 0	0	1	8
2 — 1	2	2	
1 — 2	2	1	
2 & 0	1	0	4
1 — 1	2	0	
0 — 2	1	0	

Or cinq choſes ſe combinent 3 à 3, ou 2 à 2 de 10 manieres: la probabilité qu'on demande eſt donc $\frac{1 \times \frac{8}{10} + 1 \times \frac{4}{10}}{2} = \frac{12}{20}$.

§. 22. Pour 7 perſonnes A + *a*, B + *b*, C + *c*, D, on a

Combin. poſſ. des mourans H^s. F^s.	Cas qui rompent les mariages: Sans le célib.	Avec le célib.	Sommes
4 & 0	0	1	20
3 — 1	3	3	
2 — 2	6	3	
1 — 3	3	1	
3 & 0	1	0	8
2 — 1	3	0	
1 — 2	3	0	
0 — 3	1	0	

Mais le nombre des combinaiſons 4 à 4, ou 3 à 3, eſt 35: donc la probabilité cherchée $= \frac{28}{70}$.

§. 23. S'il y a 9 perſonnes A + *a*, B + *b*, C + *c*, D + *d*, E, on a

Com-

Combin. poſſ. des mourans H^s.		F^s.	Cas qui rompent les mariages Sans le célib.	Avec le célib.	Sommes
5	&	0	0	1	48
4	—	1	4	4	
3	—	2	12	6	
2	—	3	12	4	
1	—	4	4	1	
4	&	0	1	0	16
3	—	1	4	0	
2	—	2	6	0	
1	—	3	4	0	
0	—	4	1	0	

Le nombre des combinaiſons eſt 126: par conſéquent la probabilité qu'on demande $= \frac{64}{252}$.

§. 24. Il eſt preſque ſuperflu de pouſſer ces énumérations plus loin: voici cependant encore la Table pour 11 perſonnes.

A + *a*, B + *b*, C + *c*, D + *d*, E + *e*, F.

Combin. poſſ. des mourans H^s.		F^s.	Cas qui rompent les mariages Sans le célib	Avec le célib.	Somme
6	&	0	0	1	112
5	—	1	5	5	
4	—	2	20	10	
3	—	3	30	10	
2	—	4	20	5	
1	—	5	5	1	
5	&	0	1	0	32
4	—	1	5	0	
3	—	2	10	0	
2	—	3	10	0	
1	—	4	5	0	
0	—	5	1	0	

Le

Le nombre des Comb. poſſ. eſt 462; ainſi la probabilité cherchée $= \frac{144}{924}$.

§. 25. Il n'y a plus moyen de douter à préſent de la loi que ſuivent les nombres des cas pour les différentes combinaiſons, dans la ſuppoſition de tel nombre de perſonnes qu'on voudra. On voit que pour les combinaiſons ſuivant la grande moitié, 1°. les cas qui rompent les mariages ſans que le garçon meure, ſont exprimés par les produits du nombre qui indique la petite moitié ou le nombre des mariages, multiplié avec les coëfficiens du binome élevé à ce nombre des mariages qui ont eu lieu au commencement, diminué de l'unité. 2°. Que ſi le garçon eſt ſuppoſé mourir, les cas en queſtion ſont exprimés par les coëfficiens d'un binome élevé au nombre de la petite moitié. On voit enfin que, pour les combinaiſons ſuivant la petite moitié, les cas ſans le célibataire ſuivent préciſément la loi des cas avec le célibataire pour la grande moitié; & que ſi l'on ſuppoſe que le garçon meurt, il n'y a jamais de cas qui rompe les mariages. Maintenant, ſi l'on indique le nombre impair des perſonnes en général par $2m + 1$, & qu'on faſſe attention que la ſomme des coëfficiens d'un binome élevé à une puiſſance quelconque eſt toujours égale au nombre 2 élevé à la même puiſſance, on conclura ſans peine que notre probabilité s'exprime par une fraction qui a pour numérateur $m \times 2^{m-1} + 2 \times 2^m$ ou $2^{m-1} m + 2^{m+1}$, & pour dénominateur

$$2 \times \left(\frac{(2m+1).\ 2m.\ (2m-1) \ldots (2m-m+1)}{1.2.3.4 \ldots m+1} \right) \text{ ou}$$

$$2 \times \left(\frac{(2m+1).\ 2m.\ (2m-1) \ldots (2m-m+2)}{1.2.3.4 \ldots m} \right) \text{ ou}$$

(par une autre propriété)

$$\frac{(2m+2).\ (2m+1)\ 2m\ (2m-1) \ldots (2m-m+2)}{1.2.3.4 \ldots m+1}$$

c'eſt

c'eſt à dire donc, par la fraction

$$\frac{2^{m-1}\,m + 2^{m+1}}{((2m+2)(2m+1)(2m)\ldots(2m-m+2)) : (1.2.3.4\ldots.m+1)}.$$

§. 26. Je ferai remarquer qu'il n'étoit pas néceſſaire, pour trouver le numérateur de la fraction, de conſidérer l'ordre qu'obſervent les cas qui rompent les mariages avant qu'ils ſoient réduits en ſommes; ces ſommes faiſant arriver au même but. En effet, ſi l'on conſidere toujours la ſomme des cas pour la ſuppoſition que la petite moitié des perſonnes meure, & le rapport de l'autre ſomme à celle-là, on verra que notre numérateur, ou la ſomme des deux ſommes eſt pour 3 perſonnes . . . $2^1 + \frac{3}{2}.2^1 = 2^1 + 3.2^{1-1}$

. . 5 . . . . . $2^2 + \frac{4}{2}.2^2 = 2^2 + 4.2^{2-1}$

. . 7 . . . . . $2^3 + \frac{5}{2}.2^3 = 2^3 + 5.2^{3-1}$

. . 9 . . . . . $2^4 + \frac{6}{2}.2^4 = 2^4 + 6.2^{4-1}$

⋮ ⋮ ⋮

& pour $2m+1$ . . . . . $2^m + \frac{m+2}{2}.2^m = 2^m + (m+2).2^{m-1}$

Or il eſt facile de ſe convaincre que ce numérateur $2^m + 2^{m-1}(m+2)$ eſt $= 2^{m-1}\,m + 2^{m+1}$, ou à celui que nous avons trouvé précédemment.

§. 27. La formule générale du §. 25. peut ſe tirer auſſi de la comparaiſon des probabilités pour un nombre impair de perſonnes avec celles que nous avons trouvées pour un nombre pair; & on n'a beſoin alors que des réſultats tels que nous les avons réduits, ſans paſſer par les conſidérations des §. §. 25 & 26.

Comme d'ailleurs cette comparaiſon eſt à ſa place ici, j'indiquerai cette nouvelle route. Nos réſultats numériques ſuivent l'ordre que voici:

Nombre des P.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.
Nombre des M.	0	I	I	II	II	III	III	IV	IV	V	&c.
Probab.	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{28}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{64}{252}$	$\frac{32}{252}$	&c.

Une legere attention à cette Table ſuffit pour faire voir 1°. Que les dénominateurs pour un nombre impair de perſonnes ſont toujours les mêmes que pour le nombre pair ſuivant. 2°. Que les numérateurs pour le nombre impair ſurpaſſent conſtamment les numérateurs pour le nombre pair ſuivant, du produit de la quantité des mariages qui ſe trouvent dans ce nombre impair, avec le nombre binaire élevé à ce nombre des mariages, *diminué de l'unité.*

Afin donc de trouver la probabilité en queſtion pour un nombre impair quelconque $2m + 1$, il faut chercher la probabilité pour le nombre pair $2m + 2$, en ſubſtituant dans la formule du §. 7. $m + 1$ au lieu de m, & ajouter à cette quantité une fraction qui ait le même dénominateur & dont le numérateur ſoit $2^{m-1}m$. La ſubſtitution de $m + 1$ pour m dans l'expreſſion générale du §. 7. donne

$$\frac{2^{m+1}}{((2m+2)(2m+1)\,2m \cdots (2m-m+2)) : (1.2.3 \cdots m+1)}$$

& l'addition dont je viens de parler étant faite, on a

$$\frac{2^{m+1} + 2^{m-1}m}{((2m+2)(2m+1)\,2m \cdots (2m-m+2)) : (1.2.3 \cdots m+1)}$$

comme au §. 25.

§. 28. Cette formule & celle du §. 7. peuvent être rendues d'une application encore plus aiſée par une legere transformation, qui introduiſe dans les formules la lettre qui indique le nombre des perſonnes. Car ſi je fais dans la formule du §. 7. $2m = N$, & dans celle du §. 25, $2m + 1 = N$, la premiere ſe change en celle-ci

$$2^{\frac{N}{2}}$$

$$\frac{2^{\frac{N}{2}}}{(N.(N-1).(N-2)\cdots(N-\frac{1}{2}N+1)):\left(1.2.3\cdots\frac{N}{2}\right)}$$

& la ſeconde en celle-ci

$$\frac{2^{\frac{N+1}{2}}+2^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\left((N+1)N(N-1)\cdots\left(N-\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)\right):\left(1.2.3\cdots\frac{N+1}{2}\right)}$$

de ſorte que *les formules renferment* la lettre même qui exprime le nombre des perſonnes, & qu'il ne s'agit plus que de ſavoir ſi ce nombre eſt pair ou non pair.

§. 29. J'ai encore une obſervation à faire avant que d'aller plus loin, c'eſt que nos formules ſatisfont exactement à tous les corollaires qu'on en tire; que la ſuppoſition de $N = 1$ dans la ſeconde du §. 28. ou de $m = 0$ dans la même avant ſa transformation, donne exactement la probabilité cherchée $= \frac{2}{2} = 1$. Peut-être n'auroit-on pas été ſurpris de trouver cette probabilité $= \infty$, puiſqu'il ſemble qu'une choſe déja faite doit avoir un avantage infini ſur une choſe encore à faire, (lors même qu'il eſt ſûr qu'elle ſe fera,) telle qu'eſt la diſſolution du mariage contracté par deux perſonnes, pour laquelle la probabilité eſt auſſi $= 1$. Mais c'eſt que, *in abſtracto*, il n'y a pas de tems dans le calcul des probabilités.

§. 30. Je me ſuis engagé à chercher auſſi la ſolution du Probleme pour un nombre impair de perſonnes, & dans l'hypotheſe qu'il meure un nombre égal d'hommes & de femmes. Je crois m'être ſuffiſamment expliqué ſur le ſens dans lequel je prends cette condition quand le nombre des perſonnes eſt impair; mais il pourroit reſter des doutes ſi l'alternative de cas que j'employerai exprime préciſément l'égalité qu'on demande. Je tâcherai de les prévenir par la conſidération préliminaire que voici.

Que

Que A + *a*, B ſoient les perſonnes dont la moitié eſt cenſée mourir. Il devroit à la rigueur mourir 1H. & ½F. mais ½ n'eſt que le réſultat des deux cas également probables de 1 & de 0. Je dis donc qu'il eſt également probable qu'il mourra 1H & 1F. ou 1H & 0F. & que cette alternative remplit parfaitement la condition de l'égalité. De même, s'il eſt queſtion de 5 perſonnes A + *a*, B + *b*, C, il en devroit mourir 2½, ſavoir 1½H & 1F*, & ce cas revient à l'alternative de 2H^r & 1F ou de 1H & 1F. & ainſi de ſuite: quand le nombre des mariages eſt pair, c'eſt la moitié des H^r. & quand il eſt impair c'eſt la moitié des F^s. qu'il faut ainſi décompoſer.

Cela poſé, on va voir dans de petites Tables les principaux élémens: je ſuppoſe que l'énumération des cas ſe faſſe mentalement.

§. 31. Pour 3 perſonnes A + *a*, B, on a

Morts Hommes.	Femmes	Comb. poſſ. ſans le célib.	Comp. poſſ. avec le célib.	Nomb. des cas romp. les mar. ſans le célib.	avec le célib.	Sommes de ces cas
1	1	1	1	1	1	2
1	0	1	1	1	0	1

Ajoutant les deux ſommes enſemble & diviſant par le nombre des combinaiſons poſſibles, on a la probabilité en queſtion = ¾.

§. 32. Pour 5 perſonnes A + *a*, B + *b*, C, on a

Morts Hommes.	Femmes	Combinaiſons poſſibles ſans le célib.	avec le célib.	Nomb. des cas romp. les mar. ſans le célib.	avec le célib.	Sommes de ces cas
2	1	2	4	2	2	4
1	1	4	2	2	0	2

Donc la Prob. = $\frac{6}{12}$.

§. 33. Pour 7 perſ. A + *a*, B + *b*, C + *c*, D.

Morts Hommes.	Morts Femmes	Combinaiſons poſſibles ſans le célib.	Combinaiſons poſſibles avec le célib.	Cas qui rompent les mariages ſans le célib.	Cas qui rompent les mariages avec le célib.	Sommes de ces cas
2	2	9	9	6	3	9
2	1	9	9	3	0	3

Donc la prob. $= \frac{12}{36}$.

§. 34. Pour 9 perſ. A + *a*, B + *b*, C + *c*, D + *d*, E.

Morts Hommes.	Morts Femmes	Combinaiſons poſſibles ſans le célib.	Combinaiſons poſſibles avec le célib.	Cas qui rompent les mariages ſans le célib.	Cas qui rompent les mariages avec le célib.	Sommes de ces cas
3	2	24	36	12	6	18
2	2	36	24	6	0	6

Donc la prob. $= \frac{24}{120}$.

§. 35. Pour 11 perſ. A + *a*, B + *b*, C + *c*, D + *d*, E + *e*, F.

Morts Hommes.	Morts Femmes	Combinaiſons poſſibles ſans le célib.	Combinaiſons poſſibles avec le célib.	Cas rompant les mariages ſans le célib.	Cas rompant les mariages avec le célib.	Sommes de ces cas
3	3	100	100	20	10	30
3	2	100	100	10	0	10

Donc la prob. $= \frac{40}{400}$.

§. 36. Pour 13 perſ. A + *a*, B + *b*, C + *c*, D + *d*, E + *e*, F + *f*, G.

Morts Hommes.	Morts Femmes	Combinaiſons poſſibles ſans le célib.	Combinaiſons poſſibles avec le célib.	Cas rompant les mariages ſans le célib.	Cas rompant les mariages avec le célib.	Sommes de ces cas
4	3	300	400	80	20	100
3	3	400	300	20	0	20

Donc la prob. $= \frac{120}{1400}$.

§. 37. Povr 15 perſ. A†*a*, B†*b*, C†*c*, D†*d*, E†*e*, F†*f*, G†*g*, H.

Morts Hommes.	Femmes	Combinaiſons poſſibles ſans le célib.	avec le célib.	Cas rompant les mariages ſans le celib.	avec le célib.	Sommes de ces cas
4	4	1225	1225	140	35	175
4	3	1225	1225	35	0	35

Donc la prob. $= \frac{210}{4900}$.

§. 38. Ces réſultats ſuffiſent pour la conſtruction d'une formule qui puiſſe les exprimer; & on voit entre les élémens de chaque genre la rélation qui ſert à les continuer.

1°. Les combinaiſons poſſibles pour la grande moitié & avec le célibataire ſont toujours le quarré du coëfficient du terme moyen d'un binome élevé au nombre des mariages.

2°. Les combinaiſons poſſibles pour la grande moitié ſans le célibataire ſont aux premieres dans le rapport du nombre des femmes qui meurent à celui des hommes qui meurent.

3°. Les combinaiſons poſſibles pour la petite moitié ſont égales en nombre à celles qui ont lieu pour la grande moitié, mais elles ont entr'elles le rapport inverſe rélativement à la conſidération du célibataire.

4°. Les cas qui rompent les mariages ſe trouvent dans les nombres figurés, ſavoir pour 3 & 5 perſ. dans ceux du 1 ordre

pour 7, 9 & 11 - - - - 2 —
pour 13, 15, 17, 19 - - - - 3 —
&c. &c.

Les cas pour la petite moitié ſans le célibataire ſont les mêmes en quantité que ceux pour la grande moitié avec le célibataire; & ſe trouvent purement dans les nombres figurés: mais ce nombre eſt multiplié par un coëfficient dans les cas pour la grande moitié ſans le célibataire.

§. 39.

§. 39. Je vais donner à préſent les indications néceſſaires pour trouver en général ce nombre de cas pour la mort de la grande moitié avec le célibataire, que pour un inſtant je nommerai P. On vient de voir

1°. Que les 2 Nbres P p^r. 1 & 2 Mar. ſont pris dans le 1^r Ordre des Nb^r Fig^s.
- - 3 N^r. P ſuiv^t. p^r. 3,4,5, — — 2^d — —
- - 4 — — 6,7,8,9 — — 3 — —
- - 5 — — 10,11,12,13,14 — 4 — —

Il faudra donc

chercher les m N^r. P pour $\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)}{1.2}+1$, ... $\frac{m(m-1)}{1.2}+m-1$, d^s $(m-1)^e$ ordre.

On remarque de plus

2°. Que ce nombre m eſt toujours le nombre naturel qui eſt immédiatement à la gauche du nombre trigonal, égal au nombre des mariages, ou qui en approche le plus.

Enfin

3°. Que pour obtenir la valeur de P, c'eſt préciſément le nombre des mariages qu'il faut ſubſtituer pour n dans le terme général $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,n-m+2}{1.2.3\,\ldots\,m-1}$ de l'ordre $m-1$, auquel on eſt renvoyé par le nombre m.

§. 40. Après ces remarques on voit aiſément que, ſi l'on exprime par M le nombre des mariages, P devient

$$= \frac{M\,(M-1)\,(M-2)\,\ldots\,(M-m+2)}{1.2.3\,\ldots\,m-1}.$$

La détermination de la lettre m ne rend pas l'application de cette expreſſion difficile, car: le nombre naturel qui eſt à la gauche d'un nombre trigonal quelconque $\frac{n\,(n-1)}{1.2}$ eſt n; or ſi $\frac{n\,(n-1)}{1.2}$ eſt en général le nombre trigonal qui eſt égal ou le plus approchamment $= M$,

$= M$, il faut que n devienne égal, ou du moins encore plus approchamment égal, à $\frac{1}{2} + \sqrt{(2M + \frac{1}{4})}$, & par conſéquent m ſera toujours le plus grand nombre entier moindre que $\frac{1}{2} + \sqrt{(2M + \frac{1}{4})}$, ou bien abſolument $= \frac{1}{2} + \sqrt{(2M + \frac{1}{4})}$, dans les cas où M eſt un nombre trigonal.

§. 41. La détermination complette du numérateur de la formule générale que je cherche, exige encore l'évaluation du coëfficient duquel j'ai parlé à la fin du §. 38. Pour y parvenir j'obſerve que dans les exemples que j'ai développés, ces coëfficiens ſe ſuivent dans l'ordre que voici:

Perſonnes	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	&c.
Mariages	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.
Coëfficiens	1	1	2	2	2	4	4	4	4	8	&c.

Ainſi, dans les probabilités pour 1 & 2 couples, le coëfficient eſt 2^0. Pour les 3 probabilités ſuivantes, il eſt 2^1; pour les 4 ſuivantes il eſt 2^2; & il arrivera une fois que dans m réſultats de ſuite il ſera 2^{m-3}, où m eſt le même que nous avons employé dans les 2 §§. précédens.

§. 42. Il ſuit de là que P étant par le §. 39. le terme général des nombres figurés de l'ordre $m - 1$ ou (§. 40)

$= \frac{M(M-1)(M-2)\cdots(M-m+2)}{1.2\cdots(m-1)}$ le numérateur en queſtion devient $= 2^{m-3}P + 2P$, ou

$$(2^{m-3} + 2) \times \frac{M(M-1)(M-2)\cdots(M-m+2)}{1.2.3\cdots m-1}.$$

§. 43. Paſſons au dénominateur général qu'il reſte à déterminer. Et pour cet effet examinons les dénominateurs des réſultats trouvés dans les §§. 31, 32 & ſuiv.

Per-

Perſonnes	$2^{H}.1^{F}$	$3^{H}.2^{F}$	$4^{H}.3^{F}$	$5^{H}.4^{F}$	$6^{H}.5^{F}$	$7^{H}.6^{F}$	$8^{H}.7^{F}$	&c.
Mariages	1	2	3	4	5	6	7	&c.
Dénomin^{rs}.	4	12	36	120	400	1400	4900	&c.
Dénominateurs décompoſés	2(1.2)	2(2.3)	2(3.6)	2(6.10)	2(10.20)	2(20.35)	2(35.70)	&c.

§. 44. On voit que je n'ai pas fait entrer ſéparément dans cette petite Table les 4 nombres des combinaiſons poſſibles, ou qui compoſent les dénominateurs. La raiſon en eſt facile à ſentir; je ne pouvois pas procéder ici de la même maniere que pour les numérateurs parce que ces 4 nombres ne ſauroient être renfermés dans une même formule. On auroit, quand M eſt impair, 4 fois le quarré des combinaiſons ſuivant $\frac{M+1}{2}$; & quand M eſt pair, 2 fois le nombre des combinaiſons ſuivant $\frac{M+2}{2}$, plus 2 fois le quarré du nombre des combinaiſons ſuivant $\frac{M}{2}$.

§. 45. Je remarque de plus que les dénominateurs réduits 4, 12, 36, 120 &c. ſuivent une loi trop longtems cachée pour qu'on doive s'arrêter à les mettre en formule tels qu'ils ſont, & que c'eſt ce qui m'a engagé à les décompoſer de nouveau de la maniere qu'on voit dans la 4e colonne tranſverſale.

§. 46. Ces nombres décompoſés ont la propriété que voici: Ils ſont le double du produit des combinaiſons des nombres de perſonnes de l'un & de l'autre ſexe, ſuivant la moitié du nombre pair qui exprime alternativement celui des hommes & celui des femmes. C'eſt à dire que ces combinaiſons ſe font alternativement ſuivant $\frac{M+1}{2}$ & ſuivant $\frac{M}{2}$. Par ex. pour 4^{H} & 3^{F} on a 2 fois (3. 6): dans ce produit 3

eſt le nombre des combinaiſons ſuivant la moitié de 4 (ou deux à deux) de 3 F. & 6 eſt le nombre des combinaiſons deux à deux de 4H. Pour $5^{H}.4^{F}$. on a 2 (6.10), c'eſt à dire 2 fois le nombre des combinaiſons deux à deux de 4 F. multiplié avec le nombre des combinaiſons deux à deux de 5 H.

Je ne parle de cette propriété que parce qu'elle mérite en elle-même d'être remarquée & qu'elle peut avoir ſon utilité dans des cas particuliers. Car d'ailleurs elle a auſſi l'inconvénient de ne pouvoir donner une même formule pour tous les cas. On obtiendroit un dénominateur général différent, ſuivant que le nombre des Hommes ou bien celui des Femmes ſeroit pair. C'eſt de la maniere ſuivante que je conſidere ces nombres pour parvenir au but que je me propoſe.

§. 47. Je mets à part le nombre 2 qui multiplie tous ces produits, & je remarque dans la ſérie de ces produits pour 1, 2, 3 &c. Mariages

(1.2), (2.3), (3.6), (6.10), (10.20), (20.35), (35.70) &c.

que les premiers membres de chaque produit

1, 2, 3, 6, 10, 20 &c.

non ſeulement ſuivent la même loi que nous avons fait remarquer plus haut (§. 39. 1°), mais que ce ſont auſſi les mêmes nombres que P pour le même nombre de mariages; d'où il ſuit que l'expreſſion générale pour ces premiers membres eſt auſſi

$$\frac{M(M-1)\ (M-2)\ \ldots\ (M-m+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m-1}.$$

Quant aux ſeconds membres des produits en queſtion, qui ſont

2, 3, 6, 10, 20, 35, 70 &c.

ils obſervent une loi qui eſt de la même nature, mais avec une différence qu'on ſaiſit facilement en conſidérant 1°. que des membres ou nombres en queſtion

Le

Le 1$^{r.}$ pour 1 Mar. eſt pris dans le 1$^{r.}$ Ordre des Nb$^{s.}$ Fig$^{s.}$
Les 2 ſuiv$^{s.}$ p$^{r.}$ 2, 3 — ſont pris dans le 2^{d} — — —
Les 3 — — 4, 5, 6 — — — 3e — — —
Les 4 — — 7, 8, 9, 10 — — — 4e — — —
⋮
Les μ Nb$^{s.}$ p$^{r.}$ $\frac{\mu(\mu-1)}{2}+1, \frac{\mu(\mu-1)}{2}+2 \cdots \frac{\mu(\mu-1)}{2}+\mu$ dans le μ^{e} — —

2°. Que μ ſignifie ici le nombre naturel qui eſt à gauche, immédiatement au deſſus du nombre trigonal égal à M ou du premier trigonal plus grand que M. Ou bien: que μ eſt le nombre entier $= \sqrt{(2M + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2}$, ou le premier nombre entier qui ſurpaſſe $\sqrt{(2M + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2}$.

3°. Que ſachant dans quel ordre des nombres figurés on doit chercher chaque ſecond membre des produits, il ne reſte pour trouver ce nombre qu'à ſubſtituer $M + 1$ au lieu de n dans le terme général de cet ordre.

§. 48. Concluons de là que les produits dont nous parlons, multipliés avec le nombre 2 que nous avions mis de côté, ſont généralement exprimés par

$$2\left(\left(\frac{M.(M-1).(M-2)\cdots M-m+2}{1.2\cdots m-1}\right)\times\left(\frac{(M+1)M(M-1)\cdots(M-\mu+2)}{1.2.3\cdots\mu}\right)\right)$$

& enfin que la formule générale de la probabilité que nous cherchions dans l'hypotheſe du §. 30. eſt

$$\frac{2^{m-2}+2)\left(\frac{M.(M-1)(M-2)\cdots(M-m+2)}{1.2\cdots m-1}\right)}{2\left(\left(\frac{M(M-1)(M-2)\cdots(M-m+2)}{1.2\cdots m-1}\right)\times\left(\frac{(M+1)(M)(M-1)\cdots(M-\mu+2)}{1.2.3\cdots\mu}\right)\right)}$$

ou $$\frac{(2^{m-3}+1)\,(1.2.3\cdots\mu)}{(M+1)\,M\,(M-1)\cdots(M-\mu+2)}.$$

On

On pourroit ſe paſſer d'introduire la lettre μ dans cette expreſſion générale: mais il faudroit alors exprimer le réſultat qu'on cherchoit par deux expreſſions analytiques différentes dont l'une ſerviroit quand M eſt un nombre trigonal, & l'autre quand ce nombre n'eſt pas trigonal. Cela vient de ce que dans le 1er cas (où M eſt un nombre trigonal) μ eſt toujours $= m - 1$, & que dans les autres μ eſt conſtamment $= m$.

On voit aiſément au reſte lequel de ces deux cas a lieu quand on a ſubſtitué pour M ſa valeur dans $\sqrt{(2M + \frac{1}{4})}$: car ſi M eſt un nombre trigonal, cette quantité devient rationelle; s'il ne l'eſt pas, elle reſte ſourde.

§. 49. Si je ne m'étois arrêté peut-être déja trop longtems ſur cette matiere, je donnerois encore ici la comparaiſon des réſultats numériques des §§. 31, 32 &c. avec ceux des §§. 11, 12 & ſuiv. laquelle ne laiſſeroit pas d'être intéreſſante; mais la formule du §. 48. n'étant jamais en défaut dans les applications numériques, & étant très ſimple, je me contenterai d'avoir prouvé par là qu'il n'y a aucune objection à faire contre l'application que j'ai faite dans ce Mémoire du calcul des probabilités & de pluſieurs belles propriétés des nombres figurés.

Ordres des Nombres figurés.

	0	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	&c.
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	
12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	

&c.

RÉFLEXIONS
SUR
LA NATURE ET LA NE'CESSITE'
DES IDÉES OBSCURES.

PAR MR. DE BEAUSOBRE.

Si l'on veut réfléchir avec attention à ce qui ſe paſſe en nous-mêmes, on pourra ſe convaincre qu'il y a néceſſairement dans notre ame un nombre infini d'idées dont nous ne nous appercevons pas: ces idées, on les appelle obſcures. L'homme n'étant point une ſimple machine, il eſt néceſſaire qu'il n'agiſſe jamais qu'en conſéquence de quelques repréſentations, qui ont déterminé ſa volonté: mais il arrive très ſouvent que ni ces repréſentations ni ces actes de ſa volonté n'aient été clairement apperçus: il y a plus, l'homme ſatisfait la plus grande partie des beſoins de la nature ſans y faire attention: cela ſe remarque ſurtout dans les habitudes; auſſi ne manque-t-on pas d'alléguer ce manque d'attention pour excuſer ou pallier du moins les fautes dans leſquelles on retombe trop ſouvent: je n'y ai pas penſé, dit-on, pour ſe diſculper, c'eſt à dire, je n'ai pas eu préſent à l'eſprit ce que j'ai fait.

Il arrive auſſi que les idées qui ont déterminé notre volonté ont été clairement apperçues, mais qu'elles ne l'ont été que pendant un ſi court eſpace de tems, que la rapidité avec laquelle ces idées ont fait place à d'autres ne nous a pas permis d'en conſerver le ſouvenir: c'eſt l'image fugitive d'un objet qui s'envole, il a été dans la rétine de mon

œil, mais il n'y a pas été aſſez longtems pour que j'aie pû le diſtinguer parfaitement & me le rappeller enſuite. Un faux pas me fait broncher, je tombe; l'idée du danger ſe préſente à mon eſprit, mes bras s'avancent pour m'en préſerver; mais, la chute faite, je ne me rappelle que le danger que j'ai couru, & non la précaution que j'ai priſe, parce que l'idée du danger a été clairement apperçue & l'a été aſſez longtems, tandis que l'idée de la précaution que je prenois ne l'a point été, ou ne l'a été qu'un inſtant. Cette rapidité avec laquelle une idée claire paſſe quelquefois ſans laiſſer de traces après elle, eſt cauſe qu'on ne ſauroit la diſtinguer d'une idée qui a toujours été obſcure, c'eſt à dire, qui n'a point été apperçue.

Que ſont donc ces idées obſcures, ou ces repréſentations dont l'ame ne s'apperçoit pas? Il n'eſt pas difficile de répondre à cette queſtion. L'ame eſt une force repréſentative de l'Univers: toutes les idées qu'elle peut avoir ſont actuellement en elle; mais comme elle eſt une force finie, toutes ces idées ne peuvent pas y être avec un degré égal de clarté: il y en a même peu qui parviennent à être clairement apperçues, & il y en a toujours une qui l'eſt plus que toutes les autres; la lumiere de l'une éclipſe les autres. Notre ame reſſemble à nos yeux, on ne peut pas tout voir, & ce qu'on ne voit pas on doit le ſoupçonner.

Si l'on pouvoit douter du paſſage continuel & rapide de nos idées de l'état d'obſcurité à un état de clarté, ou de celui-ci à celui-là, je pourrois en donner un exemple bien frappant pour tous ceux qui ont médité: il arrive quelquefois qu'en cherchant à découvrir la vérité, à développer un ſophiſme, à écarter une difficulté qui nous arrête, il ſe préſente tout à coup à l'eſprit une lumiere qui nous éclaire, mais qui s'éteint un inſtant après: c'eſt que cette lumiere eſt le réſultat de pluſieurs conſéquences, de pluſieurs vérités liées enſemble, que mon eſprit a ſaiſies à la fois, qu'il falloit qu'il ſaisît pour être ainſi éclairé, mais qu'il ne peut ſaiſir longtems toutes à la fois & toutes avec le même

me degré de clarté. C'eſt un effort qui ne peut durer qu'un inſtant, un rapprochement de parties difficiles à tenir unies; dans le commun de la vie, la converſation & la diſpute peuvent amener de ces momens lumineux, où celui qui ne raiſonne pas dit qu'il ſent, & où le philoſophe dit qu'il voit ou entrevoit. Quelquefois auſſi il arrivera qu'un homme qui médite aura de ces momens heureux où il appercevra entre deux choſes très oppoſées une liaiſon imperceptible, mais réelle, & l'expreſſion lui manque: ou bien les ſenſations, les images que l'imagination préſente, la laſſitude que produit la contention d'eſprit, viennent l'interrompre, & il ne reſte aucune trace de cette idée qui avoit été clairement apperçue. J'ai vu un inſtant, je ne vois plus: ce qui arrive ici pour une idée qui n'a été clairement apperçue qu'un moment, arrive également pour les idées qui l'ont été fort longtems. Nous n'avons qu'à perdre de vue certaines vérités, & nous occuper pendant quelque tems de vérités ou d'idées d'un genre différent; lorſque nous reviendrons aux premieres nous aurons de la peine à nous rappeller comment nous raiſonnions, quel étoit le fil des idées qui nous avoit conduit: la même conſéquence ne ſera plus repréſentée avec le même degré de vivacité, elle ne paroîtra plus auſſi ſure qu'elle l'a paru autrefois, parce que les idées intermédiaires qui formoient la chaine du raiſonnement ne ſont plus clairement apperçues. Auſſi voit-on que ceux qui ont beaucoup penſé ſur un ſujet dont ils s'occupent encore, ſe contentent d'un dilemme lorſqu'il s'agit de prouver des vérités qui y ont rapport; les vérités ſous-entendues ſont préſentes à leur eſprit, au moment où ils le veulent: ceux au contraire qui ont perdu de vue ces matieres, ne ſe fient pas à ce dilemme, il leur faut un raiſonnement plus détaillé: pour ceux à qui ces matieres ſont tout à fait neuves, ils ſont étonnés d'une conſéquence qui leur paroit n'avoir aucune liaiſon avec les prémiſſes qui la précedent; il faut alors leur montrer cette liaiſon, c'eſt à dire, leur développer les vérités intermédiaires. La différence qu'il y a ici entre celui qui a oublié & celui qui n'a jamais ſçu, c'eſt qu'il y a mille manieres de faire entrevoir cette liaiſon au premier, & qu'il n'y en a

peut-être qu'une pour le ſecond: c'eſt que le premier, mis ſeulement ſur la route, l'acheve ſeul, & qu'il faut conduire le ſecond juſqu'au bout.

Toutes les idées qui ont été une fois clairement apperçues peuvent, ſi elles deviennent obſcures, retourner à un état de clarté; une foule d'idées qui n'ont point encore été clairement apperçues peuvent l'être avec le tems: mais de toutes les idées obſcures qui ſont dans notre ame il y en a une grande partie qui ne parviendra jamais à un degré de clarté ſuffiſant pour être apperçue. Toutes celles qui exigeroient qu'un trop grand nombre d'autres idées obſcures & intermédiaires fuſſent clairement apperçues, ſoit à la fois ſoit l'une après l'autre, reſteront obſcures. Cette réflexion peut faire juger non ſeulement des bornes bien étroites qui ont été preſcrites aux connoiſſances humaines, mais encore de la nature de cette gradation qu'il y a entre les eſprits finis.

Notre ame a donc un magazin d'une infinité d'idées obſcures, dont la plus grande partie ne parviendra jamais à un certain degré de clarté, dont quelques unes peuvent avec plus ou moins de peine devenir claires, dont un petit nombre paſſent tour à tour de la clarté à l'obſcurité, & de cet état-ci à celui-là, & dont ordinairement il n'y en qu'une à la fois qui puiſſe parvenir à être clairement apperçue.

Ceci explique ce que c'eſt qu'enſeigner: il faut pour cet effet faire appercevoir clairement à celui qu'on inſtruit ce qu'il n'appercevoit qu'obſcurément. Pour y parvenir, il s'agit de s'accrocher, ſi j'oſe ainſi parler, à une idée déjà claire: c'eſt ce point d'appui qu'il importe de bien choiſir; pour peu qu'on s'en écarte on tombe dans deux défauts oppoſés: en allant chercher ce point d'appui trop loin de l'idée qu'on veut rendre claire, on conduit ſon diſciple de trop loin, on lui fait perdre du tems; on le dégoûte, s'il apperçoit déja clairement les idées préliminaires qu'on prétend lui rendre claires; on le fatigue inutilement ſi ces idées préliminaires ſont ſuperflues. En ſuppoſant au contraire trop d'idées claires au jeune homme qu'on inſtruit, en pre-

prenant pour appui une idée qu'on croit à tort qu'il ſe repréſente clairement, on éleve un édifice qui n'a point de fondement. Un talent donc eſſentiel à ceux qui veulent enſeigner avec ſuccès, c'eſt de ſavoir bien juger de la portée de ceux qu'ils inſtruiſent.

Ce ſont les premiers principes, les vérités fondamentales qu'il faut s'efforcer de rendre bien claires: quand les principaux murs de l'édifice ſont élevés ſolidement, le bâtiment s'acheve ſans peine. Il faut donner à ceux qu'on inſtruit des principes & des notions, & les laiſſer penſer après cela; c'eſt à eux d'entrer dans les détails, ils ne doivent point y être conduits. On voit en effet que ce que l'on ſçait le mieux, c'eſt ce qu'on a appris ſoi-même à force d'y réfléchir, parce qu'on n'a pu faire un pas ſans avoir eu des idées claires, qu'on n'a rendu telles qu'avec bien de la peine. C'eſt ainſi qu'on ſait mal ce qu'on a appris de ſes maîtres, lorsque les maîtres n'ont pas bien jugé de ce que leurs écoliers appercevoient clairement.

Rendre claires les idées obſcures de quelqu'un, c'eſt donc véritablement l'éclairer & l'inſtruire: c'eſt le but des controverſes, ou du moins ce devroit l'être, les controverſes n'érant au fond que des meſentendus: de part & d'autre il y a certaines idées rélatives à ce qui eſt conteſté, qui ne ſont point claires, & qui doivent le devenir pour rapprocher les combattants. Mais comme il eſt naturel que plus une idée eſt claire, moins les autres le ſont, & qu'avec cela il arrive toujours qu'on ſe livre avec plaiſir à tout ce qu'on croit appercevoir clairement, on fait ſouvent peu d'effort pour rendre claires les idées qu'on nous oppoſe & c'eſt ce qui éterniſe les diſputes.

La vérité étant une, la défendre c'eſt l'expoſer avec toute la clarté poſſible: mais que d'obſtacles à ſurmonter pour en expoſer ainſi beaucoup! Les beſoins de notre exiſtence & la foibleſſe de notre eſprit nous ramenent aux idées obſcures, c'eſt à dire, brident les efforts que nous faiſons pour avoir des repréſentations claires. Je com-

pa-

parerois volontiers notre ame, rélativement aux idées, à ce qui ſe paſſe dans un homme qui voudroit juger de la mélodie & de l'harmonie d'un morceau de Muſique, tandis qu'un babil confus ou un bruit ſourd l'incommode: ou bien à la ſituation d'un homme qui médite profondément & autour duquel ſe font mille choſes, qu'il n'apperçoit point aſſez pour en être entierement troublé, & pour pouvoir ſe les rappeller enſuite, mais beaucoup plus qu'il ne faut pour pouvoir mettre dans ſa méditation toute la contention d'eſprit dont il eſt capable.

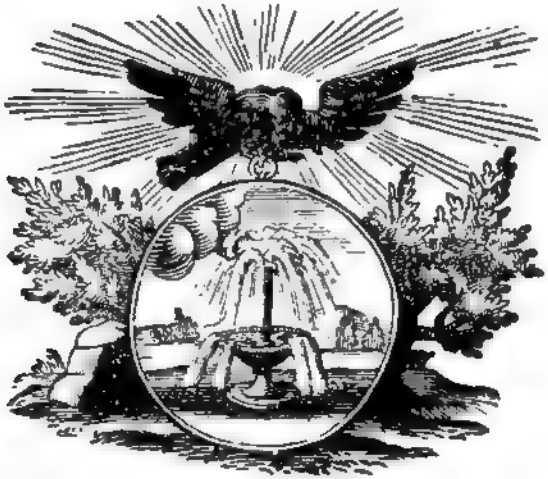
Ce qui prouve encore la vérité de ce que je viens d'avancer, c'eſt ce qui ſe paſſe dans l'ame d'un homme qui n'entrevoit qu'obſcurément les raiſons dont il a beſoin pour appuyer ce qu'il ſoutient. Voyez un eſprit borné & brouillon diſputer avec un homme éclairé: que le dernier, ſophiſte adroit, ſoutienne une opinion que le bon ſens réfute; vous verrez un homme inquiet, impatient, emporté, qui ſent qu'il a raiſon, mais qui ne ſçait pas comment il faut répondre à ſon adverſaire: les idées dont il a beſoin en ce moment ſont chez lui, ou obſcures, ou confuſes: on ne l'entraînera point dans l'erreur, mais il ſentira ſa foibleſſe. Ce que cet homme borné eſt vis à vis de l'autre, tous les hommes le ſont vis à vis d'un eſprit ſupérieur à l'homme. La véritable différence qu'on peut mettre entre les hommes, rélativement à l'eſprit, gît dans le plus ou le moins d'idées qu'ils peuvent avoir, & dans le plus ou le moins de ces idées qu'ils peuvent combiner enſemble.

De là la richeſſe des connoiſſances eſt déterminée par le nombre des idées claires, & la certitude par l'intenſité de la clarté dans les mêmes idées. De là la perſuaſion eſt l'aſſentiment donné à des idées peu claires, & la conviction l'aſſentiment donné à des idées diſtinctes; l'évidence eſt le dernier degré de clarté & entraîne la conviction la plus parfaite.

Comme les idées claires peuvent devenir obſcures, & doivent même le devenir, il eſt aiſé d'expliquer des phénomenes pſychologi-

logiques qui paroiſſent fort étranges. Je n'en allégueraï qu'un: il ſemble qu'entre la conduite des hommes & leurs principes il y ait une contradiction manifeſte, & cette contradiction ne paroit pas naturelle: en effet, comment ſe peut-il que nos actions, les actes de notre volonté ſoient les effets immédiats des repréſentations de notre ame, quand ces repréſentations leur ſont diamétralement oppoſées? Ce *video meliora, proboque, deteriora ſequor*, peut-il s'accorder avec les premieres notions que nous avons de l'empire des cauſes ſur leurs effets naturels? Faut-il que l'homme, pour être libre, puiſſe agir contre des vérités qu'il admet & qu'il ſe repréſente? Ou faut-il que nos actions, pour n'être pas une ſuite néceſſaire de tout ce qui les a précédées, puiſſent être produites malgré l'exiſtence des cauſes qui devroient les anéantir? Non, cette difficulté n'eſt qu'apparente: nos actions ſont les ſuites des repréſentations actuellement clairement apperçues: or nos devoirs & les motifs qui nous y portent ne le ſont pas toujours. Si notre ame ne ſe repréſente que le plaiſir qu'elle attend & qu'elle déſire, ſa volonté eſt déterminée par ce déſir, & les idées de moralité ne lui ſont qu'obſcurément repréſentées: auſſi nait-il ſouvent au moment où la volonté eſt déterminée un ſentiment d'inquiétude, qui n'eſt autre choſe qu'une repréſentation obſcure qui commence à recevoir quelques rayons de lumiere. Si nous nous ſommes ſouvent occupés de nos devoirs, & qu'il nous ſoit habituel de nous les rappeller, cette repréſentation deviendra bientôt claire; & honteux d'avoir déſiré le mal & réſolu de le faire, nous reviendrons ſur nos pas & n'obéirons point au premier mouvement. De même, ſi le déſir n'a pas été bien vif; ſi la repréſentation de ce prétendu avantage ne nous a pas vivement frappés; la repréſentation obſcure de notre devoir paſſe rapidement à un état de clarté ſuffiſant pour empêcher même notre volonté de ſe déterminer en faveur de ce qui a pû lui plaire un inſtant.

Mais, ſi le plaiſir s'eſt emparé de l'ame, s'il n'a laiſſé aucune place à d'autres idées, ſi nous n'avons pas contracté l'habitude de juger de nos actions & de nos déſirs; la repréſentation de notre devoir reſtera obſcure plus ou moins, ſuivant que nous nous ſerons plus ou moins occupés de l'étude de nos devoirs.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.

DE

LA BIENFAISANCE

CONSIDÉRÉE ENTANT QU'AGISSANTE.

PAR MR. TOUSSAINT. (*)

ENtre les caracteres de la bienfaiſance, ſur quoi je prépare un traité complet, il y en a un ſpécial dont je vais avoir l'honneur de Vous entretenir. Je la conſidérerai comme agiſſante; c'eſt là ce qui la diſtingue de toutes les autres vertus: car elle n'exiſte que dans l'action. Ce n'eſt point une théorie froide qui conſiſte en diſſertations, en idées ſyſtématiques, en projets, en velléités: elle s'annonce par des effets réels. Ce n'eſt point une aurore boréale, qui ne forme que des ondulations lumineuſes: c'eſt un feu actif qui répand une chaleur ſalubre.

Il ne faut point croire que ne pas faire du mal ſoit faire du bien; ni même qu'on doive être reputé bienfaiteur par la ſeule envie d'obliger. Je vais développer ces deux propoſitions l'une après l'autre.

Que ne point faire du mal n'eſt pas faire du bien.

La bienfaiſance eſt l'amour ſocial mis en action: c'eſt l'humanité même portée à ſon point de perfection; l'humanité tendre & affectueu-

(*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 2 Juin, 1768.

tueuſe qui, dans la crainte de ne pas faire aſſez, croit ne pouvoir jamais faire trop. Elle l'emporte ſur la Juſtice. Celle-ci, contente de rendre à chacun ce qui lui eſt dû, tient ſa balance en équilibre: la bienfaiſance incline la ſienne en faveur de ceux qu'elle ſert, & ſe plaît à faire pour eux plus qu'ils n'ont droit d'exiger.

Ce ſeroit errer que de croire qu'il ne faille pour le maintien de la Société que des Loix qui y faſſent obſerver l'équité. Ces Loix ſuffiroient peut-être pour en faire un corps dont le mécaniſme fût complet: mais, pour y ajouter la force, la vigueur & l'embompoint, il y faut joindre une circulation abondante de bienfaits & de ſecours mutuels, fondée ſur la bienveillance & l'affection réciproque des membres.

Ne point nuire à autrui n'eſt pas être bienfaiſant: ce n'eſt qu'une bonté négative. Pour être bon de cette maniere, il ſuffit d'être exempt de ces mouvemens inquiets de l'ame qui engendrent la colere ou la haine, & dont quelques-hommes ſont garantis par la trempe froide de leur tempérament.

Comme l'exemption des ſouffrances n'eſt qu'une demi-félicité, à quoi doit ſe joindre, pour la completter, la jouiſſance du plaiſir: ainſi, dans la carriere de la bienfaiſance, s'abſtenir ſimplement de nuire, c'eſt n'avoir fait qu'un premier pas, dont on n'a point à ſe glorifier.

L'Etat ne punit pas ſans doute un citoyen qui eſt juſte: mais, s'il n'eſt que juſte, il ne lui eſt pas dû de récompenſe. Eſt-il bienfaiſant: il peut mériter juſques à des ſtatues, & je ne crois pas dire trop.

Qu'on me permette une image affreuſe, mais qui fait preuve & m'eſt néceſſaire. On laiſſe bien expoſés à un gibet ou ſur une roue, les reſtes hideux & livides d'un malheureux, ſupplicié pour ſes crimes, afin que ce ſpectacle, dit-on, ſerve d'exemple & de frein. Pourquoi d'autre part, ſi quelqu'un s'eſt diſtingué par des actes ſignalés de bienfaiſance, ne couronnons-nous pas ſon front? pourquoi ne garniſſons-nous pas nos places publiques & nos promenades de ſes auguſtes re-

pré-

préſentations? Ce ne ſeroient pas là de ces maſſes inutiles qui n'occupent un pié-d'eſtal que pour avertir les paſſans que tels étoient les traits d'un deſpote qui régna dans telle ville, & en opprima les habitans. Ce ſeroient des pierres éloquentes qui diroient avec énergie: „La „patrie honore qui la ſert; & le maître d'un Empire n'eſt rien pour el„le au prix du bienfaiteur d'une Ville ou d'une Province."

Mais, tandis que les images des perturbateurs du Monde ſont multipliées dans les galleries & ſous les portiques, le ſouvenir des bienfaits & des bienfaiteurs eſt ſouvent enfoui dans la pouſſiere des tombeaux, pêle-mêle avec les mânes de ces mortels indolens qui, engourdis par la nonchalance, n'ont fait dans ce monde ni bien ni mal, & vouloient pourtant qu'on leur tînt compte, comme d'un rare mérite, de s'être abſtenus des forfaits dont leur puſillanimité les rendoit incapables. (*)

Voyez Acaque: ſes yeux ſans mobilité, ſans jeu, vous annoncent une ame létargique, que rien n'affecte, que rien ne pique. Il ne voit les objets qu'autant qu'ils paſſent devant lui: ſa prunelle pareſſeuſe ne ſe dérourneroit pas pour le plus intéreſſant des ſpectacles; ſon exiſtence n'eſt que paſſive. Des ris, des pleurs, un deuil, une fête, une farce, une ſcene de carnage, tout cela n'eſt pour lui qu'un tableau changeant, qu'il regarde d'un air ſtupide, ſans en être ni égayé, ni ému, ni attendri. On lui fait une impoliteſſe, un outrage, une injuſtice: il laiſſe faire, on ne diroit pas qu'il s'en ſoit apperçû. Il ne ſentira pas d'avantage ſi vous l'obligez, ſi vous lui ſauvez une perte, un affront; ſi vous prenez ſa défenſe, ſi vous l'arrachez à la mort. Quoique ſon voiſin, ſon ami, ſon compatriote, ou même ſon parent, ſoyez dans la miſere, dans la ſouffrance, ou près d'expirer: c'eſt

(*) La puſillanimité ne mene à rien de grand, même du côté du vice: pour les grands crimes, comme pour les grandes vertus, il faut des ames fortes. Je n'ai jamais lu l'hiſtoire d'un Brigand illuſtre ſans regretter qu'on n'en ait pas fait un héros, bien perſuadé qu'on l'auroit pû: il n'y a que les ames foibles dont on ne fait rien de decidé.

c'eſt votre affaire: Acaque n'en eſt point remué, & ne vous préſentera pas un verre d'eau. Mais auſſi vous pouvez compter que, quelque prétexte, quelques motifs, qu'il pût avoir pour vous nuire, il n'en fera rien: c'eſt un frélon engourdi, qui n'a ni la force ni la volonté de pouſſer ſon aiguillon.

Les hommes timides (*) ont quelque affinité avec les indolens: ils valent pourtant mieux, ils ſentent; & quand leurs ſenſations ſont agréa-

(*) Les hommes timides ſont de bonnes gens, mais qui ont leurs défauts comme d'autres. Craignant toujours de déplaire, ils s'appliquent à ſe faire aimer, & ils y parviennent. mais ils ne réuſſiſſent pas à amuſer; & c'eſt pour ſuppléer à ce qui leur manque de ce côté-là, qu'ils ſont officieux & prévenans. Ils tiennent exactement leur promeſſe, parce qu'ils frémiſſent de la ſeule idée de l'affront à quoi ils s'expoſeroient en y manquant. Ils ſont conſtans en amitié, parce qu'ils ne ſe ſentent pas aſſez d'intrépidité pour ſupporter les reproches d'un ami offenſé. Ils le ſont auſſi en amour, parce que les ſoins que demande la conquête d'une belle leur ont trop couté pourqu'ils veuillent ſe mettre dans le cas d'en rendre encore; ou, s'ils changent quelquefois, c'eſt qu'ils ſe ſont adonnés à des amours faciles. Voila pourquoi Timante a aimé tour à tour les trois ſœurs: la premiere l'avoit miſe en familiarité avec les deux autres. Une femme reſpectable leur impoſe, ils ne ſavent par où s'y prendre pour debuter avec elle. Ils parlent peu & narrent briévement, parce qu'ils ont toujours peur, en parlant, de peſer à qui les écoute. Quelquefois ils raillent, mais d'une maniere enveloppée, parce que leur haine pour l'éclat les oblige à des menagements. Il eſt une ſorte de vanité dont la timidité peut être la cauſe: l'homme timide, qui ſe méfie de ſoi, & qui n'a pas, pour ſe faire goûter, les manieres aiſées des gens du grand monde, aime naturellement à tirer parti de ſes talens, pour ſe faire conſidérer. Il eſt plus fier qu'un autre, & plus délicat ſur les procédés, parce qu'il croit toujours, quand on lui manque ſur cet article, qu'on le mépriſe ou qu'on le dédaigne. L'homme avantageux eſt moins vetillard & ſoutiendroit mieux les humiliations, par le cas qu'il fait de lui-même; il s'imagineroit qu'on s'eſt mépris, & retourneroit à la charge: il ne lui vient pas dans l'eſprit qu'on puiſſe ne le pas eſtimer. L'homme timide au contraire eſt terraſſé du premier coup. Je ſuis fâché pour les inſolens, qu'il y ait des hommes timides: leur impudence s'en accroît de moitié; le lâche qui rampe à leurs piés les gâte moins, parce qu'à coup ſûr ils le mépriſent: au lieu qu'un homme timide peut être tel qu'il y ait beaucoup d'honneur pour un homme vain à le dominer. Les hommes de ce caractere ſont plus recueillis & plus appliqués que d'autres, parce qu'ils haïſſent le grand monde. Comme ils ne ſauroient ſe réſoudre à briguer des charges ou des emplois,

agréables, ils en donnent des ſignes; ils ſont tendres, affectueux & reconnoiſſans. D'autre part ils ſont ſenſibles aux injures, & s'en ſouviennent éternellement: mais il eſt rare qu'ils en tirent vengeance. Ils haïſſent l'éclat, les ruptures ouvertes. Si quelqu'un, à force de mauvais procédés, a excédé leur patience, ils s'en éloignent petit à petit, ſans avoir fait préalablement ni reproches, ni plaintes: ils éludent les explications, elles pourroient amener ce qu'on appelle une ſcene, & les gens timides déteſtent les ſcenes. Voilà encore une ſorte d'hommes qui ne font pas grand mal dans le monde, ils n'y nuiſent à perſonne: ils ſont trop contens quand on les laiſſe en paix. Je conviens que ce caractere pacifique ne les empêche pas d'être bienfaiſans: & voilà en quoi la timidité pourroit être préférable à l'indolence; pourvu qu'elle ne l'ait pas pour adjointe.

Il y

plois, par la crainte d'être éconduits, ils n'en obtiennent pas. Dans la route de la fortune tout les rebute, tout leur fait obſtacle ou ombrage. Ils n'emporteront jamais rien tant qu'ils auront des concurrens Ils s'inclinent devant leurs rivaux, & les laiſſent paſſer devant eux. Les ſeules voies que je leur ſache pour s'illuſtrer, (car pour s'enrichir il n'en eſt aucune qui leur ſoit ouverte,) ce ſont les arts, les ſciences ou les armes: la timidité ne les empêchera pas d'imaginer une machine utile, de faire un bon Livre, un beau Poëme, ou d'affronter l'ennemi: elle n'exclut ni le génie ni la bravoure. Quant au bel-eſprit, c'eſt un don perdu pour l'homme timide. Ses productions peuvent plaire: mais dès qu'on en voit l'auteur, on ſe dit: n'eſt-ce que cela? L'ouvrage fait fortune: mais le faiſeur n'en eſt gueres mieux accueilli: un ſot avec un peu d'aſſurance l'éclipſe ou l'écraſe. Les timides feront, plus que d'autres, de ces fautes que la complaiſance arrache, parce qu'ils n'auront pas le courage de réſiſter à quelqu'un qui aura pris de l'aſcendant ſur eux; & le premier venu en peut prendre: mais il ne feront pas une méchante action par complaiſance, parce qu'elle leur coûteroit des remords. Tout homme timide eſt taillé pour être honnête homme. Il ne dira jamais à quelqu'un: „ Je ne veux point „ faire cela:" mais, ſi ce qu'on lui propoſe, lui repugne, il ne le fera pourtant pas, dût-il y perdre ſa fortune. Il tient moins tête qu'un autre: mais il n'eſt pas plus ſouple. Dans tout ce qui regarde les agremens de la figure & du maintien, il eſt gauche & contraint. Il a un avantage dont il peut tirer grand parti dans les affaires, c'eſt de paroître auſſi niais qu'il veut, ſans effort.

Il y a certaines aſſociations d'hommes dans le monde, (ou pour mieux dire, hors du monde; car ceux qui les compoſent ne tiennent plus à la Société par aucuns liens,) qui affectent d'être vétus comme perſonne ne l'eſt, de porter les poils que nous raſons, ou de raſer ceux que nous portons, qui jurent à Dieu de n'avoir en propre ni volonté, ni femmes, ni argent, & tiennent leur promeſſe comme ils peuvent. Ils mangent, ils boivent, ils occupent des bâtimens vaſtes: mais ils ne font aucun travail qui les autoriſe à conſumer; car ils ne cultivent par état, ni terres, ni ſciences, ni arts, ni métiers. Ils ont beau ſe faire un mérite de leur éloignement du monde: la droite raiſon leur en fait un reproche. Plus ils ſe tiennent à diſtance, moins ils ſe trouvent à portée d'être utiles à leurs ſemblables. Il eſt vrai que dans leur retraite quelques uns prient, jeûnent & ſe flagellent. Mais je n'ai lu ni dans *Ciceron*, ni dans *Marc-Aurele*, ni dans *Epictete*, qui tous ont traité des devoirs moraux, ni dans *Séneque* même, qui a traité expreſſément des bienfaits, qu'il y ait quelque ombre de bienfaiſance à naſiller des pſeaumes latins, à ſe coucher l'eſtomac vuide, ou à ſe donner des coups de fouet: je ne l'ai pas même lû dans l'Evangile. On ne peut pas dire que ces hommes-là faſſent dans le monde autant de mal que des brigands, des empoiſonneurs, des ambitieux, ou des conquérans. Le ſeul reproche qu'on ait à leur faire, c'eſt que des trois cent ſoixante & cinq jours de l'année il n'y en a pas un où ils n'ayent à ſe dire le ſoir, *Diem perdidi*, voilà une journée de perdue.

J'étends les inductions de ce tableau à tous ceux qui ſe ſéqueſtrent. Il faut vivre parmi les hommes, en parcourir toutes les claſſes, & s'identifier avec eux, pour ſentir leurs beſoins, compatir à leurs peines, & remédier à leurs maux. Les élémens n'influent les uns ſur les autres qu'autant qu'ils roulent dens le même tourbillon. Trop de ſageſſe nous rend farouches. Sans perdre l'horreur pour les vices, il faut ſe familiariſer avec les défauts, les voir ſans colere, & les cenſurer ſans aigreur.

J'adreſſe

J'adreſſe ſinguliérement cette leçon à certains hommes, qui, par une ſorte de Philoſophie mal entendue, ſont plus que froids pour les autres, & que par eſtime pour eux je voudrois rappeller à la bienfaiſance, dont un excès de rigoriſme ou de dédain les éloigne. Ce ſont les Miſanthropes. Quoique je leur trouve des torts, j'avoue de bonne foi que j'en fais cas à certains égards. Ils aiment la droiture & l'ordre; & voilà pourquoi ils haïſſent ou prennent en dégout le genre humain, qui en effet, conſidéré collectivement, fait horreur. C'eſt le ſentiment qu'excite à chaque page la lecture des Hiſtoriens. L'Hiſtoire eſt un tableau révoltant de la dépravation de notre eſpece; & malheur à ceux qui la liſent ſans des redoublemens fréquents d'indignation! Les Miſanthropes ont le jugement auſſi ſain que d'autres: mais ils ont le caractere moins liant. Ils voyent dans les hommes des furieux qu'on doit éviter: il faudroit les voir comme des malades qu'on doit aſſiſter. Je l'ai dit plus haut: cette corruption qu'on leur reproche ne leur eſt qu'accidentelle: il faut les plaindre de ce que des influences funeſtes ont altéré dans leur ame l'heureux penchant que la Nature y avoit mis pour la vertu. En les enviſageant de cette maniere, on en ſera moins enclin à la miſanthropie. Il y a des conſéquences dangereuſes à croire les hommes méchants de leur propre fond. Ce préjugé ſombre peint tout ce qui nous environne en noir. La crainte, l'antipathie, les ſoupçons & la défiance, rangées, pour ainſi dire, de front entre nous & nos ſemblables, coupent la libre communication de nous à eux: le ſentiment eſt glacé dans ſa ſource; & les bons offices ne peuvent plus franchir la barriere que nos préventions ont élevée.

Les Illuminés & les Enthouſiaſtes ſont ſujets auſſi à n'aimer perſonne, & à n'obliger que rarement. On n'eſt pas digne de leur attention, ſi l'on n'a l'imagination exaltée au même degré qu'eux. Quiconque n'adopte pas leurs rêveries, eſt trop heureux s'ils veulent bien lui laiſſer partager l'air qu'ils reſpirent. (*)

(*) *Bayle* dit d'une Demoiſelle *Bourignon*, l'une des plus mauvaiſes têtes & des plus fanatiques qui ſe ſoient faites, qu'elle ne faiſoit point de charités, parce qu'elle

C'eſt ici le lieu d'enlever aux hommes violens une prétenſion injuſte qu'ils font trop valoir. Semblables à ce Loup qui vouloit que la Cigogne lui ſût gré de ce qu'il ne l'avoit pas étranglée tandis qu'elle lui tiroit un os du goſier, ils ſe croyent établis ſur la terre pour y faire tant de mal qu'ils voudront; & comptent pour des traits de bénignité, toutes les fureurs dont ils s'abſtiennent. Ils croyent vous avoir donné la vie en ne vous l'ôtant pas, & ſe perſuadent que vous leur êtes redevable de votre héritage quand ils veulent bien vous le laiſſer.

Le Tyran *Chriſtierne* avoit proſcrit dans ſes Etats cent Seigneurs illuſtres, préciſément par ce qu'ils étoient illuſtres, & qu'à ce titre ils lui faiſoient ombrage. *Epiphane* étoit ſur la liſte, il le raya. Eſt-ce que ce Tigre, l'opprobre & l'exécration de l'eſpece humaine, faiſoit une grace en commettant un meurtre de moins?

A propos de cette prétenſion des méchans, que je combats, il y a longtems que j'ai ſur le cœur une injuſtice qu'on réformera peut-être

qu'elle ne trouvoit pas de gens qui fuſſent dans une vraie pauvreté, & qu'elle craignoit qu'on n'abuſât de ce qu'elle donneroit. Elle diſoit elle-même: „que „les véritables pauvres ſont ſi rares, qu'il les faudroit aller chercher dans un „autre monde, & que les aſſiſtances qu'on leur faiſoit ne ſervoient qu'à les „mettre en commodité de pécher d'avantage; qu'ainſi celui qui a des revenus „annuels plus qu'il ne lui eſt néceſſaire, eſt obligé d'accroître ſon capital pour „attendre l'occaſion de l'employer pour la plus grande gloire de Dieu." Et ailleurs: „que comme les pauvres qu'on lui recommandoit vivoient en bêtes „qui n'auroient point d'ame à ſauver, & qu'ils abuſoient des biens de Dieu, „au lieu de lui en rendre graces; elle aimeroit mieux jetter dans la mer tous „ſes biens, qui étoient conſacrés à Dieu, que de leur en donner quoi que „ce ſoit."

Ceci me rappelle le propos d'une Dévote (dans *Gellert*, Conte V.) à une vieille mendiante qui s'adreſſe à elle. „Ma bonne," lui dit-elle, „je ne ſuis „pas faite pour nourrir tous ceux qui n'ont rien: les temps ſont durs. Et „puis, voulez-vous que je vous diſe, ſavez-vous pourquoi on tombe dans la „peine? C'eſt qu'on n'a point de dévotion, & qu'on ne prie pas Dieu; car „Dieu eſt un bon Pere, & ne laiſſe pas manquer ceux qui l'implorent. Re„gardez: me voyez-vous mendier, moi? Mais on ne s'adreſſe pas à Dieu „dans ſes beſoins; & Dieu n'eſt pas obligé d'aller au devant."

être un jour, quand des hommes maîtres de le faire en auront été frappés auſſi vivement que moi.

La noire calomnie va ſe poſter au pié d'un tribunal pour lancer ſes traits homicides contre un innocent. Sur la délation d'un téméraire ſycophante, que le rôle même qu'il fait rendoit indigne de toute créance, une troupe de ſatellites féroces eſt dépêchée au domicile de l'accuſé. Les pleurs de ſes enfans, les lamentations de ſon épouſe, la rumeur des voiſins indignés, n'arrête pas leur criante exécution; il eſt traîné ſans ſavoir pourquoi, à la vûe d'une vile populace, & jetté au fond d'un cachot. En attendant que ſon délit ſoit conſtaté, il y eſt traité avec plus de rigueur que ne devroit l'être un criminel convaincu. Il y reſte deux mois privé de la lumiere du jour, chargé de fers, vautré dans la fange, diſputant un pain dégoutant à de ſales inſectes, en proie lui-même à de plus ſales encore. Son Juge n'avoit pas eu juſques-là le loiſir de l'interroger; il étoit occupé à planter devant ſon château une longue avenue de tilleuls. L'avenue eſt plantée, le Magiſtrat revient; le voila ſur les fleurs de Lis: „Qu'on faſſe monter le „Priſonnier!“ Le Priſonnier monte, on l'interroge; & dans la ſuppoſition haſardée, qu'il ne peut être que coupable, on commence à l'outrager par des apoſtrophes inſultantes. S'il propoſe humblement quelques moyens de juſtification, on en ſoûrit dédaigneuſement, ou on lui impoſe ſilence. Si au contraire laiſſant voir cette noble aſſurance que donne à des cœurs honnêtes le témoignage d'une bonne conſcience, il oſe s'élever avec quelque force contre les imputations dont on le flétrit, ſa légitime défenſe eſt taxée d'audace & de rébellion. „Eſt-il „à ſuppoſer que ſon Rapporteur ſoit mal informé?“ On le renvoye avec mépris dans ſon cachot. „Qu'il aille y apprendre le reſpect „qu'on doit à un Juge.“ La leçon durera long tems, les lents procédés de la Juſtice, & ſes éternelles formalités, reculent de deux années le Jugement définitif. Trente témoins entendus, & quinze cens rôles d'écritures ont enfin débrouillé les faits; ils ſont favorables à l'accuſé; ſon innocence eſt portée à la plus claire évidence. „Mon ami, lui dit

„ſon Juge, la Cour vous décharge de l'accuſation: vous devez être „bien content d'en être ſorti auſſi heureuſement, toutes les apparen„ces étoient contre vous.

„Content! barbare, pourroit lui répondre l'innocent abſous, „après deux ans paſſés dans l'affreuſe obſcurité d'un cloaque infect, où „ma fortune & ma ſanté ont été ruinées ſans reſſource. Qui me ren„dra mon crédit perdu, mon honneur compromis, mon patrimoine „dévaſté? Qui me rendra le dernier fruit de mon hymen, dont les tran„ſes de mon épouſe ont cauſé la mort avant ſa naiſſance? Qui me la „rendra elle-même; ou qui lui rendra du moins cette conſtitution ſai„ne & robuſte, que ſes pleurs perpétuels ont altérée & preſque dé„truite? Qui dédommagera mes jeunes enfans des ſoins paternels dont „ma détention les a privés? Répare-t-on le temps perdu en ne le „perdant plus? Et, quand on le pourroit réparer, de quoi ſuis-je ca„pable en l'état où vous m'avez mis?"

Les choſes ont été quelquefois portées plus loin: des innocens ont ſouffert la torture,(*) & leur innocence avérée n'a produit d'autre effet que leur abſolution. Loin de ſonger à fermer leurs plaies par le baume adouciſſant des bienfaits, on a cru encore leur faire grace, en leur permettant de faire publier à leur frais le jugement qui les déchargeoit.

Quand l'arrêt définitif prononcé contre un accuſé l'envoye au ſupplice, il y a des fonds tout prêts pour fournir aux dépenſes de l'exé-

(*) Méthode odieuſe & barbare dont on connoît l'inſuffiſance & le vice; méthode qui ſemble, a-t-on dit depuis longtems, n'avoir été imaginée que pour ſauver des coupables & perdre des innocens; methode que tout homme humain abhorre, & que cependant tant d'Etats policés pratiquent. Aurons-nous toujours la manie de perpetuer des abus, reconnus pour tels? C'eſt bien aſſez que la coutume nous endormant ſur nos travers, nous empêche de les redreſſer: mais, quand à force de nous les entendre reprocher, nous ſommes venus juſqu'à en rougir, ne ſaurions-nous aller juſqu'à les abjurer?

l'exécution: ils tariſſent dès qu'il s'agit de faire ſatisfaction à un innocent maltraité. (*)

Je ne m'en prends point au Juge: il n'a pas le thréſor public à ſa diſpoſition: mais il eſt bien étrange qu'il ne ſoit jamais venu à l'eſprit de nos Législateurs, que, s'il eſt juſte de punir un accuſé convaincu, il ne l'eſt pas moins de réparer, autant qu'on le peut, le tort qu'on a fait à un innocent en le traitant comme coupable. Ils n'ont pas oublié les cas où la partie civile devroit des dédommagements. Pourquoi l'Etat n'en devra-t-il jamais? La patrie doit elle être plus dure à ſes enfans qu'il ne leur eſt permis de l'être les uns à l'égard des autres?

Je voudrois avant tout qu'on ne fît jamais un mal qu'on ne pourra pas réparer: mais ce mal une fois fait, au moins devroit-on y appliquer quelque adouciſſant. Un duelliſte, pour peu qu'il lui reſte d'humanité, fait panſer la plaie de l'ennemi qu'il a bleſſé. Un juge inique laiſſe ſa victime baignér dans le ſang.

Mal à propos m'objecteroit-on, qu'un citoyen n'a nul droit à des récompenſes pour n'être pas criminel: ce n'eſt pas non plus une récompenſe que je demande pour lui; c'eſt une juſte ſatisfaction que la ſimple équité exige pour la vexation qu'il a ſoufferte.

Quand j'aurois gagné ce premier point, quand on m'auroit accordé, que dans les procès où le miniſtere public eſt partie, ſi celui qu'il a attaqué prouve ſon innocence, les principes du droit naturel lui adjugent une indemnité; je pouſſerois mes prétenſions plus loin. Je voudrois même qu'un défendeur ou un accuſé dont la partie civile eſt inſolvable, eût auſſi l'Etat pour garant.

Et

(*) C'eſt fort bien fait que de doter des maiſons pour des pauvres, des orphelins, des vieillards, des bleſſés & des malades; mais ce ſeroit bien fait auſſi de conſacrer des fonds à réparer les injuſtices ou les bévues des Tribunaux; & il ne faudroit pas y employer des fonds médiocres.

Et qu'on ne me diſe pas que cette nouvelle police, qui n'eſt ſinguliere que parce qu'il eſt rare qu'on ſoit juſte, ſurchargeroit la caiſſe publique. Cette caiſſe n'eſt-elle donc pas ſans ceſſe alimentée par les amendes que payent les délits, par les taxes de toute eſpece dont les plaideurs ſont accablés, par des exactions ſans nombre que colorent des loix burſales. Quand cette partie des revenus publics ſeroit affectée à l'emploi que je lui aſſigne, il n'y auroit rien que de juſte. Elle ne devroit même l'être qu'à cet objet.

Les Athéniens condamnerent au fouet un jeune inſolent qui avoit mis en pieces le Tonneau de *Diogene:* mais ils firent plus; ils donnerent au Philoſophe un autre Tonneau: nos Gouvernemens modernes ne ſavent que fouetter.

Mais ne nous amuſons pas à nous plaindre de ce qu'aucune loi n'a pourvu à cette réparation indiſpenſable: au moins n'y en a-t-il pas qui nous empêche d'y ſuppléer. Uſons de cette licence avec empreſſement; faiſons oublier à l'homme vertueux, qu'il ait pu trouver des ennemis parmi nous, en effaçant par nos bons offices l'empreinte des maux qu'on lui a faits. Tous tant que nous ſommes, pris enſemble, nous formons la patrie; on n'aura donc plus à ſe plaindre d'elle ſi nous devenons tous bienfaiſans.

Il me reſte à établir que la ſeule envie d'obliger n'eſt pas un bienfait.

On comprend, ſans que je le diſe, que déſirer de faire une choſe n'eſt pas la faire. Il eſt bien vrai, par rapport aux bienfaits, que la volonté en eſt l'ame: mais il eſt vrai auſſi qu'il faut à cette ame un corps, c'eſt à dire, des effets réels; & que le vouloir ſans ces effets n'eſt tout au plus que de la bienveillance. Encore faut-il, pour que c'en ſoit effectivement, que ce vouloir ſoit quelque choſe de plus qu'une velléité. Les velléités dans l'ordre moral ne produiſent que des inconſéquences & des lueurs ſans feu.

Une

Une femme pauvre que ſon ſort malheureux, à la honte de l'humanité, réduit à des travaux rudes dont la nature bénigne vouloit que ſon ſexe fût exempt, porte ſur ſon dos courbé par l'âge un fardeau trois fois plus lourd qu'elle. L'inanition, la maladie, la décrépitude ajoutées au poids qui l'accable la font ſuccomber; ſes jambes vacillantes plient ſous le faix; elle tombe ſur le pavé, le viſage noyé dans la fange, où la tient abîmée la charge qui l'a ſuivie dans ſa chûte. Myrtadin, paré comme l'eſt un époux le jour de ſa nôce, a vû de vingt pas tomber cette femme; le lieu de la ſcene eſt ſur ſa route: il y arrive ſur la pointe des piés. Il parcourt des yeux les aſſiſtans pour voir s'il n'y en aura pas quelqu'un qui ſe mette en devoir de la relever; il leur crie: „Elle va étouffer, elle ne donne aucun ſigne de vie." Vous direz peut-être: „Eh bien, qu'il la releve." Son cœur le lui dit auſſi à voix baſſe; & il voudroit bien en croire ſon cœur. Mais prenez garde qu'il eſt vétu d'un velours ponceau, qu'un rien tache; qu'il porte des dentelles d'une fineſſe exquiſe, qui ne ſeroient pas réparables s'il s'y faiſoit le moindre accroc. Auriez-vous la dureté d'exiger qu'il courût ces risques-là? Je ſuppoſe que non: mais vous conviendrez que vouloir comme il veut n'eſt pas vouloir ſérieuſement.

Polyctémon, qui à la vue d'un malheureux qu'une faim urgente amene à ſes piés, fait cependant emplete de bijoux ou d'autres frivolités, n'a pu au fond ſe défendre d'un moment de ſenſibilité. Il voudroit bien que cet homme eût dequoi ſatisfaire à ſon beſoin. Je le crois qu'il le voudroit. Mais franchement eſt-ce le vouloir aſſez que de n'y pas pourvoir, lorſqu'il ne faut pour le faire que ſe priver d'une ſuperfluité enfantine, d'une dorure, d'une bague ou d'une porcelaine?

Un autre voudroit faire grace à un étourdi qui l'a offenſé par inconſidération. Il a le ſens aſſez droit pour ſavoir que l'eſprit de vengeance eſt une pure foibleſſe, & le cœur aſſez noble pour pardonner. Mais le qu'en-dira-t-on le retient: il craint qu'on ne le faſſe paſſer pour lâche. Celui-ci voudroit avertir ſon ami qu'on le trompe: mais

il craint le reſſentiment du trompeur. Celui-là voudroit défendre un innocent qu'on opprime: mais les oppreſſeurs dont il traverſeroit le projet inique, ſont vindicatifs & puiſſans.

Si avec ces demi-vouloirs on pouvoit être réputé bienfaiſant, qui eſt-ce qui ne le ſeroit pas? Preſque tous les hommes ont de ces premiers mouvemens d'humanité. La Nature leur avoit donné à tous des ſenſations vives, d'attendriſſement ou de pitié, à la vûe des êtres ſouffrants. Mais, dans la plûpart, l'orgueuil de la naiſſance, l'eſprit des camps, le luxe des Cours & des Villes, ou l'intérêt perſonnel, en ont émouſſé la pointe, ſans pourtant les éteindre entierement; comme des calloſités ſurvenues aux mains par la goutte ou par les travaux, alterent dans ces parties l'énergie du tact, ſans l'y détruire.

Les cœurs durs ne ſont pas des cœurs qui n'éprouvent aucune émotion de ſenſibilité: à peine y en a-t-il de cette eſpece: ce ſont ſeulement ceux qui en ſentent, & qui y réſiſtent; & de ceux-ci il y en a un très grand nombre. Et ne croyez pas qu'il leur en coûte pour réſiſter: ils ſe ſont ſi bien accoutumés à tenir ferme contre la peine d'autrui, qu'ils le font ſans effort & avec un ſuccès aſſuré. Le doux plaiſir d'obliger, cet aiguillon des ames généreuſes, ne fait plus que gliſſer ſur eux; ils reſſemblent à ces nourrices mercenaires pour qui les cris des enfans ne ſont que du bruit, qui n'a pas la vertu d'exciter leur attention ni leurs ſoins.

La bienfaiſance eſt au cœur humain ce qu'eſt aux fruits les plus exquis un certain velouté qui les couvre; un ſigne qui annonce leur excellence; & qui répond de leur délicateſſe. Mais ce léger duvet ne tient à rien: un ſouffle l'emporte. De même, pour enlever à l'homme ſa bienfaiſance, il ne lui faut pas la barbarie des Cannibales, la férocité des Corſaires, ou la dureté des Traitans: l'eſprit de frivolité ſeul peut l'éteindre.

J'ai vû naître & croître ſous mes yeux le fils de l'illuſtre Diaſême, connu dans toute l'Europe par ſes grands talens. Diaſeme a fait pour

pour l'éducation de ſon fils ce que ne fait pas un pere ſur cent mille: il l'a commencé dès le berceau; il l'a lui-même inſtruit dans les Lettres & dans les Sciences; il s'eſt ſurtout appliqué à lui former le cœur par ſes leçons & par ſes exemples. Quoique borné à un revenu modique, il l'a entretenu à grands frais dans une Univerſité célebre Il ne lui a pas épargné les maîtres pour les talens agréables: la danſe, l'eſcrime, l'équitation, le chant, les inſtrumens, le deſſein, que ſai-je encore? rien ne lui a manqué. Qu'ont produit tous ces ſoins? du vent. Le jeune homme qui s'eſt ſuppoſé tous les agrémens & toutes les graces réunies, s'eſt imaginé qu'il ne lui manquoit rien pour plaire, & que plaire étoit la ſouveraine perfection. Il en a pris de la ſuffiſance, des tons faſtueux, des airs hautains, des ſimagrées de petit-maître: la fatuité a éteint en lui toutes les tendreſſes naturelles, le reſpect filial, l'amour fraternel. „Son pere comparé à lui ſavoit à peine ſe préſen„ter. Quels gens mauſſades que ces gens de cabinet: ils ne ſont bons „qu'à débiter froidement des ſentences, des apophthegmes & des „leçons. Ses ſœurs n'étoient que des ſottes & des ridicules, qui ſe „familiariſoient avec lui comme avec leur égal, & qui ne ſentoient pas „l'honneur qui leur revenoit d'avoir pour frere un auſſi joli hom„me que lui." Il ne daignoit pas leur adreſſer la parole, & repouſſoit leurs innocentes careſſes avec un dédain outrageant. Vous concevez que ſa mere ne faiſoit pas auprès de lui un rôle fort impoſant: une femme qui étoit toujours de ſix mois en arriere des modes nouvelles, qui ne mettoit ni rouge, ni mouches, & faiſoit dix fautes d'orthographe dans un billet de vingt cinq lignes Le reſpectable pere vient de fermer les yeux pour toujours, ne laiſſant pour ſoutenir ſon nom, ſa veuve & trois filles encore impuberes, que ce fils unique, l'objet éternel de ſes attentions & de ſes eſpérances. Eſpérances vaines! Tout eſt fini par cette mort. Le jeune Diaſeme va traîner indécemment dans l'obſcurité ce nom qu'avoit illuſtré ſon pere; ſa mere languira dans l'indigence, & ſes ſœurs dans le célibat. Il s'eſt durci le cœur par l'orgueuil: l'infortune de ſes proches, au lieu de le porter à la bienfaiſance, ne fera qu'exciter ſes mépris; il rougira d'avoir une

mere & des ſœurs pauvres; il ira juſqu'à les éviter, peut-être même juſqu'à les méconnoître.

Ces hommes tarés qu'une longue habitude a rendu conſtamment inſenſibles, n'ont plus qu'un pas à faire pour être cruels; & ſi l'intérêt de leur paſſion l'exige, ils le feront. Il n'y a pas loin entre ne faire du bien à perſonne, & faire du mal à quelqu'un. La dureté & la férocité ſe touchent. Une paſſion forte peut entraîner au mal même une belle ame (*), en l'étourdiſſant: mais combien l'y portera-t-elle encore plus ſurement ſi elle la trouve dégradée par la froideur! Qu'elle excite dans cette pâte déjà aigrie un degré de fermentation de plus: elle en fera bientôt un poiſon funeſte à la Société. Quand le crime ſe préſente pour entrer dans le cœur d'un homme, d'abord il lui regarde au front, pour voir s'il y porte encore l'image de la divinité, dont le caractere diſtinctif eſt la bienfaiſance. S'il l'y trouve empreinte, il travaille à l'effacer, mais ordinairement ſans ſuccès: au lieu que, s'il n'a pas cet obſtacle à vaincre, ſa conquête eſt ſûre, il entre d'emblée.

L'amour, qu'on dit être la paſſion des grands hommes, eſt peut-être celle qui a fait commettre le plus de forfaits, & occaſionné de plus grands déſordres. C'eſt elle qui fait remplacer journellement des meres tendres & bienfaiſantes que la mort a enlevées, par des marâtres artificieuſes dont les ſuggeſtions aveuglent les peres les plus clairvoyants, les aigriſſent contre leur propre ſang, & leur font regarder comme des tiges étrangeres, quelquefois même comme des aſpics dangereux, les fruits de leurs premieres affections. Ces mêmes peres, durs & injuſtes par foibleſſe, à l'égard de leurs propres enfans, ſeront ſouvent pour tous les autres, humains, juſtes & compatiſſans. Il falloit l'amour, la plus douce des paſſions dans ſa naiſſance, pour faire germer dans leur ame les haines les plus révoltantes.

A ce

(*) Barneweld, aſſaſſin d'un oncle dont il étoit tendrement chéri, nous eſt repréſenté dans le drame dont on l'a fait l'acteur principal, comme un homme de bien, qui n'a été porté à cet excès d'horreur que par ſon foible pour une méchante femme.

A ce tableau dont les originaux ſont malheureuſement trop multipliés, ſubſtituez celui du jeune Alexandre, ou de quelqu'un de ces héros modernes que ſon exemple a fait extravaguer. Repréſentez-vous un enfant de quinze à dix huit ans, qui s'eſt déjà familiariſé avec les emportemens du deſpotiſme, les horreurs de la guerre, les fougues de l'ambition, la rage des conquêtes, qui ne voit dans ſes ſujets qu'une monnoie dont il diſpoſe à ſon gré pour l'exécution de ſes vûes; qui s'imagine qu'il ne coule du ſang dans leurs veines que pour arroſer les remparts ennemis, & cimenter ſes uſurpations: & vous ne ſerez point ſurpris, quand vous le verrez faire périr ſes meilleurs amis dans les tortures & dans les ſupplices, livrer le ſage Calliſthene à des bourreaux; & être lui-même celui de Clitus. Il avoit longtems d'avance déſappris la bienfaiſance; & en ſe donnant pour un Dieu, il avoit abjuré l'humanité.

Mais écartons ces triſtes images, qui ſont étrangeres à notre objet: nous parlons ici de la bienfaiſance comme de la premiere des vertus; que ces tigres deſtructeurs ne regardent que comme une foibleſſe. Pour rentrer dans notre ſujet, paſſons en revue une claſſe nombreuſe d'hommes qui ſe feroient un plaiſir d'obliger, mais qui ſe ſont mis hors d'état de le pouvoir, ſoit par le déſordre de leurs mœurs, ou par indifférence pour leur ſort.

Polyphage eſt du nombre des premiers: Officier dans un Corps diſtingué, il y ſervoit avec honneur. La Nature ne l'avoit créé ni dur, ni injuſte. Tant qu'ont duré ſa premiere jeuneſſe & ſa fortune, il étoit ce que les gens de plaiſir appellent bon compagnon; toujours prêt à ſervir ſes amis dans tous les cas & de toutes manieres, les ſcrupules ne l'arrêtoient pas. Indulgent pour lui-même, autant que complaiſant pour les autres, il ne ſe refuſoit rien, & n'étoit pas homme à ſe priver d'une fantaiſie. Aimant ſurtout avec paſſion ce qui ruine le plus infailliblement, le jeu, les belles, la bonne chere, il y conſuma d'avance pluſieurs années de ſes revenus, finit par fondre ſes capitaux, engagea ſa paye, donna des paroles & n'en tint aucune, trompa les uſuriers

mêmes, devint l'opprobre de ſon Corps, & en fut chaſſé. En cet état il ne lui reſtoit de reſſource que le manége & l'eſcroquerie : il s'y livra, & parcourut divers Etats en vrai Coſaque, mettant toutes les places à contribution ſur ſon paſſage, & vint échouer dans une ville royale où la police qui l'éclairoit, après dix mois de tolérance, arrêta le cours de ſes conquêtes par trop inconſidérées, en lui donnant un aſyle forcé & un geolier pour ſurveillant.

Ce Polygraphe diffamé par mille baſſeſſes, flétri par une indigence méritée, réduit à mendier de toutes parts des aliments, n'en a pas moins au fond les ſentimens officieux qu'il eut autrefois : mais ce qu'il n'a plus, c'eſt le pouvoir d'obliger ; & comme il ſe l'eſt ôté par ſes excès, il doit aux malheureux tous les ſervices qu'il eût pû leur rendre en ne le devenant pas lui-même.

D'autres n'ont à ſe reprocher que de n'avoir pas préféré, entre différentes poſitions parmi leſquelles ils étoient les maîtres de choiſir, celles qui les euſſent mis le plus à portée d'obliger ; ou les ayant choiſies, de ne les avoir pas conſervées.

Mettons parmi ces derniers Callophraſte, qui, né avec une ame ſenſible, droite & déſintéreſſée, un eſprit juſte, une judiciaire nette, avoit ajouté à ces dons naturels, l'étude des loix & de la juriſprudence des tribunaux. C'étoit le fléau de l'injuſtice, il la confondoit ; de l'oppreſſion, il la repouſſoit ; de la chicane, il la déconcertoit ; c'étoit (ſi les guerriers jaloux du titre de héros veulent le prêter pour un inſtant,) c'étoit le héros du Barreau. Que de bien il y pouvoit faire ! de quel ſervice il pouvoit être pour la défenſe du pupille & de la veuve, du pauvre & de l'homme ſans appui ! mais les excès de ſon intempérance, comme un feu dévorant qui met tout en cendre, tarirent la ſeve abondante dont la Nature l'avoit pourvu : au lieu d'une tige féconde en fruits, ce ne fut plus qu'un tronc ſec & mort. A quelque heure qu'un client voulût l'aborder, il buvoit ou avoit bu ; il étoit abſent ou couché ; & lorſque par une faveur ſinguliere du Ciel, on le trou-

trouvoit debout & chez lui, ſes idées étoient brouillées par les vapeurs fumeuſes du vin; ſon attention diſtraite par l'image de ſes plaiſirs paſſés ou prochains; & ſa préſence d'eſprit troublée par la multiplicité d'affaires dont il ſe ſentoit accablé. Ne pouvant pas ſuffire à toutes, il ſe donnoit aux plus preſſées; & les plus preſſées traînoient encore des années. Callophraſte, avec ſes talens; je dirai même avec ſon cœur, car il l'avoit bon, eût pu marquer tous les inſtans de ſa journée par des actes de bienfaiſance: il les a laiſſé perdre dans la nonchalance.

Il y a des milliers de gens qui ne ſe doutent pas qu'on eſt dans le monde pour y faire tout le bien dont on eſt capable; & ces gens-là, après avoir paſſé leur vie dans une ſuite continuelle d'inaction, d'amuſements, d'inutilités & d'excès, viennent vous dire froidement: au moins je n'ai fait tort qu'à moi-même. Qu'à vous-même? Vous avez fait tort à cent mille autres que vous euſſiez pu ſervir. On eſt coupable, non ſeulement pour le mal qu'on fait, mais auſſi par l'omiſſion du bien qu'on auroit pu faire.

Si un Chirurgien, en opérant ſur ſon patient, le bleſſe par impéritie, il eſt en faute: dès qu'il s'eſt préſenté à titre de maître, il ne devoit pas être novice. Il l'eſt même s'il manque la guériſon d'une plaie guériſſable. On eſt de même redevable dans tous les genres de tout le bien qu'on auroit pû faire ſi l'on eût acquis & cultivé des talens utiles.

On paſſe les trois quarts de ſa jeuneſſe à étudier les moyens de plaire: combien ſeroit-il plus important d'acquérir ceux d'obliger? On ſait des choſes qu'on pourroit ignorer. Ce qu'on appelle les amateurs par rapport aux arts, n'ont meublé leur tête de connoiſſances que pour leur propre amuſement. Bien des gens ne négligent point la ſcience d'apprêter un repas: on ne ſait, diſent-ils, où l'on ſe peut trouver, cela eſt toujours bon à ſavoir. Je le veux croire, mais j'aimerois au moins tout autant qu'on ſût ſoigner un malade, panſer une plaie, adminiſtrer un médicament, donner un conſeil.

Je

Je pardonnerois aux hommes que leurs talens rendent capables de faire leur fortune, de la négliger s'ils ne ſe privoient par là de la faculté d'obliger.

Le mal eſt que, quand on ſe fait à ſoi-même un plan de vie, on le regle ſeulement ſur ſes beſoins ou ſur ſes déſirs; & quand on eſt parvenu à ſe faire un état qui puiſſe y ſuffire, on croit avoir aſſez fait. Mais il falloit auſſi pourvoir au bien-être des autres; & ce prétendu ſuperflu contre lequel crient les Philoſophes avec quelque prétexte, je le réclame pour les hommes bienfaiſans, dans les mains desquels il change de nature & de nom: car ce qui s'employe à des uſages auſſi ſacrés que ceux de la bienfaiſance, qui ne perd rien en ſuperfluités, n'eſt plus véritablement un ſuperflu; c'eſt un thréſor utile, dont le dépoſitaire uſera généreuſement pour faire des milliers d'heureux.

Nul homme n'eſt fait pour être iſolé: il faut avoir une famille ou s'en faire une par adoption. Il ne faut pas même que celui qui en a une, ſe croye par là diſpenſé d'être utile au reſte du genre humain. Le mariage, cet état ſi ſupérieur par ſa dignité au célibat, en ſeroit un triſte & humiliant, s'il interdiſoit toute faculté de verſer des bienfaits au dehors de ſa ſphere étroite. Au contraire, ſi le célibataire doit ſe faire des enfans de tous les malheureux qu'il peut connoître, & les ſoulager par tous les moyens poſſibles: l'homme marié joint à ce devoir commun à tous les hommes, celui de former ſes enfans à la bienfaiſance par ſon exemple: c'eſt un bel héritage à leur laiſſer que le goût d'aider leurs ſemblables; il faut de bonne heure le fortifier dans leur ame. Qu'ils ayent dans cette vûe de l'avidité pour les richeſſes, de l'émulation pour les talens, de l'ambition pour les grands emplois: tous ces déſirs ſont ſanctifiés par le motif. Un indolent qui ne prétend à rien n'eſt bon à rien. Un homme qui prétend à tout pourra porter les ſecours & la vie dans toutes les ſpheres qui l'entoureront: mais il faut que ce ſoit là ſon objet principal, & qu'il y ſacrifie tous ſes goûts particuliers.

Le

Le Médecin Miſoërgue, par exemple, qui vient d'abjurer la pratique de ſon art, s'applaudit comme d'une haute proueſſe, d'avoir pû s'y déterminer. En effet ce ſacrifice lui a coûté : il avoit goûté le plaiſir de rendre des mourans à la vie & des malades à la ſanté. La belle fonction enviſagée par ce côté, que celle d'un Médecin ! Elle a obtenu les honneurs divins à Eſculape, & elle mérite à quiconque y excelle la plus haute conſidération. Qu'on me trouve une profeſſion qui puiſſe rendre aux hommes des ſervices auſſi importans. Quel peut donc être le motif de la retraite de Miſoërgue ? L'amour du repos ? Mais ce ſeroit une pareſſe criminelle. Puiſſe le Ciel pour le bonheur des hommes inſpirer cet amour du repos aux Princes avides de conquêtes, aux promoteurs d'édits burſaux, aux exacteurs d'impôts onereux, aux eſprits brouillons, aux têtes inquietes & turbulentes. Mais un Médecin qui, comme la Parque, tient dans ſa main le fil de nos jours, ou qui, plus puiſſant que la Parque, lorſqu'elle le coupe, peut le renouer : s'il s'abandonne à l'amour du repos, c'eſt un meurtrier qui égorge tous ceux qu'il pouvoit ſauver. Ne ſeroit-ce pas plutôt l'aiſance ? On dit que la mort d'un parent a quadruplé ſes revenus. Mais c'eſt une raiſon de plus à un Médecin pour pratiquer ; c'eſt un moyen d'aſſurer l'effet de ſes ordonnances. S'il ne falloit aux malades que des conſeils, un Médecin pauvre équivaudroit à un riche : mais ſes conſeils ſont coûteux, & leur exécution plus couteuſe encore ; il n'y a pas un malade ſur vingt qui puiſſe ſuffire à la dépenſe de l'un & de l'autre. Quel Dieu bienfaiſant ce ſeroit qu'un Médecin qui, traçant ſa recette la bourſe à la main, diroit à l'indigent que la fievre brule : Voilà un calmant qui éteindra le feu qui vous dévore, & voici de l'or qui ſoulagera l'indigence qui vous preſſe ; fievre & pauvreté, j'ai remede à tout. (*)

Mais

(*) Au reſte cette maniere d'exercer la Médecine n'eſt pas inouie : pour l'honneur de l'humanité il y a plus d'un exemple de millionnaires qui par préférence ont choiſi pour occupation l'art de guérir, préciſément parce que la fortune les mettoit à portée d'adminiſtrer des lénitifs pour l'indigence comme pour la maladie.

Mais croyons-en Miſoërgue ſur la raiſon de ſa retraite : c'eſt, dit-il, la manie des Lettres qui l'y a fait réſoudre ; les heures qu'il retranche aux malades, il entend les donner aux Muſes : il voudroit pouvoir réſiſter à l'attrait qui l'attache au cabinet, & continuer de voir des malades, mais le charme qui l'entraîne eſt trop puiſſant.

Eh quoi ! ces ſpéculations ſtériles, ſi intéreſſantes qu'on les ſuppoſe, ſont-elles une pâture ſuffiſante pour une ame qui a déjà goûté les délices de la bienfaiſance ? Tout le bel eſprit & des anciens & des modernes, toutes les merveilles des arts réunies enſemble, valent-elles une ſituation touchante qui affecte le cœur ? O Miſoërgue, le coeur eſt le ſeul ſiége des plaiſirs purs & durables. On n'eſt heureux que par les ſentiments : mais on l'eſt autant qu'on puiſſe l'être. Tout ce qui ne va pas au coeur n'eſt qu'amuſement & frivolité.

Un pere de famille étendu ſans force ſur un lit de douleur, qu'entourent une femme & des enfans allarmés ; une jeune épouſe qu'un accouchement laborieux va peut-être enlever à ſon époux qui l'adore ; un jeune adoleſcent qui commencoit à s'annoncer avantageuſement dans le monde, ſubitement atterré par une maladie aiguë, qui ne promet d'autre iſſue que la mort ; une fille aimable & nubile, atteinte d'une langueur mortelle qui la conſume lentement : voilà des objets qui font ſur toute ame ſenſible une vive impreſſion de douleur : mais ils deviennent des ſources de joie pour un Médecin qui par des remedes efficaces aura pû rendre les enfans au pere, l'épouſe à l'époux, le pere à ſa famille entiere. C'eſt-là préciſément ce qu'a fait Miſoërgue lorsqu'il pratiquoit : & que peut-il faire à préſent qui vaille ce qu'il faiſoit alors ?

Quiconque a embraſſé une profeſſion utile à ſes ſemblables, n'eſt diſpenſé de l'exercer qu'à condition d'en embraſſer une autre plus utile encore. Un bon Roi ne doit jamais abdiquer. Un Prélat charitable doit garder ſon ſiége : un Magiſtrat integre doit faire ſes fonctions. Quand le public eſt en poſſeſſion de ces Phénix, dont il ne jouit que rarement, il ne faut pas les lui enlever. On eſt trop heureux

reux quand on eſt placé de maniere à pouvoir faire du bien, c'eſt la plus belle ſituation. Celui qui n'en ſent pas le prix ſe rend juſtice en ſe dépoſant; celui qui le ſent doit prendre racine dans ſon poſte.

J'ai vu un Sage auprès du thrône: on eût dit qu'il ſortoit de lui des émanations communicatives, qui portoient à tous ſes entours l'élévation de ſon ame, la nobleſſe de ſes ſentimens, la multiplicité de ſes connoiſſances. Le Monarque, après s'être occupé pendant la journée avec ſes Miniſtres, ſes Généraux, ſes Chefs de juſtice, des grands objets du gouvernement, venoit ſe délaſſer dans le ſein de la Philoſophie. Le char brillant qu'il avoit conduit étoit dételé; lui même avoit dépoſé ſes rayons. Alors le Maître & le favori étoient à l'uniſſon. Du choc de leurs propos mutuels ſortoient mille ſaillies heureuſes, mille traits ingénieux; ainſi que le caillou & l'acier heurtés l'un contre l'autre jettent de toutes parts des étincelles éclatantes. C'étoit-là que ſans employer ni connoître les termes pédanteſques des Ecoles, on agitoit les queſtions intéreſſantes de la deſtination de l'homme, de ſes devoirs, de ſes facultés, des moyens de le diriger, de l'améliorer, de le rendre heureux. Les Lettres & les Arts étoient appellés à ces ſolides entretiens pour y répandre leurs agrémens, comme ſur les tables ſplendides les épices & les aromates rehauſſent la ſaveur des viandes par leurs délicieux parfums. Le Philoſophe ami des hommes ne manquoit pas ces précieux inſtans pour tourner l'attention du Maître ſur tous ceux de ſes ſujets, originaires ou adoptifs, qui ſe diſtinguoient par quelque talent, pour tempérer par des vûes de bienfaiſance, de clémence & d'humanité ce que l'héroïſme militaire auroit pû inſpirer à un Prince guerrier, de roideur & d'âpreté. Je ne veux pas diſcuter ici la fameuſe queſtion, ſi la culture des ſciences ou des arts corrompt ou ne corrompt pas les mœurs: mais j'aſſure qu'elle les adoucit. La grande ame du Prince, naturellement généreuſe, s'ouvroit d'elle-même à ces douces inſinuations. On ne ſauroit imaginer combien ces intéreſſans tête-à-tête ont occaſionné d'établiſſemens utiles, de traits de bonté, d'indulgence & de largeſſe; combien en un mot ils ont fait d'heureux.

Peut-être le Philoſophe que je peins eſt-il bien loin de le ſoupçonner: on ne ſait pas ſoi-même ce que devient en terre le grain qu'on y a jetté.

Eſt-il donc permis à ce Sage de s'écarter d'auprès du throne? Placez-le dans une retraite éloignée, il verra bien encore des néceſſités à ſatisfaire, des talens à encourager, des ſervices à récompenſer, des mérites à décorer: mais il ne verra plus la main qui verſoit les graces s'ouvrir à ſa premiere demande. Cependant ces médiations officieuſes auxquelles il s'immiſçoit journellement étoient devenues un beſoin pour lui: il vivoit, pour ainſi dire, de bienfaiſance, comme tant d'êtres dépendans vivent de bienfaits.

Je ſai qu'il eſt moins à plaindre qu'un autre, dans l'inutilité douloureuſe où je le ſuppoſe réduit: c'eſt un vétéran qui ſe repoſe ſur des lauriers que le tems ne flétrira point; mais enfin la ſoif d'obliger le tourmentera; & cette ſoif n'équivaut pas, quant à l'effet, à des ſervices réels.

J'ai toujours pitié d'un homme qui, par quelque accident que ce ſoit, perd le moyen de ſervir ſes ſemblables; ſon impuiſſance lui ravit des plaiſirs bien doux. Si c'eſt une force majeure qui l'a cauſée, je le plains de toute mon ame: mais, ſi elle procede de ſon fait, je le tiens pour inexcuſable; ce ſont des reproches & non pas de la compaſſion qu'il mérite.

MÉMOIRE

SUR CETTE QUESTION:

LE PEUPLE EST-IL JUGE COMPÉTENT DE L'ELOQUENCE? (*)

PAR Mr. BITAUBE'.

Le ſimple énoncé de cette queſtion paroîtra peut-être extraordinaire. D'un côté *Ciceron* & *Quintilien*, ces deux maîtres de l'art, ont décidé pour l'affirmative, & le Pere *Gisbert*, dont le Traité ſur l'éloquence de la chaire a beaucoup de mérite, va même juſqu'à dire que tout peuple, quelqu'ignorant qu'il ſoit, ne ſe trompe pas ſur ce qui regarde l'éloquence. De l'autre côté, le peuple, qui s'eſt conſtitué juge de tous les arts, n'exerce jamais cette fonction avec plus d'empire que lorſqu'il s'agit de l'art de parler; il décide, il prononce; arbitre ſouverain de la réputation, il regle les rangs. Se tromperoit-il dans des jugemens où il montre tant d'aſſurance? Examinons cependant ſi les aſſertions que j'ai alléguées en ſa faveur ſont inconteſtables, ou s'il faut y apporter des modifications.

Voyons d'abord juſqu'à quel point le peuple eſt juge compétent des beaux-arts en général.

On peut conſidérer les beaux-arts ſous deux points de vue: dans leur naiſſance, leurs beautés ſont rélatives; dans leur perfection, leurs beautés ſont intrinſéques. J'appelle beautés rélatives ces eſquiſſes groſſieres de l'art, préſentées à un peuple encor barbare; par exemple, les premiers traits de la peinture, les premiers ſons de la muſique, les

(*) Lû le 10. Novembre 1768.

premieres paroles cadencées; il pourra ſe rencontrer dans ces eſquiſſes quelques traces heureuſes de l'art, mais le plus ſouvent elles ſeront très informes, & je ne les ai appellées des beautés que parce qu'elles le paroiſſent à un peuple ignorant; elles lui paroiſſent même des prodiges, & peu s'en faut que l'art n'ait à rougir d'avoir été mieux accueilli dans ſon enfance que lorſqu'il eſt arrivé à ſa perfection.

Si nous conſultons l'hiſtoire, & que nous ſuivions le progrès des arts, nous trouverons par-tout que, lorſqu'ils ne font que naître, le peuple eſt, pour ainſi dire, paſſif dans les déciſions qu'il en porte: il ne perfectionne gueres, par ſes jugemens, les arts; ce ſont les arts qui perfectionnent ſes jugemens; il approuve preſque aveuglément ce qu'on lui préſente. La marche du génie eſt plus rapide que celle du goût; le génie commence à paroître, avant que le goût qui le juge ſoit né.

Mais n'eſt-ce pas le ſentiment qui apprécie les beaux-arts; & tous les hommes pris en gros, ne ſont-ils pas doués de ce ſentiment? Sans doute: mais les arts ſont enfans du luxe, & dans leur naiſſance, un peuple à demi-barbare n'eſt fortement occupé que de ſes beſoins; il ne jette qu'un coup d'œil fugitif ſur ces eſſais de l'art, & ils lui ſemblent des chef-d'œuvres. D'ailleurs le beau a pluſieurs degrés, & l'expérience montre que ſi nous n'avons pas éprouvé celui qui approche du terme de l'art, & que nous n'y ayons pas donné l'attention requiſe, nous prendrons pour ce terme un degré bien inférieur.

Le goût eſt ſans doute l'ouvrage de la nature, & tous les hommes en ſont plus ou moins doués: mais c'eſt auſſi l'ouvrage de l'art, en ce qu'il demande du loiſir pour être cultivé, & que l'exercice le perfectionne. Or qu'eſt-ce que cet exercice, ſinon le parallele continuel, & de l'art avec la nature, & des divers modeles du même art? Ce parallele n'a pas beſoin d'être réfléchi; la plus forte impreſſion que nous ayons reçue, devient, ſans que nous nous en appercevions, le modele qui juge les impreſſions du même genre. Lorſque Theſpis promena, dans la Grece, ſes acteurs barbouillés de lie, l'admiration fut univer-

univerſelle: mais, après que Sophocle eut perfectionné l'art, ſi Theſpis avoit reparu, il n'eût reçu que des huées.

Si le ſentiment brut, tel que nous l'a donné la nature, étoit ſeul juge des arts, on ne verroit pas de ſemblables contradictions; car ſans doute que, parmi le grand nombre de ceux qui applaudirent Theſpis, il y avoit des hommes bien organiſés; c'eſt donc ce ſentiment éguiſé par de longs paralleles, qui aquiert de la compétence dans ſes jugemens.

D'après ces principes il ſera facile d'établir juſqu'à quel point le peuple eſt juge éclairé des beaux-arts. Une nation barbare, ou qui n'eſt point encor dégagée de la barbarie, admirera le médiocre comme elle eût admiré l'excellent; ſi vous lui préſentez ce dernier, il fera probablement ſur elle des impreſſions plus profondes; quelquefois cependant, s'il y a trop de diſproportion entre ſes lumieres & l'art perfectionné, elle ſera foiblement frappée d'un chef-d'œuvre, & donnera la préférence à un ouvrage médiocre, ou l'approuvera également; mais ſi vous ne lui préſentez que celui-ci, elle ne ſoupçonnera rien au delà. La Sophonisbe de Mairet eût toujours paſſé pour un chef-d'œuvre, ſi Corneille & d'autres grands génies n'euſſent donné de beaux drames; on voit même, par le reſpect avec lequel Corneille en parle, qu'elle fut longtems en poſſeſſion de plaire. Ce n'eſt point le peuple qui s'eſt dégoûté *des Comédies de la Paſſion, & nous n'apprenons pas que les* théatres d'alors ayent été déſerts: mais les poëtes, en cherchant à ſe diſtinguer & en approfondiſſant l'art, ſe ſont ouverts une carriere plus heureuſe. Ce qui prouve qu'un peuple groſſier diſtingue foiblement le bon du mauvais, c'eſt que dans le tems où les myſteres de la religion ſervoient à la fois à édifier & à égayer le peuple, la Comédie de l'avocat Pathelin, digne de *Moliere*, ne produiſit point ſur les eſprits tout l'effet qu'elle devoit produire; on n'en courut pas moins aux Comédies de la Paſſion, & le peuple admira de mauvaiſes plaiſanteries, juſqu'à ce que Corneille en donnant le Menteur, & que Moliere en s'ouvrant ſur les pas de ce grand homme une nouvelle route, euſſent montré des

mo-

modeles du vrai comique. Quoique le Cid eût paru, la Mariamne du Triſtan continua d'être univerſellement accueillie, elle ſe ſoutint longtems ſur le théatre au milieu des chefs-d'œuvre de Corneille, & nous ſommes étonnés aujourd'hui que le public n'ait point ſenti la prodigieuſe diſtance qui ſe trouve entre ce drame & ceux de ce grand maître: Milton ne jouit point de ſa réputation, & ſon poëme immortel fut longtems enſéveli dans la pouſſiere. Les chants gracieux du Taſſe ne frapperent point ſes contemporains autant qu'ils nous frappent aujourd'hui.

Lorsque l'on dit qu'un grand-homme reçoit rarement, pendant ſa vie, le tribut d'eſtime qu'il mérite, ce n'eſt pas toujours l'envie qui le lui arrache; c'eſt que le génie devance le goût qui le juge; celui-ci ſe forme lentement, & quelquefois ne ſe trouve en état d'apprécier les productions d'un homme extraordinaire, que lorsqu'il n'eſt plus.

Bien loin que, dans la naiſſance des arts, le peuple les perfectionne par ſes jugemens, il en arrête ſouvent les progrès; pour lui plaire, les artiſtes ſont obligés, plus d'une fois, de pécher contre leurs propres lumieres. Son goût eſt l'ouvrage de l'habitude; ce qu'une fois il a admiré, il voudroit l'admirer toujours; il demeureroit donc dans une ſorte d'inertie, ſi les artiſtes ne l'en tiroient. Quelquefois il les égare en leur perſuadant que ce qu'il approuve eſt beau. Quelles précautions ne ſont-ils pas obligés de prendre ſouvent pour le ramener à la nature, qui, dit-on, ſe fait ſentir au premier abord du commun des hommes! Combien peu d'artiſtes qui ayent le courage, en heurtant le mauvais goût, d'en être les martirs! Corneille & Racine ſe ſont pliés à l'uſage qui demandoit au théatre françois des amours épiſodiques, & peut-être qu'une des principales cauſes du peu de ſuccès qu'eut d'abord Athalie, c'eſt qu'elle étoit exemte de ce défaut; celui qui l'avoit fait chérir aux François ne put les en guérir. M. de Voltaire fut encore contraint de mettre de l'amour dans Oedipe; il ne hazarda Mérope que lorſque le goût eut fait, à cet égard, plus de progrès, & même après qu'il eut réuſſi à bannir du théatre ces intrigues inuti-

inutiles, il a cru devoir ſe permettre quelquefois de les y ramener. La plupart des arts, en ſe perfectionnant, ont autant à craindre la critique du public que s'ils ſe détérioroient. Que d'obſtacles ne rencontra pas Rameau lorſqu'il voulut rendre la muſique de Lulli plus expreſſive & plus variée! S'il en avoit cru le peuple, elle reſtoit dans une éternelle enfance: les ſucceſſeurs de Rameau auroient à combattre les mêmes obſtacles, ſi l'Opéra comique ne préparoit la révolution; ce genre, heureuſement, ne paroit pas d'une aſſez grande conſéquence pour que l'on ait examiné s'il eſt conforme à l'ancien goût de la Muſique françoiſe, & qu'on ſe ſoit paſſionné contre ſon établiſſement; d'abord il ſe bornoit à de légers vaudevilles; par degrés il parle le langage des paſſions, & les obſtinés partiſans de Lulli s'y familiariſent, ſans le ſavoir, avec cette Muſique italienne qu'ils voudroient proſcrire du grand Opéra. Je pourrois montrer encore par beaucoup d'autres exemples, que ſouvent le peuple arrête le progrès des arts, bien loin d'y contribuer. Moliere eût moins donné dans le goût des farces ſi ce n'avoit été celui du peuple; c'eſt apparemment ſur ce genre de Comédies qu'il conſultoit ſa ſervante; on peut douter qu'il lui ait lû les belles ſcenes du Miſantrope & du Tartuffe.

Ce n'eſt que lorſque les arts ſont arrivés à leur perfection que le goût du peuple s'améliore, ſurtout ſi les circonſtances l'appellent à s'en occuper fréquemment; le luxe même qui les produit fait naître des perſonnes déſœuvrées, ou dont les occupations leur permettent d'y donner quelque attention. Comme les beaux-arts ont entr'eux une influence réciproque, ſi on les cultive tous, ils auront la même influence par rapport au goût; ils parviendront à le rendre plus ſûr & plus univerſel. Cependant, ſi l'on conſidere le petit nombre de ceux qui, dans une nation, peuvent donner aux arts une attention ſérieuſe, la légéreté avec laquelle la plupart s'en amuſent, l'indolence de l'un, la ſtupidité de l'autre, on verra que le peuple le mieux policé renferme très peu de connoiſſeurs en comparaiſon de ceux qui ne le ſont pas. Il éprouvera une impreſſion confuſe du beau, mais cela ne l'empêche-

ra pas de rejetter quelquefois l'excellent, ou de le confondre avec le médiocre. Le Miſantrope & Athalie furent froidement accueillis; la Phedre de Pradon balança d'abord celle de Racine. Dira-t-on que le peuple revient de ſes erreurs? A conſulter l'expérience, je crains beaucoup que, lorſqu'il change dans ſes goûts, il ne ſoit l'écho d'un petit nombre d'artiſtes & de juges éclairés. On diſtingue avec raiſon un public judicieux d'un public aveugle; le ſentiment du premier, dit-on, prévaut enfin: mais de quelles perſonnes eſt-il compoſé ſinon de celles qui ont fait une étude plus particuliere des arts dont elles jugent?

Une nation a déjà fait des progrès conſidérables lorſqu'elle ſait réformer ſes jugemens ſur ceux des connoiſſeurs. Plus elle eſt bornée, plus elle s'opiniâtre dans ſes déciſions: elle ne ſoupçonne point qu'on puiſſe aller au delà de ce qui a frappé ſes ſens; le petit nombre de connoiſſeurs qu'elle poſſede eſt trop timide pour l'éclairer, ou ſi quelques-uns d'entr'eux oſent faire entendre leur voix, elle ſe perd au milieu des acclamations d'un peuple ſtupide, ou en irritant ſon amour-propre, elle l'affermit dans ſes jugemens.

Le goût eſt ſans doute l'ouvrage de la nature; elle en donne les élémens dans la contexture de nos organes: mais l'expérience montre que s'il n'eſt mis en oeuvre & perfectionné par l'exercice, il peut ſe détériorer & s'anéantir. Ce ſont tellement les arts qui l'améliorent, que s'ils ſont dans l'enfance, ceux-mêmes qui les cultivent porteront de faux arrêts, & que dans toute une nation il n'y aura pas un ſeul juge éclairé. Les poëtes qui, dit-on, immolerent un bouc à Jodelle, comme au reſtaurateur de la Tragédie, prenoient, ainſi que le peuple, la beauté rélative pour la beauté intrinſeque; s'ils ne s'étoient fait cette illuſion, ils ſe fuſſent livrés à de moindres tranſports. Le goût, ſi rapide dans ſes déciſions, ſe perfectionne lentement; enfanté par le génie, il marche de loin à ſa ſuite; il faut qu'il en combine longtems les travaux pour que ſes jugemens ſoient certains. On a remarqué avec raiſon que ſi, dans notre ſiecle, le génie produit moins de chef-d'oeuvres, le goût a fait de grands progrès; on diſcute, on analyſe les anciens & les modernes;

nes; bientôt le vain fantôme de l'autorité ſera abattu. Toute l'Europe ne participe point à cette lumiere, & il eſt ſans doute des pays où le goût eſt encore à naître.

Les jugemens de ce tribunal qui ſemble formé de connoiſſeurs, c'eſt à dire, de ceux qui cultivent le même art, ou qui en font une étude particuliere, ces jugemens, dis-je, ne ſeront pas toujours infaillibles; quelquefois même, quoique rarement, le peuple, que n'égare aucune paſſion, portera des jugemens plus ſûrs que les leurs: ainſi le Cid, condamné par les rivaux de Corneille, & Polyeucte que vouloit proſcrire l'hôtel de Rambouiller, reçurent l'approbation publique: mais l'expérience prouve que les ſuffrages ni du peuple ni de ceux qui paſſent pour connoiſſeurs, ne ſuffiſent pour établir qu'un ouvrage a une beauté intrinſeque & durable. Si cette nation a longtems exercé ſon goût, & que tous les beaux-arts ſoient cultivés au milieu d'elle, il ſera probable qu'elle ne ſe trompe pas: néanmoins elle ne réglera point avec beaucoup de préciſion les divers degrés de mérite entre pluſieurs ouvrages & pluſieurs artiſtes.

Mais comme, avant qu'elle ſoit arrivée même à ce foible point de juſteſſe, elle a donné fréquemment dans l'erreur, en prenant la beauté rélative pour la beauté intrinſeque, il faut encore que les productions qui naiſſent dans ſon ſein, comparoiſſent devant un tribunal ſupérieur, qui eſt la poſtérité. Seule elle peut décider en dernier reſſort ſi ces productions ont des beautés durables. Si l'art fait de nouveaux progrès, ſes travaux précédens demeurent dans l'oubli; ſi, au contraire, on le cultive longtems ſans pouvoir les égaler, ils parviennent à ſervir de modeles & de regles conſtantes du beau. Voilà pourquoi les grands artiſtes ſont plus eſtimés après leur mort que durant leur vie: tant qu'ils ont vécu, ceux-mêmes qui les admiroient le plus, n'ont pas ſenti diſtinctement qu'ils avoient atteint le terme de l'art; la répuration de Quinault & de la Fontaine va toujours en augmentant parce qu'ils n'ont point eu d'égaux: celle, au contraire, de Lulli commence à décheoir. Comme les arts ſont faits pour les hommes, il n'y a que les ſuffrages d'une par-

tie conſidérable de la race humaine qui puiſſent décider s'ils ont ſatisfait à leur fin qui eſt de plaire; jusque-là ils ont plû à une ville, à un Etat: mais le tribunal de la poſtérité prononce ſur les arts & ſur ceux qui les ont jugés. Pluſieurs veulent que la multitude ſoit un juge infaillible; j'y conſens; mais qu'appelle-t-on la multitude? les habitans d'une ville, d'un empire? Ce n'eſt-là qu'un hameau en comparaiſon de l'Europe entiere & de la totalité du genre humain. Les arts ne ſe bornent pas à plaire à un cercle étroit d'admirateurs; ils ont pour juge l'univers; leurs ſuccès ne ſont certains qu'après qu'ils ont reçu des mains de la poſtérité le laurier qui ne flétrit point. Ce n'eſt pas ſeulement parce que la faveur & l'envie ne mettent plus d'obſtacles à la vérité; c'eſt parce qu'il faut qu'un très grand nombre de juges ayent prononcé, & qu'en combinant leurs déciſions, ils les ayent rectifiées les unes par les autres. On voit par-là combien il eſt difficile de bien juger des objets qui dépendent du goût, & combien on ſe trompe lorſque l'on croit cette qualité ſi commune.

Le jugement du plus grand nombre des connoiſſeurs de tous les pays, peut, juſqu'à un certain point, être regardé comme celui que prononcera la poſtérité. Il eſt à ſuppoſer que l'impartialité eſt le caractere de la plupart de ces connoiſſeurs. Leur approbation marque qu'un ouvrage renferme le plus de ces beautés qui ſont durables, qui doivent plaire à tous les hommes, & qui ne tiennent au goût national qu'autant qu'il peut piquer l'eſprit par l'attrait de la variété; car le goût purement national eſt, pour l'ordinaire, vicieux. Enfin, ce qui acheveroit de donner du poids au jugement de ces connoiſſeurs, ſeroit s'ils poſſédoient des ouvrages qui euſſent reçu l'approbation de la poſtérité, & auxquels ils puſſent comparer les productions nouvelles; leurs déciſions ſeroient alors, en quelque ſorte, celles de la poſtérité; plus on approcheroit de ces modeles, plus on auroit de beautés permanentes. Mais il faudroit encore que les arts euſſent été longtems cultivés, & que ceux qu'on appelle connoiſſeurs, ſe fuſſent formés le goût par un long exercice; ſans quoi ils ſe contenteroient du médiocre, bien qu'ils euſſent d'excellens modeles entre les mains, & ils ne ſeroient pas

en

en état de faire ce parallele. C'eſt ce qu'on vit à la renaiſſance des Lettres; les poſſeſſeurs des anciens admiroient les Jodelle, les Hardi & les Garnier.

Les ſuffrages de la poſtérité ſuffiſent-ils pour conſtater l'excellence d'un ouvrage? Tout ce qu'ils ſembleroient prouver, c'eſt qu'on n'eſt point allé au delà, & même ils ne fourniſſent pas toujours cette preuve; le goût rencontre de nouveaux obſtacles dans l'admiration qu'inſpire l'antiquité. Faiſons néanmoins ici une diſtinction importante. Les premieres générations qui ſuivent un ſiecle où les arts ont été cultivés, reſſemblent à ces vieillards qui, pleins du paſſé, en exagerent le mérite; l'habitude de l'admiration s'eſt tranſmiſe des peres aux fils & aux petits-fils; on regarde avec dédain ce qui eſt nouveau. Horace avoit à combattre cet enthouſiaſme, & il attaque avec les armes de la plaiſanterie cet amour aveugle de l'antiquité. Quoiqu'il ſe ſoit écoulé un long intervalle entre les anciens & nous, comme ils ont été preſqu'entierement ignorés dans tout cet eſpace, nous pouvons placer le ſiecle précédent parmi les premieres générations qui les ont ſuivis; la barbarie où l'on avoit été plongé, le bonheur de retrouver d'excellens modeles les firent admirer ſans reſtriction. Auſſi ſuis-je bien éloigné de regarder comme inutile ou nuiſible au goût la guerre ouverte qui leur fut déclarée par Fontenelle & la Motte; ils donnerent ſans doute dans l'excès comme les partiſans de la cauſe contraire: mais nous leur devons peut-être l'obligation d'être affranchis des chaines de l'autorité; aujourd'hui on ne ſe proſterne plus devant les défauts des anciens, & l'on n'admire que ce qu'ils ont de beau. Aux premieres générations qui ſuivent un ſiecle où l'on n'a pas négligé la culture des arts, on voit donc ſuccéder d'autres générations, dont les ſuffrages ſont moins dictés par l'enthouſiaſme, & où l'on découvre plus diſtinctement les divers degrés de l'art: ainſi Lucilius qui, du vivant d'Horace, étoit ſans doute placé, par le grand nombre, au deſſus de lui, a été enſuite dépoſſédé de ce rang: ainſi Phedre, à qui la Fontaine lui-même ſe croyoit fort inférieur, cede aujourd'hui la premiere place à ſon diſciple. Lors donc

que l'on dit que les ſuffrages de la poſtérité ſont néceſſaires pour décider avec préciſion du mérite, il s'agit d'une poſtérité fort reculée. Nous ſommes peut-être encore trop près du ſiecle de Louis XIV. pour en bien apprécier les auteurs: cependant la culture univerſelle des Lettres & le grand nombre de modeles que nous poſſédons, peuvent ſuppléer au tems qu'il faut pour bien juger les objets rélatifs au goût.

Mais n'eſt-il pas à craindre qu'une poſtérité plus reculée encore ne caſſe les arrêts des ſiecles qui l'ont précédée? Qui oſera marquer le terme où les arts doivent s'arrêter? Comme on a vu, dans tous les tems, qus c'étoient les grands modeles qui étendoient la ſphere du goût, qui nous aſſurera qu'elle ne puiſſe s'étendre encore? Chaque ſiecle a cru avoir atteint les limites des arts; plus même il étoit borné, plus il s'eſt fait cette illuſion. Dira-t-on que l'on a pour modele la nature, & qu'on peut juger ſi on l'a bien imitée? Cela eſt vrai: mais les ſiecles les plus barbares ont vu dans leurs productions informes la nature; & qui décidera qu'on ne puiſſe en repréſenter les traits avec plus de force & de vérité? On ne peut fonder là-deſſus que des conjectures; je haſarde les réflexions ſuivantes. Il y a une certaine proportion entre les facultés de l'homme & les arts; l'expérience de tous les ſiecles conſtate que, lorſqu'ils ont atteint un degré conſidérable de perfection, s'ils veulent aller beaucoup au delà, ils ſe détruiſent même par leurs efforts; en redoublant toujours les impreſſions qu'ils veulent exciter, ils parviennent à les rendre nulles; notre cœur & notre eſprit ont des bornes; en accumulant les idées & les ſentimens, on nous accable; l'art ſort des limites de la nature, ſemblable au conquérant, dont l'empire ſe démembre & ſe détruit parce qu'il a voulu tout envahir. En ſecond lieu, il eſt hors de doute que l'art peut ſe perfectionner dans quelqu'une de ſes parties; il peut acquérir plus de régularité: mais il s'agit de ſavoir ſi en même tems on égalera les beautés des grands maîtres; l'attention trop partagée entre les détails affoiblit le reſſort du génie; les connoiſſeurs préferent cette touche originale de l'art, & quelquefois même cette négligence, compagne du naturel,

à tous

à tous ſes efforts apprêtés. Ici l'expérience peut nous ſervir de flambeau. Les Lettres ont eſſuyé diverſes révolutions; elles ont été plus d'une fois tranſplantées; ſans doute elles ont acquis, dans pluſieurs de leurs branches, un nouveau degré de perfection: mais la poſtérité eſt bien loin d'avoir entierement démenti ſes propres ſuffrages; les premiers modeles qu'elle a conſtamment admirés, ſont encore en poſſeſſion de plaire. L'exemple de la guerre ſur les anciens & les modernes confirme ceci, bien loin de le détruire. Quoiqu'il ſe trouvât, parmi les ennemis de l'antiquité, des gens de mérite, le parti contraire étoit le mieux compoſé & le plus nombreux; je ne dis pas que les anciens ayent été le mieux défendus; cette cauſe eût pu trouver de meilleurs apologiſtes entre ceux qui garderent le ſilence: malgré cela les anciens ont triomphé par leur mérite; on leur pardonne de grands défauts en faveur de ces beautés originales & naïves, qui ſont le comble de l'art, & qu'il ſemble produire en ſe jouant.

Enfin en ſuppoſant même que la poſtérité pût, avec le cours des années, contredire ſes propres arrêts, on conviendra du moins que celui qui a remporté les ſuffrages de pluſieurs ſiecles eſt plus près du but, qui eſt de plaire, que celui qui n'a ſatisfait qu'une ville ou un cercle. Je ne jugerai pas toujours du mérite de deux artiſtes par la foule plus ou moins grande de leurs admirateurs dans une même ville: il eſt beaucoup de circonſtances qui peuvent égarer le jugement d'un ſi petit nombre d'hommes, & c'eſt ſouvent ici le cas de peſer les ſuffrages plutôt que de les compter: mais je ne croirai pas me tromper en jugeant du mérite de deux artiſtes par l'impreſſion qu'ils auront faite ſur l'Europe entiere & ſur la poſtérité.

Je ne ſais ſi j'ai réuſſi à répandre quelque jour ſur une matiere aſſés obſcure, & ſur laquelle on porte, plus d'une fois, des jugemens contradictoires: tantôt on établit le peuple pour arbitre des beaux-arts; tantôt on dit qu'il eſt aveugle, & on appelle de ſes déciſions à celles des connoiſſeurs. Cette incertitude même où l'on eſt à ſon égard ne ſemble-t-elle pas prouver l'invalidité de ſes arrêts? J'ai montré par

des

des exemples tirés de l'hiſtoire littéraire que le peuple admire le mauvais comme il admireroit le beau; que, dans l'enfance des arts, il eſt, tout au plus, juge de la beauté rélative; que ce ſont les arts qui, en ſe perfectionnant, étendent l'empire du goût; que ſouvent le peuple s'oppoſe à leurs progrès bien loin de les favoriſer; que lorsqu'ils ſont arrivés à leur perfection, quelquefois il approuve également le beau & le médiocre; & que, lors même que par un très long exercice il a pû améliorer ſon goût, il ne ſera pas capable de marquer avec préciſion les divers degrés de mérite entre pluſieurs artiſtes & pluſieurs ouvrages. D'ailleurs, lorsque ſon goût a atteint aſſés de perfection pour rejetter le médiocre & ne point le confondre avec le beau, c'eſt qu'il renferme dans ſon ſein un très grand nombre de connoiſſeurs qui ont fait une étude particuliere de l'art, & dont les jugemens l'entraînent; il eſt ſi dupe de lui-même que ſouvent il croit prononcer ſes propres arrêts, tandis qu'il ne fait que répéter ceux de ces connoiſſeurs.

Ces réflexions générales pourroient ſuffire; & il ne ſeroit pas néceſſaire d'examiner en détail la validité des jugemens du peuple par rapport à l'éloquence, ſi de grandes autorités ne l'en nommoient juge compétent, & ſi par ſon objet l'éloquence ne différoit des autres arts.

Elle doit ſa naiſſance au beſoin; elle y doit auſſi la rapidité de ſes progrès; une utilité préſente eſt le but qu'elle ſe propoſe. Si tous les hommes étoient raiſonnables, la ſimple expoſition du vrai ſeroit l'éloquence: mais, comme leur jugement eſt borné, qu'ils ſont quelquefois aveugles ſur leurs intérêts, & que même ils ſe ſoulevent contre la vérité, l'Orateur combat ces paſſions par d'autres paſſions; les obſtacles qu'il doit vaincre, l'enflamment; il raſſemble toutes ſes preuves; il leur donne l'ordre & la clarté dont elles ſont ſuſceptibles: mais ce n'eſt là qu'une partie de ſon art; comme il ſait que ſes auditeurs ſont ſenſibles, il ne leur préſente pas la vérité toute nue; il lui donne un corps qu'il anime; il la revêt d'images les plus propres à frapper l'eſprit, & à le rendre attentif; il parle à l'imagination; & ſi l'objet dont il s'occupe n'eſt point par lui-même aſſez important, il ſait l'agrandir; pour mieux ſéduire l'imagination, il employe les expreſſions & les tours les plus pittoreſ-

toreſques, les ſons & les cadences les plus convenables aux choſes dont il parle; il ne néglige pas en même tems de piquer l'eſprit par la richeſſe des tours, & de flatter l'oreille par l'harmonie & la variété des périodes; c'eſt dans leurs chûtes qu'il ſonge le plus à lui complaire: mais ſurtout il parle au cœur; il s'embraſe tour à tour de tous les ſentimens de la nature afin de les tranſmettre dans l'ame de ceux qui l'écoutent. Son action eſt dans une parfaite harmonie avec ſes penſées & ſes ſentimens.

L'Eloquence eſt donc un art, & en cette qualité, elle ne ſe perfectionne pas tout d'un coup; par-là même le peuple ſera ſujet à prendre le beauté rélative pour la beauté intrinſeque. Cependant, pour répandre plus de jour ſur cette matiere, partageons l'Eloquence en pluſieurs branches, ſuivant les divers objets dont elle s'occupe. Il y a l'Eloquence politique, celle du barreau, & celle de la chaire.

Les beaux-arts appellent à eux les hommes par l'attrait du plaiſir; pluſieurs n'ont pas le loiſir de céder à cet attrait, & la plûpart de ceux qui y cedent, n'y cherchent qu'un amuſement paſſager, & n'y donnent qu'une attention légere; il en eſt d'autres qui leur préferent les plaiſirs ſenſuels. L'Eloquence politique, qui s'occupe du Gouvernement, & dont les Démocraties ſont le berceau, attire à ſoi les hommes par le double attrait de l'intérêt & du plaiſir; par-là même elle y fait des progrès rapides, ſurtout lorſque les Démocraties ont aquis de la grandeur; car il faut de grands objets à l'Eloquence; & l'art en ſe perfectionnant répandra le goût.

Pour que l'orateur excite l'attention, il faut qu'il parle à un peuple qui ait un puiſſant intérêt à l'écouter, qui ne ſoit pas entierement novice ſur les matieres que l'on traite; il faut que ces matieres ſoient à ſa portée, & que par une habitude fréquente, il ait acquis l'étendue & la juſteſſe d'eſprit néceſſaires pour ſuivre & combiner une chaine de raiſonnemens, & que ſa ſenſibilité ſe ſoit exercée; enfin, il faut que l'é-

ducation lui ait fait connoître non-ſeulement les termes principaux de ſa langue, mais même qu'il puiſſe en ſaiſir les tours les plus délicats.

Or toutes ces conditions ſe ſont trouvées chez les peuples d'Athenes & de Rome. Appellés ſouvent à juger eux-mêmes des affaires, ils avoient intérêt de s'inſtruire. Dans une République, l'éloquence du barreau fait partie de l'éloquence que j'ai appellée politique, & tient à la conſtitution du gouvernement; c'eſt ſouvent le peuple qui juge; il y prend beaucoup d'intérêt: l'injuſtice n'y eſt jamais particuliere, elle heurte la nation en général, & les principes de la démocratie; pour peu qu'une cauſe ſoit importante, l'Etat entier y eſt intéreſſé, ou du moins un peuple jaloux d'être libre, ſe le perſuade aiſément. D'ailleurs on ſavoit ordinairement d'avance le ſujet que devoient traiter les orateurs: les loix donnoient à l'accuſé à peu près trente jours pour préparer ſa défenſe, & lorſqu'à Rome on en appelloit au peuple, les concluſions de l'accuſateur étoient affichées pendant trois jours de marché conſécutifs. On voit que le peuple pouvoit ſe mettre au fait de la cauſe. Mais, quand on n'eût pas pris ces précautions, l'amour de la liberté & le patriotiſme, vivant au fond des cœurs, rendoient la nation attentive à ſes moindres intérêts; ou ſi, comme dans les derniers jours d'Athenes, ces ſentimens furent affoiblis par le luxe & la corruption, ils ne furent pas d'abord totalement éteints, & ils ſe rallumoient à la voix de l'orateur. Les matieres que l'on traitoit dans les aſſemblées du peuple étoient donc à ſa portée, & ſa faculté de raiſonner & de ſentir n'étoit point émouſſée par l'inaction. Enfin l'on ſait avec quel ſoin les anciens étudioient & faiſoient étudier à leurs enfans leur langue maternelle; l'hiſtoire raconte à cet égard des choſes qui nous ſemblent incroyables; l'Atticiſme & l'Urbanité ſembloient deſcendre depuis les premiers perſonnages juſques dans les dernieres claſſes des citoyens; dans une République, l'éducation ne néglige rien pour égaliſer, autant qu'il ſe peut, tous les hommes. Si Cinéas entrant dans le Sénat, crut voir une aſſemblée de Rois, l'orateur, qui pour la premiere fois montoit, en préſence du peuple, dans la tribune,

ne, devoit ſentir glacer ſa langue à l'idée que, dans cette aſſemblée nombreuſe, il ſe trouvoit, ou peu s'en faut, autant de juges éclairés que de citoyens.

Je ne veux pas dire que, dans l'enfance de l'art, ces nations en euſſent été de bons juges; tout ce que j'avance c'eſt que l'art a fait au milieu d'elles des progrès rapides, & que l'attention & l'exercice ont fait du peuple un excellent connoiſſeur.

L'éloquence eſt un art; mais il ne doit point paroître: le poëte ne doit pas percer dans un drame; cependant, comme le plaiſir eſt ſon but principal, ou du moins qu'il ne ſe propoſe pas une utilité directe, l'art n'eſt pas circonſcrit dans des bornes fort étroites; celui qui les franchit en eſt d'autant plus coupable. Mais ce qui, toutes choſes d'ailleurs égales, fait de l'éloquence un des arts les plus difficiles, c'eſt qu'il faut tellement combiner l'art avec la nature qu'ils ſoient comme identifiés; on a dit avec raiſon que l'orateur le plus parfait eſt celui qui ſe fait oublier pour ne vous occuper que de la choſe dont il parle. On a diſtingué pluſieurs genres d'éloquence; le genre ſimple qui parle à la raiſon, le genre ſublime qui parle à l'imagination & au cœur; le genre tempéré tient le milieu; il y en a un quatrieme, qu'on a regardé avec fondement comme la dépravation de l'éloquence, c'eſt le genre ſpirituel. Voyons quel genre ſera le plus en honneur dans une République, & quels ſeront à cet égard les jugemens du peuple.

Plus l'objet dont on parle eſt important, plus le genre ſublime y eſt propre. Or dans une République il n'eſt point de matieres plus importantes que celles qui tiennent à la conſtitution du gouvernement; l'éloquence y fera donc de grands progrès; on cultivera le genre ſublime, & par l'intérêt que le peuple prend aux affaires, il ſentira bientôt ſi le feu de l'orateur y eſt proportionné. Comme l'éloquence y mene aux honneurs, on donnera à ſa culture les ſoins les plus opiniâtres; elle ſera la reine des arts & l'idole du peuple; Démoſthene s'enferme, comme dans un tombeau, pour n'être point diſtrait de cette

étude; Cicéron ne laiſſe point paſſer de journée ſans s'exercer dans cet art, & lorſque l'on croiroit qu'il y eſt un grand maître, il ne rougit point de redevenir écolier; il va dans Athenes, où fut le trône de l'Eloquence, en raſſembler les précieux débris, & ſe fortifier par les leçons des philoſophes. Cette ardeur, cet enthouſiaſme, porteront l'art à ſon plus haut période; & à meſure qu'il s'élevera, le peuple en deviendra juge plus compétent.

L'Eloquence y ſera ſaine, c'eſt à dire qu'elle ſera dans une juſte proportion avec les choſes dont on parle: les ſujets qui comportent le genre ſimple ſeront peu intéreſſans pour la multitude; l'orateur peut s'y livrer par intervalles, & ſouvent il le doit; mais, ſi le ſujet demande le genre ſublime, & que l'orateur demeure en deçà, il n'a point ſatisfait à l'art; il a parlé à la raiſon; il lui reſtoit de frapper l'imagination & le cœur: le peuple, ſurtout ſi l'art a fait des progrès au milieu de lui, ne décernera point à un foible orateur la palme de l'éloquence; il connoitra, du moins juſqu'à un certain point, l'importance des matieres, & il ſentira que l'orateur eſt reſté au deſſous. Quant au genre purement ſpirituel, on ſent qu'il ne peut être admis dans une République, ou du moins qu'il ne peut y avoir de grands ſuccès; ſi l'importance des ſujets ne l'exclut pas entierement, du moins ne permettra-t-elle point qu'il déprave l'éloquence; l'orateur & l'aſſemblée ſe montent inſenſiblement au ton des matieres que l'on traite; un peuple qui s'occupe lui-même de ſes intérêts, ne veut pas qu'on en faſſe un badinage d'eſprit. Hortenſius, dit-on, donnoit dans le genre ſpirituel: nous ne pouvons en parler que par conjectures; mais il y a tout lieu de croire que, ſi nous pouvions comparer ſes harangues avec les colifichets de pluſieurs orateurs modernes, l'éloquence d'Hortenſius nous ſembleroit grave.

Plus les circonſtances exigent, dans une République, que l'éloquence ſoit ſaine, plus le peuple ſera capable d'en bien juger.

Lorsque le gouvernement eſt près d'éprouver une révolution, la République eſt couverte de nuages; mais ce ſont les beaux jours de l'élo-

l'éloquence: c'eſt alors qu'elle s'occupe des objets les plus importans; elle s'arme de la foudre & la remet aux Démoſthene & aux Ciceron: ils tonnent: la terre eſt effrayée & les tirans même tremblent; c'eſt le dernier cri de la liberté; il eſt terrible. Mais, quand la révolution eſt faite, l'éloquence eſt enveloppée dans la ruine commune; comment pourroit-elle y ſurvivre, puiſqu'elle eſt redoutable, & qu'on lui impoſe ſilence? On lui interdit les grands objets, qui ſont les plus propres à l'enflammer; elle n'oſe plus s'occuper du gouvernement; on la renferme dans un cercle étroit; les orateurs qui faiſoient trembler la tirannie, tremblent eux-mêmes; que dis-je? ils la flattent; leur langue héſite & craint de bleſſer; leur coeur eſt refroidi; alors ce qu'ils perdent du côté des ſentimens & de la grandeur des images, ils veulent le remplacer par des jeux d'eſprit, par des penſées fines, par des images plus ingénieuſes qu'élevées, par des ſentimens plus doux que forts; Pline fait le panégyrique de Trajan.

L'éloquence, en ſe dépravant, corrompt le goût, & le peuple ceſſe d'en être un bon juge. Comment le ſeroit-il? il n'y apporte plus le même interêt, ni la même attention; il n'eſt plus l'arbitre des fortunes; il n'eſt plus au fait des matieres débattues; chacun lutte contre ſa propre miſere; la diſtinction entre le peuple & les grands devient toujours plus immenſe; le peuple s'abrutit; bientôt il eſt réduit à ignorer; il parle une autre langue que les grands, & même parmi ceux-ci la plupart ſont peuple. Alors les honneurs que recevoit l'éloquence ſeront prodigués à ſon fantôme; on conſacrera ſes défauts; ils paſſeront pour les ſuprêmes beautés de l'art. Il pourra ſe rencontrer quelques connoiſſeurs, qui comparant ces nouvelles productions aux grands modeles, en ſentiront la prodigieuſe différence: mais ces lumieres ne deſcendront point jusqu'au peuple; que lui importe que l'éloquence ſoit bien ou mal cultivée?

Lors donc que Cicéron a dit que le peuple eſt juge compétent de l'éloquence, il avoit ſans doute en vue Rome & le peuple auquel il parloit. Mais on peut s'étonner avec fondement que Quintilien ait

avancé la même aſſertion, puisque de ſon tems l'éloquence étoit déjà corrompue.

Dans la plûpart de nos conſtitutions modernes, l'éloquence du barreau n'étant point liée à l'éloquence politique, n'embraſſe plus de ſi grands objets, & ce n'eſt point le peuple qui prononce la ſentence: double intérêt qu'a perdu pour la multitude l'art de parler. La Juriſprudence eſt devenue une ſcience aride, & la plûpart entendent au barreau une langue étrangere; ces conſidérations ſont cauſe qu'on y apporte une attention moins vive & moins ſoutenue. Les ſoins que les anciens donnoient à l'étude de la langue maternelle, nous les tournons presque tout entiers à inſtruire les enfans dans des langues mortes, qui doivent être inutiles pour la plûpart d'entr'eux, dont ils ne retiennent que quelques mots qui leur ſemblent riſibles & barbares, & dont l'effet le plus certain eſt de leur inſpirer de l'horreur, même pour l'étude de leur propre langue. Si l'excès de la liberté fait quelquefois du peuple un animal féroce, de l'autre côté ſa raiſon plie ſous les entraves de la ſervitude, & ſa ſenſibilité en eſt émouſſée. En France, où l'éloquence du barreau n'eſt pas négligée, on plaide ſouvent à huis clos, & lors même qu'on admet des ſpectateurs, on ne ſauroit dire que l'on plaide en préſence du peuple; les ſalles ſont proportionnées au petit nombre de ceux qu'y attire la curioſité, & comme on n'y eſt pas conduit par un intérêt perſonel, la plupart des citoyens, pour entendre ces plaidoyers, n'abandonnent pas le ſoin de leurs propres affaires. Ils ne pourront donc point ſe former le goût, qui, comme nous l'avons vu, ne ſe perfectionne que par l'exercice. Si l'on peſe toutes ces circonſtances, & qu'on les compare à celles où ſe trouvoient les anciens, on verra que, dans nos conſtitutions modernes, le peuple n'eſt pas un juge fort éclairé de l'éloquence du barreau. Cependant la réunion des beaux-arts, dont l'influence eſt réciproque, la culture des Lettres, le théatre qui familiariſe avec tant de chef-d'oeuvres, & dont le moindre avantage eſt de favoriſer l'étude de la langue; toutes ces cauſes, ſuivant le degré de leur activité, pourront concourir à rendre le goût plus ou moins univerſel.

Nous

Nous avons vu que, dans une République, on cultivoit le genre ſublime de l'éloquence, parce qu'elle y embraſſe de grands objets; dans une Monarchie, l'éloquence du barreau s'écartera rarement du genre ſimple & tempéré; il y aura donc peu de grands modeles, & par conſéquent le peuple ſe contentera d'un degré inférieur. L'éloquence n'y eſſuyera pas de ces criſes violentes, où paroiſſant combattre à la fois & pour la deſtinée des empires, & pour la ſienne propre, puisqu'elle y eſt attachée, elle fait les derniers efforts, & s'éleve à toute la hauteur qu'elle peut atteindre. Au contraire, comme il eſt rare que l'orateur puiſſe s'abandonner aux grands mouvemens, il voudra y ſuppléer quelquefois par la fineſſe des penſées, & par des tours où il y aura plus d'eſprit que de nerf; l'éloquence risquera donc plus aiſément de s'y dépraver, & plus elle tombera dans le genre ſpirituel, plus elle corrompra le goût national.

Mais le peuple eſt-il juge compétent de l'Eloquence de la Chaire, & le Pere Gisbert a-t-il, avec fondement, donné plus d'extenſion à la theſe de Cicéron & de Quintilien, en diſant que tout peuple, quelqu'ignorant qu'il ſoit, ne ſe trompe pas ſur ce qui regarde l'éloquence?

Nous avons poſé pour principe qu'il n'y a que l'intérêt qu'une nation prend à un art, & un long exercice du goût, qui puiſſent le faire juger ſainement de cet art & de ceux qui le cultivent. L'éloquence ſacrée ſembleroit devoir opérer tous ces effets. Eſt-il d'intérêt plus puiſſant & plus univerſel que celui dont elle s'occupe? Quel plus fréquent exercice du goût que celui qu'elle pourroit occaſionner? Examinons cependant ſi la réalité répond à l'apparence.

Je ne fais point ici une ſatire, ni ne m'érige moi-même en prédicateur: mais fondé ſur l'obſervation, je dis que les objets temporels & ſenſibles touchent plus le commun des hommes que les objets ſpirituels: je ſais qu'il eſt des perſonnes dont la dévotion eſt éclairée: mais c'eſt le plus petit nombre; la plupart ſont enthouſiaſtes ou froids.

Nous

Nous ne parlons pas ici des enthouſiaſtes; ils ne raiſonnent point, & il eſt facile de les émouvoir; le diſcours le plus inſenſé y réuſſira mieux que tout l'art de l'éloquence; ils compoſent cependant une partie aſſez conſidérable du peuple, & leurs ſuffrages entraînent quelquefois la multitude; voilà donc un bon nombre de juges dont on peut récuſer l'approbation. Quant à ceux qui ſont froids, un intérêt préſent, un fait palpable attire plus leur attention qu'un intérêt qui ſemble ſe perdre dans l'avenir, ou que des faits qui ſont comme engloutis dans le paſſé: les orateurs ſacrés ne ceſſent eux-mêmes de s'en plaindre. Auſſi l'éloquence de la chaire, conſidérée ſous ce point de vue, demande-t elle plus d'art que l'éloquence profane: & c'eſt peut-être une des raiſons pourquoi il eſt ſi rare de trouver des prédicateurs éloquens.

Dira-t-on que l'éloquence ſacrée s'occupe d'intérêts préſens lorſqu'elle nous fait ſentir les ſuites funeſtes du vice, même dès cette vie? Cela eſt vrai, & l'orateur nous frappe davantage lorſqu'il nous les retrace. Mais ces ſuites ne ſont pas des conſéquences inévitables; du moins la peine n'eſt-elle pas toujours immédiate, & telle eſt la ſtupidité humaine, qu'un mal perd beaucoup de ſa force lorſque nous pouvons le placer dans un tems vague & incertain. Quoi de plus ſûr, par exemple, que notre mort, & quel objet plus pathétique pour l'éloquence? Cependant il ne fait pas ſur le commun des hommes l'impreſſion qu'il devroit faire. Si la cataſtrophe d'un drame nous repréſentoit dans un avenir reculé la mort d'un héros qui nous intéreſſe, elle nous toucheroit peu; c'eſt parce qu'il eſt au bord du tombeau, & qu'il y eſt précipité à nos yeux, que nous ſommes ſaiſis de terreur, & que nous répandons des larmes. Choſe ſinguliere! l'idée de notre propre mort, parce que nous la plaçons dans l'éloignement, nous affecte ſouvent moins que le ſpectacle préſent de la mort d'un autre homme. Auſſi l'orateur ſacré, connoiſſant cette diſpoſition qui nous eſt naturelle, s'efforce-t-il à nous perſuader que notre trépas n'eſt point éloigné: pour nous frapper en nous parlant de cette cataſtrophe, il faut qu'il

qu'il anéantiſſe en quelque ſorte l'intervalle que nous mettons entr'elle & nous; il faut qu'il éclaire cet inſtant que nous aimons à couvrir des ténebres de l'incertitude, &, ſi je puis ainſi dire, qu'il nous faſſe entendre ſonner l'heure de notre mort: mais rarement ſon triomphe ſera complet; on diroit que l'illuſion qui nous la fait placer dans un avenir incertain & reculé, tient à notre être. Ce ſujet, le plus pathétique de l'éloquence de la chaire, peut nous faire juger de l'impreſſion qu'elle cauſe en traitant d'autres ſujets. Les obſtacles que rencontre l'éloquence peuvent ſervir d'éguillons qui l'animent, & lui faire déployer les plus grands mouvemens; mais il ne faut pas que ces obſtacles ſoient d'une nature preſque inſurmontable. Si l'orateur ſacré en prononçant le mot de *Religion* produiſoit des impreſſions auſſi vives qu'en produit l'orateur en prononçant le mot de *Patrie* dans une République, même prête à s'écrouler, l'éloquence profane n'auroit aucun avantage ſur l'éloquence ſacrée.

Je ne prétends pas que celle-ci n'excite aucun intérêt; on pourroit m'alléguer avec fondement les converſions qu'elle opere: mais on ſait que ces converſions ſont rares, & je ne parle ici que des impreſſions générales. On raconte, comme une eſpece de prodige, l'effet que produiſit le Sermon de Maſſillon ſur le petit nombre des élus; toute l'aſſemblée, dit-on, ſe leva, & l'émotion fut extreme: voilà un phénomene peut-être unique; cet orateur ſe plaint ſouvent lui-même de la nonchalance avec laquelle on écoute les ſermons. Dans l'éloquence de la chaire, le genre de l'oraiſon funebre excite, pour l'ordinaire, le plus d'intérêt; elle s'occupe de faits aſſez récens & d'une mort récente.

Quand les matieres que traite l'éloquence, intéreſſent vivement un peuple, elles ſont bientôt à ſa portée; chacun en fait le ſujet de ſes réflexions & de ſes entretiens; le mercenaire le plus occupé leur donne beaucoup d'attention; tels ſont les objets de la Politique & de la Juriſprudence dans un gouvernement démocratique ou qui panche vers la démocratie; l'éloquence y parle à la raiſon, parce qu'elle

trouve dans ceux qui écoutent, de l'attention & des lumieres. Mais un prédicateur ne trouve pas les mêmes diſpoſitions dans une aſſemblée chrétienne. Il eſt vrai qu'on s'efforce à inſtruire la jeuneſſe: mais la plûpart profitent peu de ces inſtructions, parce qu'il y a une diſproportion prodigieuſe entre la capacité d'un enfant & les points de la Théologie. Il n'y a que l'attrait du plaiſir ou de l'utilité qui puiſſe porter l'homme à une application ſérieuſe; or un enfant n'eſt gueres diſpoſé à ſentir vivement l'utilité de la religion; la plupart ne la ſentent que foiblement, même dans un âge plus avancé; les plaiſirs & les affaires les détournent de cette étude; de là il arrive que la plûpart apportent aux ſermons un eſprit incapable de ſuivre & de combiner les idées qu'on leur préſente, & que rarement un diſcours chrétien, quelque populaire qu'il ſoit, eſt, d'un bout à l'autre, à leur portée. Joignez à cela que la plûpart poſſedent mal leur langue; leurs idées ſont circonſcrites dans un petit nombre d'objets rélatifs à leurs travaux ou à leurs amuſemens: hors de cette ſphere il eſt quantité de termes qu'ils croyent comprendre, parce que le ſon en a ſouvent frappé leur oreille, mais auxquels ils n'attachent aucune idée diſtincte. Si cela arrive dans des villes où l'on prêche dans la langue maternelle du peuple, à plus forte raiſon cela doit-il arriver dans ces colonies, qui, éloignées de leur mere, oublient inſenſiblement leur langue, & la dépravent plus qu'ils ne la parlent. On ne ceſſe de dire qu'un prédicateur doit être populaire; le précepte eſt ſenſé: mais, ſi les objets dont il parle ſont, par leur nature & par les circonſtances, au deſſus de la portée du grand nombre, ſi la langue dont il ſe ſert eſt, en grande partie, ignorée du peuple, comment ſe fera-t-il entendre de lui? Il ſe trouvera dans le cas de ceux qui compoſent des paroles pour être chantées, & que l'harmonie rejette inceſſamment; ils ſont contraints de ſe renfermer dans un très petit nombre d'idées. De tous les objets de la Religion, la Morale eſt, ſans doute, le plus à la portée du peuple: mais, comme nous l'avons dit, la plûpart n'apportent pas aux diſcours chrétiens ce vif intérêt, qui, né d'une utilité préſente, éclaire l'eſprit, enfante le plaiſir, & écarte toute penſée étrangére. Comment donc le peu-

peuple pourra-t-il juger ſainement de cette partie de l'éloquence ſacrée qui parle à la raiſon?

Si l'eſprit n'eſt point éclairé, il arrivera de deux choſes l'une, ou que rien ne pourra émouvoir le cœur, ou qu'il ſera ému de tout. Les uns demeureront glacés, ou ſeront touchés légerement; quand l'eſprit eſt ſubjugué, le cœur ne tarde pas à ſe rendre. La piété des autres leur produira une illuſion favorable à l'orateur; la confuſion de leurs idées leur fera admettre comme clair & certain tout ce qu'il avance; la ſenſibilité de leur cœur prêtera du ſentiment aux choſes les plus ſeches; il ſuffira qu'on leur prononce d'une voix qu'on s'eſt accoutumé à juger pathétique, quelques mots auxquels ils ſe ſont familiariſés, pour qu'ils nomment l'orateur éloquent. Alors, ſans le ſavoir, ils placeront, comme les maîtres de l'éloquence, tout l'art de l'orateur dans l'action: mais ils différeront d'eux en ceci; c'eſt que ces maîtres vouloient que l'action, accommodée au ſujet, fût noble, décente, & conforme aux regles de l'art; au lieu qu'un peuple ignorant ſera ſatisfait ſi l'action eſt bruyante, & ſe montrera pénétré des choſes les plus froides, pourvu qu'on les récite d'une maniere pathétique, c'eſt à dire, pourvu que l'orateur ait trouvé le ton le plus propre à frapper l'oreille de ſes auditeurs, dût-il être faux & monotone.

La multitude des ſermons, avois-je dit, ſembleroit, par l'exercice fréquent du goût, devoir faire naître de bons juges: mais elle produit préciſément l'effet contraire. D'un côté, les prédicateurs, obligés de compoſer à la hâte, reſtent dans la médiocrité, & ne donnent que très rarement au peuple des modeles propres à leur former le goût. De l'autre le peuple ſe laſſe des ſermons, ce qui relâche encore le peu d'attention qu'il y apportoit. Les matieres, à force d'être rebattues, ne parviennent point à le tirer de ſa léthargie.

Le genre ſublime paroit plus propre aux oraiſons funebres qu'aux ſermons, parce que pour frapper des coups plus ſûrs & plus forts, il veut être appuyé ſur des faits récens &, ſi je puis ainſi dire,

palpables. Qu'on ne m'objecte point que nous liſons encore avec tranſport les oraiſons funebres de Boſſuet, quoique les évenemens dont il parle ſoient anciens: car le lecteur d'un diſcours éloquent ſe transforme ſoudainement en auditeur; ſi les faits dont l'orateur s'occupe étoient récens lorſqu'il les expoſoit, ils deviennent récens pour nous, & nous allons, en quelque ſorte, groſſir l'aſſemblée devant laquelle il parloit. Je contredirois cependant l'expérience, ſi je prétendois que le genre ſublime eſt exclus des ſermons; je dis ſeulement qu'il y eſt plus rare; quand les faits ſont récens & palpables, l'orateur les ſuppoſe connus; il les indique, & s'abandonne aux grands mouvemens de l'éloquence; ainſi Démoſthene & Cicéron foudroyent Philippe & Catilina; ainſi Boſſuet déplore la mort de Condé. Mais l'orateur qui veut convertir, ſe partage entre le ſoin d'éclairer l'eſprit & celui de toucher le cœur; il perce la nuit des tems pour nous rappeller des faits reculés; il analyſe nos devoirs; il diſcute, il prouve, & par-là ſe refroidit. Il employera donc plus ſouvent le genre ſimple & tempéré que le genre ſublime. Qui le croiroit? l'éloquence ſacrée, dont l'objet eſt ſi grave, riſque aiſément de tomber dans le genre ſpirituel; au défaut des grands mouvemens, que fait naître un intérêt préſent & ſenſible, l'orateur ſe livre à des ornemens recherchés; au lieu d'être embraſé, il brille, ſemblable à ces flammes artificielles, qui n'ont que l'éclat du feu ſans en avoir la chaleur. S'il étoit pénétré lui-même de l'importance & de la grandeur des objets dont il parle, ſi ceux auxquels il s'adreſſe en étoient pénétrés, jamais il n'auroit recours à ce ſtile. Mais il veut plaire, & ne pouvant être véhément, il ſe contente d'amuſer; au lieu de tonner contre le vice, il s'égaye & en fait la ſatire; il ſemble le careſſer, tant les portraits qu'il en trace ſont brillans; en combattant les défauts des gens du bel air, il adopte leur langage. Quel a été le ſort de l'éloquence ſacrée dans le pays où elle s'eſt montrée avec le plus d'éclat? Bourdaloue paroit; c'eſt un autre Démoſthene; comme lui il gagne le cœur en ſubjuguant l'eſprit; ſon ſtile eſt grave, noble, ſimple & fort; ſans doute il donne quelquefois dans la

ſéchereſſe: mais il faut convenir qu'il poſſede à un degré éminent cette qualité, la premiere de l'orateur, qui eſt de ſe faire oublier lui-même pour ne vous occuper que de ſon ſujet; il avoit donc atteint, peu s'en faut, le comble de l'art. Oſons dire qu'avec Maſſillon l'éloquence eſt trop ſouvent tombée dans le genre ſpirituel: il eſt vrai que peu d'orateurs ſavent, comme lui, allier à l'eſprit le ſentiment & quelquefois même la force: malgré cet alliage heureux & rare, il combat trop ſouvent le vice par des antitheſes & par des allégories ingénieuſes; on admire avec tranſport l'orateur; mais on n'eſt pas toujours aſſez pénétré de ce qu'il dit; il n'a point autant que Bourdaloue, cet air de vérité qui perſuade, cette candeur qui ſemble ne point recourir à l'art. Pluſieurs ont penſé que Maſſillon étoit le Racine des prédicateurs; il en a l'élégance, quelquefois même le pathétique, &, comme lui, il s'eſt créé une langue; mais il n'en a pas toujours la noble ſimplicité. Heureuſe néanmoins l'éloquence ſacrée ſi elle n'eût point paſſé ces bornes! Mais Maſſillon, à qui ſeul il ſembloit devoir être permis de donner dans le genre ſpirituel, parce qu'il ſavoit racheter ce défaut ou le faire pardonner, a produit beaucoup de mauvais imitateurs; ſéduits par ce modele brillant, la plûpart ſe ſont jettés dans un genre plus facile que le genre ſublime, & qui demande d'autant moins d'art qu'on ne s'efforce pas à le cacher. L'éloquence ſacrée a dégénéré dès ſa naiſſance; & le goût du peuple, qui perd de vue les grands modeles, ſe corrompt infailliblement.

Il n'en eſt pas de l'éloquence comme des autres arts. Lorsque ceux-ci ſont arrivés à la perfection, leurs chef-d'œuvres, ſouvent expoſés aux yeux du peuple, peuvent, jusqu'à un certain point, maintenir, au milieu de lui, le bon goût, & le garantir de la contagion: ainſi les drames des Corneille & des Racine, repréſentés tous les jours, ſont des modeles auxquels le peuple peut comparer les productions nouvelles: qui doute que ſans eux il n'approuvât des ouvrages très médiocres, comme il en approuvoit avant que ces grands génies eus-

ſent perfectionné l'art ? Mais l'éloquence eſt à cet égard dans des circonſtances moins favorables : ſes chef-d'œuvres diſparoiſſent aux yeux de la multitude, & font place ſouvent à des productions inférieures, qu'elle admire parce qu'elle ne connoit rien au delà. D'ailleurs, l'éloquence étant conſacrée à l'utilité, trouve des juges moins difficiles que ne font les arts dont le plaiſir eſt le principal objet ; on rafine ſur celui-ci parce qu'on pouvoit s'en paſſer, tandis qu'on ſe montre plus indulgent envers l'utile & le néceſſaire. Il réſulte de ces réflexions que l'éloquence, plus qu'un autre art, risque aiſément de ſe détériorer, & que le peuple court un risque égal d'en porter de faux jugemens.

Malgré ces conſidérations, un peuple au milieu duquel on cultive tous les beaux arts, & qui a de fréquentes occaſions d'apprendre ſa langue, ſera meilleur juge de l'éloquence, qu'un peuple qui ne poſſede point tous ces avantages. Il y a une analogie entre tous les arts ; de leurs lumieres réunies il ſe répand dans une nation un goût auſſi général qu'il eſt poſſible de l'être, & qui, s'il ne fait pas de tous les citoyens autant de juges excellens, ſert du moins à les multiplier. Cette nation, mieux que toute autre, pourra juger de la beauté intrinſeque. Mais un peuple qui ne ſe trouvera pas dans les mêmes circonſtances, ne pourra juger que de la beauté rélative, & même, à cet égard, il ſe trompera fréquemment.

Enfin, pour détruire entierement le principe du Pere Gisbert, j'en appelle à l'expérience. Il n'eſt pas rare que les orateurs ſoient tranſplantés ; les uns y gagnent, & les autres y perdent ; tantôt la louange ſuccede au mépris ; tantôt le mépris à la louange. Voici donc deux peuples qui jugent, & dont les jugemens ſont oppoſés. En faveur du principe qu'on veut établir, il faudroit conclurre qu'en ſoi, un orateur eſt, à la fois, bon & mauvais, c'eſt à dire, admettre une ſeconde abſurdité pour ſoutenir la premiere. L'expérience montre auſſi qu'un orateur médiocre & même mauvais remplace un orateur diſtin-

gué,

gué, ſans que le peuple apperçoive quelque changement; il prodigue toujours la louange.

Il me paroit donc qu'il s'en faut bien que le Pere Gisbert ait, avec fondement, donné plus d'extenſion au ſentiment de Cicéron & de Quintilien; que c'eſt préciſément l'éloquence ſacrée dont le peuple eſt le moins capable de juger, & qu'il n'eſt pas vrai, en général & ſans aucunes reſtrictions, qu'il ſoit juge éclairé de l'éloquence.

PLAN

PLAN RAISONNÉ
D'UNE
HISTOIRE UNIVERSELLE
ET DIPLOMATIQUE DE L'EUROPE
DEPUIS CHARLEMAGNE JUSQU'À L'AN 1740.
PAR Mr. WEGUELIN.

Un des premiers devoirs de l'Hiſtorien, c'eſt de conſtater les faits, & de combiner ceux qui lui paroiſſent les plus remarquables, avec leurs cauſes, ſoit politiques, ſoit morales. Si d'ailleurs il veut ne point interrompre le fil de ſa narration, il faut encore qu'il ſe conforme à l'ordre ſucceſſif des évenements.

C'eſt par les Diplomes ſurtout que l'on peut conſtater les faits; & c'eſt par le caractere, la ſignature, & le ſtyle de ces Actes publics, qu'on en reconnoit l'authenticité. Copies vidimées des contracts ſocials, les diplomes ſont pour l'hiſtorien des Documents qui ſont cenſés être écrits ſur le papier timbré des nations. L'auteur Diplomatique fournit donc les preuves des faits; & c'eſt à l'hiſtorien à les mettre en œuvre: s'il ſe trouve des points conteſtés, les Documents dont nous parlons, décident: mais la véridicité de ces déciſions dépend moins de la forme des lettres, de l'arrangement des ſignatures, des titres, & des monogrammes que l'on trouve dans les Diplomes, que de l'accord & de la conformité qu'il y a entre les matieres & le ſyſteme des cauſes locales.

Un Recueil de Diplomes eſt pour une Hiſtoire univerſelle, ce qu'un Cabinet de Médailles eſt pour une Hiſtoire particuliere: on conſulte

ſulte ces précieux monuments de l'antiquité dans les cas graves qu'il eſt bon de diſcuter: & l'on y renvoie le lecteur toutes les fois qu'il s'agit d'éclaircir les formalités d'uſage: car les nations ne ſe peignent jamais avec plus d'énergie & de force, que dans les Congrès, & dans les Actes de paix, de trêve, ou d'alliance qui y ont été dreſſés. Auſſi eſt-ce ſurtout d'après l'uniformité des actes publics, que l'on doit déterminer la durée des époques des nations.

Cependant, quelque application que l'on apporte à l'étude de ces pieces authentiques, l'art de les déchiffrer ne conduira jamais à une connoiſſance réfléchie des cauſes qui les ont produites. Chacun de ces inſtruments publics préſuppoſe une enchaînure d'évenements qui l'ont fait naître, & dont l'Hiſtorien doit faire une énumération complette. On voit que nous ne parlons ici que des cauſes purement hiſtoriques, c'eſt à dire, de celles qui ont pour principes le ſort des batailles & le hazard des évenements; encore faut-il obſerver qu'en parlant du *ſort des batailles*, nous ne prétendons pas y comprendre les regles de la tactique, vû que ces regles ne peuvent être bien appliquées à l'hiſtoire que par des militaires. L'ordre univerſel des choſes ne doit pas non plus entrer dans nos conſidérations: car, quoique la Métaphyſique prétende expliquer par le ſecours de cet ordre univerſel, une infinité d'évenements qu'on attribue communément au hazard; ce ſeroit néanmoins une grande abſurdité que de vouloir concilier les faits variables de l'hiſtoire avec les principes invariables & tranſcendants de la Philoſophie. Ce n'eſt que dans des faits antérieurs, que l'Hiſtorien doit aller puiſer l'explication des évenements qu'il eſt occupé à combiner. Bien plus, en remontant juſqu'aux principes mêmes de toutes les connoiſſances hiſtoriques, on trouvera que bien loin d'être des idées ſimples, ces principes ne ſont que des idées collectives, formées par l'aſſemblage des cauſes occaſionnelles qui ont produit les origines des peuples & des nations. Cette obſervation ſuffit pour faire ſentir une autre vérité également importante; c'eſt que la Logique de l'hiſtoire eſt bien différente de la Logique ordinaire: car ſans ap-

prendre à faire des raiſonnements abſtraits, elle ſe réduit à l'*Analogie* & à l'*Induction.*

L'*Analogie* hiſtorique n'eſt autre choſe que l'art de ſaiſir la reſſemblance des faits: mais les faits ſe reſſemblent, ou par les agents qui les ont produits, ou par l'action même de ces agents. La premiere de ces deux ſortes de reſſemblances ſe rapporte entierement aux qualités des agents; & comme les qualités de ceux-ci ſont la cauſe ordinaire de leurs bons & de leurs mauvais ſuccès, les paralleles rélatifs aux perſonnes ne peuvent concerner que des évenements qui appartiennent à la Pſychologie & à la Morale. Les reſſemblances de la ſeconde eſpece ſont celles qui ne portent que ſur les actions: or les actions ſont des tendances à produire de certains effets, qui par là même qu'ils ſont ſemblables, établiſſent & prouvent la reſſemblance des forces qui ont été miſes en action pour les produire. Si vous voulez bien connoître l'ordre & la conſtitution d'un Etat, rien ne vous ſera plus avantageux que d'avoir la meſure de ſes forces publiques. Il eſt donc du reſſort de la politique de s'attacher aux paralleles des effets; c'eſt à dire, de rechercher les reſſemblances qui ne portent que ſur les actions. Ainſi, ſuppoſé que je veuille comparer les caracteres d'Alexandre, d'Auguſte, de Tibere & de Charlemagne, à ceux de Céſar, de Louis XIV, de Louis XI, & d'Otton le Grand; je ne dois ſuivre alors que les regles de l'analogie morale, c'eſt à dire, de l'analogie des cauſes. Mais, ſi je veux mettre en parallele le Gouvernement des Francs, ou des Polonois, ou des Républiques confédérées d'Italie, avec celui des Saxons, ou des Hongrois, ou des Villes Anſéatiques d'Allemagne; en ce cas je dois uniquement m'attacher à l'analogie politique, qui eſt celle des effets.

Pour ſaiſir les phénomenes de la premiere eſpece, ceux qui appartiennent aux mœurs, il ſuffit d'avoir l'eſprit d'obſervation: mais, pour diſtinguer & mettre à profit les phénomenes qui ſont du reſſort de la politique, il faut à l'eſprit d'obſervation joindre celui de combinaiſon; il faut ſavoir tirer de pluſieurs faits ſemblables, comme d'au-

tant

tant de *prémiſſes* des conſéquences vraies & lumineuſes; maniere de raiſonner que l'on nomme *Induction hiſtorique*. Plus on a de faits combinés enſemble, plus auſſi les conſéquences ſont générales, & plus elles ont l'air ſcientifique: mais il faut bien ſe garder de rendre ces raiſonnements trop univerſels. Il n'eſt qu'un moyen d'éviter cet écueil; c'eſt de mettre un rapport exact entre le nombre, l'ordre & les qualités des faits qui entrent dans les prémiſſes, & le nombre, l'ordre & les qualités des faits qu'on veut en inférer. Au reſte, toutes les maximes de législation & de politique, ne ſont que des réſultats de ſemblables opérations, ne ſont en un mot que des conſéquences d'*Inductions* hiſtoriques. Par exemple, une marque indubitable de la bonne conſtitution d'une Monarchie, c'eſt, dit-on, lorſque les droits particuliers de la Nobleſſe, du Clergé & du Tiers-état, n'y ſont point en oppoſition directe avec la puiſſance exécutrice qui eſt entre les mains du Monarque. Cette maxime, quoique très-générale, n'eſt cependant que le réſultat d'un grand nombre de faits ſemblables que l'on a tirés de l'hiſtoire des Etats Monarchiques, & qu'on a unis par la voie de l'*Induction*.

Quelque talent, quelque goût que l'Hiſtorien ſe ſente pour cette partie de la Logique hiſtorique, il ne faut pas qu'il s'y livre trop: une bonne hiſtoire n'eſt pas tant celle qui abonde en maximes, que celle qui fournit d'amples matériaux à l'amateur de ces ſortes de réſultats politiques. Ce n'eſt pas en Législateur; c'eſt plutôt en Notaire qu'il faut écrire les faits des nations; d'autant plus qu'il eſt difficile de s'attacher à ramener tous les faits à des ſentences, ſans embraſſer quelque parti, ſans chercher ſouvent à éblouir ſon lecteur, & ſans donner dans le goût de ceux qui ſacrifient l'intérêt de la vérité à l'ornement de leur ouvrage. Or, lorſque le tems a fait éclipſer les préjugés des hommes, & ne nous a laiſſé que leurs actions, pourquoi réveiller l'eſprit de partialité, qui fait, pour ainſi dire, autant de plaidoyers de tant d'hiſtoires dictées par des préjugés publics? En ſecond lieu, on ne parvient à éblouir les autres que parce qu'on a d'abord été

ébloui ſoi-même; & pour cela, il ſuffit ſouvent d'être dominé par ſon imagination, quand même on pourroit ſe flatter de n'être aſſervi à perſonne.

Enfin les agrémens propres à un ouvrage hiſtorique doivent naître du fond même de l'hiſtoire; & ce ſeroit dégrader celle-ci que de lui prêter des ornemens étrangers. Ce n'eſt pas que l'on prétende que l'Hiſtorien ſoit un ſimple Journaliſte, un Chroniqueur: mais qu'il ſoit bien rempli de ſa matiere, bien pénétré de ſon ſujet; alors il tracera les caractères des Princes, comme s'il avoit été dans leur confidence; il décrira les mœurs des peuples, comme s'il étoit né & qu'il eût vécu parmi eux.

Pour être en état de bien écrire l'hiſtoire, il faut non ſeulement avoir fait de grandes études; mais il faut les avoir faites dans un certain ordre: l'hiſtoire de l'homme individuel doit être le premier objet de ces études; celle du lien ſocial des peuples particuliers doit venir enſuite; & ce n'eſt qu'après que l'on a bien ſaiſi l'eſprit d'un grand nombre de ces ſociétés nationales, que, guidé par tout ce qu'on y a trouvé d'uniforme, on peut s'élever juſqu'à l'hiſtoire du genre humain. On peut dire à cet égard que, dans l'étude de l'hiſtoire politique, on doit ſuivre la marche de l'hiſtoire naturelle: le Curieux ramaſſe des raretés: le Naturaliſte les claſſifie, & le Phyſicien ſubordonne ces claſſes aux loix univerſelles de la Nature. Dans l'hiſtoire politique, les mémoires des hommes publics tiennent la place des raretés; les hiſtoires particulieres des peuples nous repréſentent les claſſifications des minéraux & des végétaux; enfin le Code univerſel des nations reſſemble au ſyſteme univerſel des corps. Cependant l'Hiſtorien a un grand avantage ſur le Phyſicien: car il faut que ce dernier imagine les caractères diſtinctifs des corps dont il a à parler, au lieu que la différence des peuples eſt nettement établie par les faits: d'ailleurs, les loix du monde moral nous ſont bien plus intimement connues que les loix du monde phyſique: de ſorte qu'il eſt bien plus facile de porter un jugement certain ſur les actions extraordinaires des hom-

hommes, que ſur les phénomenes ſinguliers des corps; & l'on ſait beaucoup mieux déterminer ce qui répugne à l'humanité, qu'on ne pourroit indiquer ce qui fait exception au ſyſteme des loix naturelles qui appartiennent à la Phyſique.

Pour peindre le génie des ſiecles qui nous ont précédés, nous trouvons des ſecours précieux dans la recherche & l'examen des opinions qui ont ſucceſſivement été les plus généralement répandues en Europe: car les opinions n'étant que la ſuite de quelqu'un des ſentiments primitifs de l'homme, par exemple, du ſentiment de la crainte, de celui de la force, de la défenſe ou de l'induſtrie, elles deviennent autant de traits caractériſtiques des tems où elles ont dominé. Ainſi, en obſervant une choſe avérée par l'hiſtoire de tout l'Occident, ſavoir que l'Europe a ſucceſſivement paſſé d'une législation barbare à un gouvernement féodal & hiérarchique, & enſuite à une union confédérative, politique & militaire; on trouvera en même tems que cet ordre a été en quelque ſorte preſcrit par la nature des choſes. Les Francs, les Bourguignons, les Goths & les Lombards, tous peuples libres, puiſſants & féroces, ne ſubirent le joug des loix que par néceſſité: mais il faut remarquer qu'un état de contrainte ne peut durer que par la continuité des actes de la puiſſance coactive: ainſi, dès que l'autorité des Monarques vint à s'affoiblir, à tomber, chez les peuples dont nous parlons, l'autorité des grands ne manqua pas de s'établir ſur la fauſſe interprétation, ou plutôt ſur les débris des loix, qui perdirent peu à peu leur ancienne vigueur, & finirent par n'avoir plus de force: ce fut donc à leur défaut, que la religion vint au ſecours de ces Etats anarchiques, & que les cenſures ainſi que les Canons de l'Egliſe, prenant la place des raiſons d'Etat, furent, pour ainſi dire, les garants & ſouvent la cauſe des trêves que faiſoient entr'eux les Souverains. Mais la puiſſance étant ainſi diviſée, il étoit facile d'en ſecouer le joug, & de s'y ſouſtraire entierement: c'eſt ce que ſentirent ſurtout pluſieurs Villes, qui, enhardies par la force qu'elles tiroient de leur induſtrie & de leur commerce, firent des Confédérations particulieres.

Ainſi l'on vit la puiſſance ſe diviſer toujours davantage, & les ſociétés particulieres ſe ſéparer d'intérêt des autres ſociétés avec leſquelles elles avoient été précédemment unies. Ce furent enfin ces mêmes circonſtances qui firent ſentir aux Princes la néceſſité d'établir un droit public, que chacun d'eux a combiné dans la ſuite avec ſes forces exécutrices.

Cette chaîne de variations politiques fixe le nombre & détermine la durée des véritables époques de l'hiſtoire de l'Europe entiere; puiſqu'il n'eſt aucune de ces mêmes époques que l'on ne doive regarder comme un ſyſteme dont l'influence s'eſt étendue ſur tous les Etats Européens, ſelon les modifications qu'ont dû y apporter la nature du ſol, le caractere des habitans & l'intérêt de chaque nation. On voit combien il eſt néceſſaire de bien diſtinguer l'origine, les variations & la décadence de chacune de ces époques, les ſeules qui tiennent au ſyſteme des évenements: car, à moins que de ſaiſir ces combinaiſons dans leur totalité, il ne ſera pas poſſible de faire une hiſtoire générale qui ſoit réfléchie: puiſque les phénomenes du monde hiſtorique n'obtiennent une évidence & ne parviennent à une utilité marquée que par leur union réciproque; de même que les obſervations céleſtes ne ſont devenues importantes & lumineuſes qu'après avoir été rapportées au ſyſteme planétaire.

Pour mieux faire ſentir encore la néceſſité d'étudier l'eſprit des divers ſyſtemes politiques que l'hiſtoire nous préſente, que l'on me permette d'employer ici une ſeconde comparaiſon qui, je crois, a l'avantage d'être auſſi juſte que facile à ſaiſir. Je ſuppoſe que l'on ait à écrire l'hiſtoire des Monnoies: l'auteur pourra-t-il s'entendre lui-même, & ſe faire entendre des autres, s'il ne commence par établir des meſures fixes & des rapports invariables du Marc d'or & du Marc d'argent fin? Or ce que les déterminations générales & préliminaires du Marc ſont dans l'hiſtoire des monnoies, les époques mémorables des âges ſucceſſifs le ſont dans une hiſtoire univerſelle. Il faut donc, dans ce dernier cas, trouver & choiſir les points de repos les plus naturels,

turels, ceux qui donnent la diviſion la plus convenable de tout l'ouvrage, qui répandent le plus de lumiere ſur toutes les parties, & qui ſont les plus propres à ſervir de termes de comparaiſon pour tous les événements de la même eſpece.

Eſt-il néceſſaire après cela d'avertir que, par le terme d'*Epoques*, je n'entens pas ces points hiſtoriques d'où l'on commence à parcourir une certaine liſte de Monarques? Ces ſortes d'époques qui ne tiennent qu'aux dynaſties, n'influent que ſur l'hiſtoire particuliere d'une nation: elles ne répandent pas d'aſſez grandes lumieres ſur la ſucceſſion des faits conſidérés comme appartenants à l'hiſtoire univerſelle. Dans cette derniere eſpece d'ouvrage, une vraie époque, ſemblable à ce que les Philoſophes nomment une *Notion directrice*, doit montrer & fixer l'origine des révolutions générales, & le terme où elles ont abouti. Mais les révolutions ne ſont que les ſuites des fermentations qui les ont précédées: ainſi, s'attacher uniquement à celles-là, c'eſt s'expoſer à n'avoir que la ſuperficie des choſes: à la vérité, on donnera toujours les faits; mais ces faits ne ſeront jamais combinés avec leurs cauſes. Parmi ces cauſes il en eſt qui différencient les faits les plus ſemblables, par des nuances, des gradations particulieres: on peut les nommer *Cauſes*, ou *raiſons individuelles*, parce qu'en effet elles tiennent aux circonſtances du moment, du lieu, ou de la perſonne. Or il eſt eſſentiel d'expoſer ces ſortes de cauſes dans l'ordre de leur ſucceſſion. C'eſt à peu près comme ſi l'on avoit à décrire une maladie épidémique: une des plus grandes difficultés ſeroit de trouver & de bien développer la parfaite correſpondance du nombre & de la nature des ſymptômes avec le nombre & la nature des circonſtances qui auroient quelque rapport avec cette maladie. Mais auſſi quel avantage n'en réſulteroit-il pas, ſi l'ouvrage étoit bien fait, puiſqu'il ne pourroit manquer de contribuer beaucoup à l'éclairciſſement d'une infinité de matieres auxquelles ces ſortes d'hiſtoires naturelles tiennent toujours? Un recueil d'obſervations hiſtoriques, juſtes & liées par un ſeul principe, & nous ſervant de guide dans la route ténébreuſe des ſiècles, n'auroit-il pas le même effet?

Mais

Mais, pour parvenir à ces obſervations précieuſes, & pour les réunir entr'elles & n'en faire qu'un corps; il faut que l'Hiſtorien ſe faſſe une méthode qui ſoit pour lui comme le ſecret de l'art; tellement qu'il ne montre au lecteur que les heureux réſultats auxquels elle l'aura conduit. Or, entre toutes les méthodes hiſtoriques qui peuvent ſe préſenter à l'eſprit, la voie du probleme me ſemble la plus convenable à l'hiſtoire univerſelle: non pas que je veuille désunir les membres d'un même corps, ni répandre un air d'incertitude ſur les faits qui ſe préſenteront; mais l'idée de Probleme emporte la néceſſité de réſoudre tous les points qui appartiennent à une queſtion générale; & de tous ces points bien combinés enſemble, il n'en eſt aucun qui ne répande du jour ſur les autres. Eſt-il donc un moyen plus heureux de ſe repréſenter tout à la fois une partie conſidérable & importante de l'hiſtoire? Eſt-il une autre voie auſſi ſure, & le génie le plus vaſte peut-il, ſans uſer avec lui-même d'une ſorte d'induſtrie, avoir habituellement préſentes toutes les idées hiſtoriques? Cependant, je le répete, cette méthode des problemes hiſtoriques ne ſera pour moi qu'un échaffaudage, très-utile pour travailler avec plus de certitude, plus d'aiſance & moins de danger, & qui aura entierement diſparu avant que je livre au public le corps entier de l'édifice.

Au reſte, vû l'importance de cette partie de mon Plan, & la crainte légitime que ce mot de *Probleme* n'induiſe en erreur, & ne porte à me ſuppoſer des idées toutes différentes des miennes; il eſt néceſſaire que j'entre ici dans quelques détails ſur cet objet. Voici donc l'ordre des Problemes les plus eſſentiels que j'aurai à réſoudre dans le cours de mon hiſtoire univerſelle & diplomatique.

1. *Probleme.* Les conquêtes faites par les peuples de l'Orient & du Nord, & les faits qui les conſtatent, étant bien connus; déterminer par le fil des évenements quelle a dû être la forme de la législation de ces peuples & la conſtitution de leur gouvernement.

2. *Pro-*

2. *Probleme.* L'abaiſſement de la Maiſon de Charlemagne étant poſé en fait; trouver l'origine, l'accroiſſement & les modifications différentes du ſyſteme féodal.

3. *Probleme.* Les effets immédiats de la Donation faite au St. Siege par Pepin & Charlemagne étant reconnus; ou ce qui revient au même, l'état du St. Siege en ces tems-là étant donné; fixer hiſtoriquement l'étendue & la force du ſyſteme hiérarchique.

4. *Probleme.* Connoiſſant les Croiſades & les guerres des grands & des petits vaſſaux; décrire l'origine & les progrès du ſyſteme confédératif.

5. *Probleme.* Les évenements qui accompagnerent les regnes de Louis XI, de Ferdinand le Catholique & de Charlequint étant préſuppoſés; donner une vraie idée du droit public qui s'établit alors en Europe.

6. *Probleme.* Enfin les divers actes de ce droit politique étant bien éclaircis; trouver le moment d'où l'on peut dater le commencement du ſyſteme militaire.

Pour réſoudre ces Problemes, on décompoſe, à la vérité, la vaſte machine de l'hiſtoire univerſelle; mais, en la décompoſant, on ſuit ſcrupuleuſement l'ordre primitif des parties qui concourent à la former; en ſecond lieu, on ne décompoſe point à l'infini: & quoique les parties principales paroiſſent pour un tems comme ſéparées les unes des autres, cependant chacune d'elles reſte toujours dans ſon entier, de ſorte que l'on peut facilement les remettre enſuite à leur place, ſans que la ſymmétrie du corps hiſtorique en puiſſe ſouffrir.

On pourroit comparer les opérations dont nous venons de parler, aux travaux d'un Phyſicien qui chercheroit à connoître, juſqu'à une certaine profondeur, la véritable ſtructure de notre globe: après avoir découvert les traces univerſelles des couches horizontalement placées les unes ſur les autres, & dont la ſurface de la terre a été autrefois compoſée; il verroit avec étonnement que l'homme marche au-

jourd'hui ſur les ruines d'un ancien monde. De même, l'Hiſtorien découvre que les matériaux qui entrent dans la conſtruction de l'hiſtoire moderne, ne ſont jamais que les décombres des âges précédents.

On trouve en Europe trois nations dont l'hiſtoire ne paroit pas ſuivre avec exactitude l'ordre & le plan des Problemes dont nous avons parlé: ce ſont l'Allemagne, le Nord & les Etats d'origine Slavonne: il faudra chercher & développer la cauſe de ces anomalies. Le Corps Germanique, compoſé de trois ſortes d'Etats, préſente auſſi trois eſpeces d'hiſtoires, celle des Seigneurs, celle des Prélats & celle des Villes. La Confédération de ces trois Ordres, qui ſe maintiennent par l'autorité judiciaire de l'Empereur, nous retrace la conſtitution à laquelle tendoient tous les Etats de l'Occident. Semblable au Coliſée dont la ſtructure maſſive réſiſte aux injures du tems, le Corps Germanique a ſu conſerver la variété de ſes droits, malgré toutes les tentatives qu'on a faites pour les lui ravir; au lieu qu'on a vû tomber en ruines les Conſtitutions féodales de la plupart des autres Royaumes de l'Europe.

L'hiſtoire ne connoiſſant point l'origine des habitants du Nord, c'eſt à dire, des Suédois & des Danois, elle eſt obligée de les conſidérer comme ſéparés des nations germaniques; du reſte l'hiſtoire de ces deux peuples ne préſente que deux Problemes importants, dont l'un concerne leur union, & l'autre leur ſéparation. Le premier ſe réduit à cette queſtion: l'Etat paiſible du Dannemarck, de la Norvege & de la Suede étant connu, quels ont été les préparatifs, les cauſes prochaines & éloignées de l'Union de Calmar? Le ſecond Probleme peut être conçu en ces termes: L'Union de Calmar étant diſſoute; développer hiſtoriquement les raiſons tant extérieures qu'intérieures qui ont contribué à ſéparer les intérêts des deux nations du Nord.

Les trois Etats d'origine Slavonne conviennent, en ce que l'Ordre des nobles tant ſpirituels que temporels y a toujours prédominé. Or comme il y a plus de zele dans un Ordre de l'Etat, lorſqu'il eſt ſeul

chargé

chargé de défendre les droits de la nation, que lorſque ce privilege appartient à pluſieurs Ordres de différentes eſpeces; c'eſt de cette circonſtance caractériſtique, qu'il faut inférer les révolutions fréquentes qui ont agité la Pologne, la Hongrie & la Boheme.

La Pologne ayant conſervé ſa conſtitution originaire, elle ne peut entrer dans l'hiſtoire univerſelle & diplomatique, que par rapport aux efforts que les Polonois ont faits pour établir un Empire féodal ſur les Provinces limitrophes de leur patrie. On peut donc préſenter l'hiſtoire publique de cette nation ſous la forme des deux Problemes ſuivants. 1. La jonction des Palatinats de Pologne & de Lithuanie étant connue; faire une énumération hiſtorique des cauſes qui ont acquis à cet Etat un empire féodal ſur les Provinces ſituées vers l'Oueſt, le Nord & le Midi de ce pays. 2. Les changements introduits dans le ſyſteme du Nord, étant donnés; faire l'hiſtoire de la perte que firent les Polonois de la plupart des grands fiefs de leur Couronne.

L'hiſtoire de la Hongrie & de la Boheme, quoique ſemblable à celle de la Pologne par l'incorporation féodale des provinces adjacentes, en differe cependant en un point capital, en ce que l'élection des Rois n'y a pas lieu; & l'on peut comprendre l'Hiſtoire moderne de ces deux Etats ſous la forme du probleme que voici: La jonction des pays annexés à la Hongrie & à la Boheme étant connue; rédiger en ordre hiſtorique les évenements qui ont procuré à la Maiſon d'Autriche la poſſeſſion paiſible de ces Etats.

On eſt ſurpris, ſans doute, de voir que je n'aye encore rien dit d'un pays, qui de tous les Etats de l'Europe eſt le ſeul où l'on retrouve aujourd'hui l'ancien gouvernement hiérarchique, féodal & confédératif? Ce pays eſt l'Italie, dont l'Hiſtoire ſemble d'abord faire une nouvelle exception au plan que nous avons expoſé, & qui cependant à conſidérer les choſes de plus près, nous en montre bien plutôt le modele & le correctif. Car c'eſt ce pays qui a donné comme la premiere impulſion à tous les ſyſtemes politiques qui ſe ſont ſuccédé en Europe,

& c'eſt-là auſſi que ces ſyſtemes ont eu la ſucceſſion la plus réglée. Théodoric, Roi des Oſtrogoths & maître de l'Italie, fut le premier de tous les Rois barbares qui donna une législation différente de celle des Romains; de ſorte que l'uſage des fiefs s'introduiſit & fut autoriſé chez les Italiens du tems même des Oſtrogoths. En ſecond lieu, Rome fut, comme tout le monde ſait, le centre de la Hiérarchie; & enfin les villes de la Lombardie, de l'Hétrurie & de la Romagne donnerent l'exemple des Confédérations à tous les Etats Européens. La Politique ſe répandit de l'Italie dans toutes les Cours des Souverains; & la partie ſupérieure de cette belle contrée fut le théatre des guerres les plus opiniâtres que nous ayons eues, & dans leſquelles une partie des nations européennes ayent le plus ſouvent eſſayé leurs forces militaires; de ſorte que ce pays qui renferme des gouvernements monarchiques, des hiérarchiques & des confédératifs, eſt à tous égards le pays de l'Europe dont l'hiſtoire eſt la plus curieuſe & la plus inſtructive: c'eſt auſſi à cauſe de ce caractere original, que cette hiſtoire eſt ſi difficile à ſaiſir. Dans les autres pays on a des *Données*, qui aident à réſoudre les Problemes qu'on y rencontre: mais dans l'hiſtoire de l'Italie, c'eſt des obſervations pſychologiques, morales & politiques, qu'il faut tirer l'origine de toutes les révolutions remarquables qui s'y ſont faites. On peut dire, en quelque ſorte, que les grands changements arrivés en Europe, doivent être attribués aux qualités & aux talents des Pontifes, des Princes, des Magiſtrats ou des Citoyens de l'Italie. Et ſi dans la ſuite la Déeſſe de la guerre a quitté ce ſéjour; il ſemble que pour conſoler les Italiens, elle leur ait voulu laiſſer le génie de l'invention à ſa place. Auſſi les Républiques qui y ſubſiſtent encore, peuvent-elles ſervir de modeles à tous les peuples libres qui ſont placés ſur les frontieres de quelques grands Etats & dont le gouvernement eſt un reſte de l'ancien ſyſteme confédératif.

Les ſyſtemes politiques dont nous avons parlé juſqu'ici, & qui forment les époques mémorables de l'hiſtoire univerſelle de l'Europe, ne ſe ſont établis & ſoutenus qu'à l'aide de certains liens particuliers

culiers qu'il eſt important de bien conſidérer, & ſur leſquels nous allons jetter un coup d'œil rapide. Les principaux de ces liens ſont les Loix, les Uſages & les Mœurs, la Religion, le Commerce, les Sciences, les Arts & les Lettres, enfin le Droit public; il n'eſt aucun de ces objets qui n'ait ſucceſſivement obtenu une ſorte d'empire en Europe.

Si un homme libre ne ſe ſoumet qu'aux Loix qu'il juge néceſſaires au maintien de ſes privileges & à la conſervation de ſes domaines: s'il ne donne ſon conſentement à un Code public que pour ſe prémunir contre les attaques de ſes égaux & ſe mettre en ſûreté contre les révoltes de ſes inférieurs; il s'enſuit que l'on doit retrouver dans la législation d'un peuple, des indices certains de ſa poſition & de ſes intérêts dans le tems que cette législation a été formée. Un mot ſur les Loix des Francs Saliens & des Ripuariens, des Allemands, des Bourguignons, des Bojoariens, des Saxons, des Lombards & des Viſigoths, nous convaincra de la vérité de cette obſervation.

Toutes les loix que s'impoſa le Franc Salien, ſont conformes à l'eſprit d'un gouvernement monarchique: c'eſt que ce peuple avoit beſoin de ce gouvernement impoſant, pour intimider les Romains, & retenir l'audace des nationaux, eſprits remuants & féroces. Le Ripuarien placé entre les bords de l'Eſcaut, de la Moſelle & de la Meuſe, & par là confiné ſur les frontieres d'un vaſte Etat monarchique, fit des loix tendantes à ſe ménager l'amitié & la confiance des nations voiſines. Les Allemands aſſujettis aux Francs, n'eurent que des Loix dictées par le deſpotiſme; que des loix auſſi rigoureuſes dans la déciſion des affaires entre les particuliers, que ſéveres dans les points qui concernoient le gouvernement proprement dit. Les Loix des Bojoariens, pour maintenir cette nation qui avoit de puiſſans voiſins, renforcerent l'autorité des Ducs. Les Bourguignons qui ne pouvoient ſe ſoutenir ſur les frontieres des Francs, que par la rigueur d'une police exacte, eurent des loix ſéveres pour les nationaux, & des réglements beaucoup plus doux pour les étrangers qui vivoient au milieu d'eux. Les Loix penales des Saxons nous retracent les peines qu'avoit coûtées aux Monar-

ques des Francs la réduction de ce peuple: ſemblables aux peines que l'Egliſe décerne contre les relaps & les renégats, ces loix ne ſont que pénales. Celles des Lombards, peuple placé & reſſerré entre les Francs & les Grecs, reſpirent la jalouſie & la défiance d'une nation qui, pour faire face partout, eſt obligée d'unir ſes forces de la maniere la plus intime. Enfin les Rois des Viſigoths étant au contraire poſſeſſeurs paiſibles de tout un pays, ſe propoſerent de donner des mœurs à leurs peuples, & pour cela formerent un ſyſteme complet de légiſlation civile.

L'eſprit des loix reſſemble à celui des auteurs, en ce que ce dernier ne ſe reconnoit pas tant au ſtyle, qu'aux ſentiments & aux vues qui ont préſidé à tout l'ouvrage. Cherchons donc l'eſprit des loix dans l'hiſtoire des opinions publiques: mais, ſi l'on veut bien connoître l'empire de ces opinions & des intérêts auxquels elles ont ſervi de baſe & de fondement, c'eſt à l'examen, à l'étude des actes les plus abſolus, les plus libres de l'homme, qu'il faut ſurtout s'attacher.

La légiſlation a changé de face auſſi ſouvent qu'un nouveau ſyſteme a prévalu: ainſi les différentes époques de l'hiſtoire des loix ne ſont pas difficiles à ſaiſir. Les coûtumes des peuples libres avoient d'abord été changées en loix: dans la ſuite, les loix furent changées en coûtumes; & de légiſlation nationale, elles prirent la forme de droit coûtumier, après que l'intérêt des nobles les eût portés à démembrer les Etats monarchiques. De là tant de Codes diſcordants, entre leſquels la politique, qui par elle-même n'étoit pas d'un grand uſage dans les ſiecles d'anarchie, ne put établir une ſorte d'unité que par le ſecours des Canons de l'Egliſe. Le Droit Romain venant enſuite à reparoître avec l'aurore des Lettres, les Villes ſe mirent à faire des Loix municipales. Enfin, après le nouveau Droit public établi entre les Souverains de l'Europe, on fit entrer tous ces Codes particuliers dans un Code univerſel qu'on adapta à l'intérêt du Prince & à celui du Corps national. On vit donc arriver aux divers ſyſtemes des loix ce qui eſt arrivé aux ſyſtemes de fortification, leſquels ayant d'abord été

ima-

imaginés chacun en particulier ſelon la poſition des lieux, ont enfin été tous fondus & réunis en un ſeul ſyſteme général, applicable à tous les cas particuliers.

Les uſage les mœurs

Nous contractons des habitudes avant de réfléchir : ainſi les uſages ſont antérieurs aux loix : & de plus l'on conſerve la teinte de ceux-là plus longtems que de celles-ci : voilà pourquoi les uſages tiennent quelquefois lieu de loix. Du reſte, quand ils ſont abolis, on n'en conſerve les termes, qu'en les faiſant tomber dans un diſcrédit tout ſemblable à celui où les uſages ſont tombés eux-mêmes. Les termes qui ont tenu à l'ancienne Conſtitution des Francs & des Germains, ont toujours eu une ſignification plus noble & plus étendue, à meſure que ces Etats ſe ſont accrus en puiſſance & en autorité : je n'ai beſoin d'alléguer, pour preuve de cette aſſertion, que les termes de *Sire*, *Connétable*, *Maréchal*, *Sénéchal*, *Pair*, *Cavalier*, *Ecuyer*, *Dux*, *Comes*, *Gravio*, *Senior*, *Alodium*, *Domicella*, *Feudum*, *Bannus*, *Baro*, *Palatin*, *Edeling*, *Ritter*, *Commendatarius*, *Baillif*, *Cancellarius*, & une infinité d'autres, qui tous ont participé à l'éclat & à la ſplendeur qui a environné le trône des Monarques de ces deux nations. Or on remarque juſtement le contraire dans la deſtinée des mots qui ont ſervi à caractériſer les uſages & les mœurs anciennes de ces mêmes peuples. Car on a conſtamment vû ces termes s'avilir en même tems que les mœurs ont changé : ainſi les mots *prude*, *prudhomme*, *proueſſe*, *bonshommes*, *Canaille*, *Chicane*, *Haro*, *Clameur*, *Vilain*, *Schalck*, *Knecht*, & mille autres ſemblables, ont été relégués aux halles, & ne ſont plus d'uſage que dans le ſtyle comique ou même burleſque. Il en eſt de ces mots ſurannés, comme des habits faits à l'antique, dont on ne ſe ſert plus que dans certaines cérémonies, & dans les ſpectacles où l'on repréſente quelque évenement des ſiecles paſſés. Pour les termes uſités dans les anciens tribunaux, on les connoit bien moins encore que les monnoies de ces tems-là : la ſignification des mots *Mall*, *Mallum*, *admallare*, *adrhamire*, *Wergeldum*, *Wedredum*, *Antruſtio*, *Vadium*, *Placitum*, *eſſonium*, *ortare*, *ſunni*, *Thungini*, *Dingmann*.

mann, *Gaſachio*, *intertiare*, *Mundeburdium*; la vraie ſignification, dis je, de ces mots & de cent autres, s'eſt entierement perdue dans le tems que les formalités de l'ancien Barreau ſont tombées en décadence.

Il eſt de la derniere importance pour l'hiſtoire, de bien ſuivre les variations par où ont paſſé, quant à leur ſignification, les termes qui ont été conſacrés aux uſages, aux mœurs anciennes. Semblable à un Géographe qui veut donner le plan des provinces de l'Empire Romain, l'Hiſtorien doit déterminer le vrai ſens de ces vieux mots.

La Religion. Le Droit Canon, qui a été la partie législative du Gouvernement hiérarchique, porte principalement ſur les Decrétales, lesquelles, ſimples dans leur origine, & variées dans leurs effets, s'introduiſirent & regnerent en quelque ſorte dans toutes les parties de l'Occident. D'un côté, les decrets des anciens Papes augmentoient la puiſſance eccléſiaſtique, tandis que de l'autre ils régloient & autoriſoient les offices du culte public: & ce qui rend le ſyſteme hiérarchique ſi difficile à déchiffrer, c'eſt juſtement cette complication des intérêts politiques & civils de l'Europe, & de ceux de la religion, lesquels tantôt détachés, & tantôt combinés enſemble, parurent ſous une infinité de formes différentes. Une choſe que l'on ne peut conteſter à moins de manquer à la bonne foi ou d'être dans l'erreur, c'eſt que le ſyſteme hiérarchique dont nous parlons, a été utile aux peuples & néceſſaire à la religion, dans ces ſiecles d'ignorance & de barbarie où il s'eſt établi: dans ces temps où les droits de la raiſon & de l'humanité étoient également foulés aux pieds, il falloit des remedes violents à de grands maux: & l'on ne devoit pas craindre de trop effrayer des gens qui étoient en poſſeſſion d'effrayer les autres. Un autre bien que l'Egliſe fit encore à l'Europe, c'eſt qu'elle obligea les Nobles à reſtituer une partie des biens qu'ils avoient mal acquis. Mais, pour aſſurer aux Canons & aux Decrétales l'effet qu'on déſiroit, on fut dans la néceſſité de donner aux préceptes de la religion la force des loix pénales. Ce mal étoit inévitable, puiſqu'il s'agiſſoit de ſoumettre des hommes dépour-

pourvus de principes & de ſentiments. Ainſi une ſoumiſſion abſolue, tel fut le point fondamental de ce Code ſpirituel; de ſorte que par ſa nature ce ſyſteme interdit toute eſpece d'examen, & devint par conſéquent incompatible avec les Sciences & les Lettres, dont le plus ferme appui & le premier effet, eſt la liberté de faire des recherches & de les diſcuter.

Le Commerce, les Sciences, les Arts & les Lettres.

Les Arts méchaniques naiſſent du beſoin: mais la culture des Lettres eſt une des ſuites de l'aiſance. Dès que les ſentiments de liberté & de patriotiſme commencerent à s'emparer des eſprits, les Villes les plus riches aſpirerent à l'indépendance: mais, pour atteindre à ce but, il falloit des efforts: de ſorte que les reſſources ordinaires ſe trouvant bientôt épuiſées, on fut obligé de chercher des moyens pour y ſuppléer. Dans cette vue, les Italiens, placés au milieu de la Méditerranée, prirent la voie du commerce: Alexandrie & Caffa devinrent les entrepôts du commerce des Génois & des Vénitiens. Ce qui avoit réuſſi en Italie, fut enſuite imité en Flandres: Bruges & Anvers ſoumirent à leur induſtrie tous les Etats voiſins: les citoyens de Wisby, de Lubeck, de Revel & de Stralſund, animerent le commerce dans toute l'étendue de la Mer Baltique. Pour ſe maintenir, ces différentes villes furent dans la néceſſité de faire des Confédérations; & comme aucun de ces petits Etats n'avoit la force d'opprimer les autres, les traités confédératifs qu'ils firent entr'eux, furent ſtipulés conformément aux loix de la droiture & de l'humanité.

Ainſi la Nature dont ces peuples ſuivirent alors les impreſſions & l'inſtinct, fit plus en peu de tems pour les bonnes mœurs, que n'avoit fait pendant pluſieurs ſiecles l'étude épineuſe de la Scholaſtique. C'eſt qu'en rafinant ſur les idées morales, & en les diviſant à l'infini, on ne fait qu'énerver les ſentiments: on eſt ſemblable aux Tireurs d'or, entre les mains de qui les fils de ce métal deviennent ſi déliés, qu'enſuite ils ne peuvent plus ſervir qu'au luxe & à l'oſtentation. Rien n'eſt plus aiſé que de donner un vernis luiſant aux vertus politiques: & malheureuſement la contagion des vertus factices peut, dans un

court eſpace de temps, ſe répandre ſur toutes les parties d'un Etat: ce ſont des plaques, qui travaillées par des batteurs d'or peuvent à la fin couvrir de très grandes ſurfaces, mais qui n'acquierent ce prétendu avantage qu'aux dépens de leur ſolidité.

Une autre obſervation que l'hiſtoire des Villes confédératives du Nord nous donne lieu de faire, c'eſt qu'un pays eſt toujours de bonne foi, lorſqu'il commence à ſe former, & qu'il dreſſe les premiers plans néceſſaires pour ſon aggrandiſſement ou pour ſa ſûreté: le ſophiſme ne vient qu'après. En effet on ne vit les vices & les écarts que produit l'eſprit d'intérêt, pénétrer dans ces Villes commerçantes, qu'après qu'elles eurent fourni une certaine carriere ſous les loix de la juſtice & de la bienfaiſance.

Le plus grand bien que le commerce & l'aiſance qui en eſt le fruit, nous ayent procuré, c'eſt la culture des Lettres & des Beaux-Arts. Les premiers Mécenes que l'hiſtoire de ces tems là nous préſente, furent des Négociants, qui protégerent les Lettres, d'abord par raiſon d'intérêt, & enſuite par goût: bientôt la fermentation devint générale; partout les droits des différens ordres de citoyens ſe heurtoient réciproquement en quelques points; & la chaleur avec laquelle chacun défendit les ſiens, produiſit des étincelles de lumiere, qui annoncerent une nouvelle époque. Les grandes révolutions ne ſont jamais l'effet des ſeules cauſes purement accidentelles. L'effervescence des eſprits avoit préparé l'Occident à recevoir les connoiſſances de l'Orient, lorſque les fugitifs de Conſtantinople, pour ſe ſouſtraire à la barbarie du Turc vainqueur, apporterent en Italie les Sciences qui avoient autrefois produit de ſi grandes choſes dans la Grece: ſi la Ville de Conſtantinople fût tombée entre les mains des Muſulmans vers le dixieme ſiecle, cette priſe ne nous eût pas été plus avantageuſe rélativement à la culture des Lettres, que ne l'a été la priſe de Jeruſalem. Ce n'eſt pas à une circonſtance particuliere qu'il faut attribuer des effets univerſels: mais c'eſt à l'univerſalité des diſpoſitions qui rendent les hommes habiles à profiter d'un évenement: on a porté les connoiſſances

ces de l'Europe en Aſie: cependant elles n'y ont jamais produit de grands effets: l'état littéraire de cette belle partie du Monde eſt encore aujourd'hui à peu près ce qu'il fut après Zoroaſtre, Confucius & les Diſciples de Pythagore. La raiſon de cet engourdiſſement des Aſiatiques vient uniquement de la forme invariable des corps nationaux de ce pays; au lieu que l'Europe toujours tenue en haleine par un violent eſprit de fermentation, eſt devenue propre à goûter de nouvelles idées, & eſt enfin ſortie de ſon état de ſtupidité.

On le vit d'une maniere frappante à l'établiſſement du Droit public, qui ſuivit de près ces grandes révolutions. Alors on commença à faire des Traités vraiment dignes de ce nom: à la place des Treves anciennes, on vit naître des pacifications générales. A l'exemple des polices particulieres, la police générale des divers Etats de l'Europe s'établit peu à peu: les peuples du Midi & de l'Occident furent les premiers à ſuivre ce ſyſteme nouveau: dans la ſuite, les Nations de l'Orient & du Nord y accéderent. L'inſtinct brut & féroce ne décida plus de la paix ni de la guerre; mais on évalua les raiſons de craindre & d'eſpérer, ſur l'échelle des intérêts publics. La multiplicité de ces intérêts rendit en premier lieu les hommes vigilants & attentifs: enſuite ils devinrent prudents & circonſpects, & enfin pleins de ruſes & de fineſſes.

Je penſe avoir ſuffiſamment prouvé par toutes les obſervations précédentes, que l'office de l'Hiſtorien conſiſte, ſurtout dans une hiſtoire univerſelle, à combiner avec le fil de ſa narration, tout ce qui appartient aux Loix, aux Uſages & aux Mœurs, aux Rites, à la Religion, aux Lettres & au Commerce, enfin au Droit public. Je penſe avoir prouvé combien il eſt néceſſaire de ſaiſir & de peindre l'origine, les nuances & les progrès de ces parties conſtitutives de la vie ſociale, ſelon la nature & l'uniformité des indices que l'on en trouve, ſoit dans les auteurs dignes de foi, ſoit dans l'ordre naturel & ſucceſſif des évenements.

Tel eſt le Plan que je ſuis: telles ſont les idées qui me dirigent dans le corps de l'Hiſtoire univerſelle, auquel je travaille; & qui renfermera une ſuite exacte des évenements publics rangés ſelon l'ordre des Epoques qui ont le plus influé, ou ſur le bonheur, ou ſur le malheur de l'Europe.

Pour munir mon hiſtoire de preuves inconteſtables, j'y ferai entrer le précis des Traités, Alliances, Diplomes & Actes authentiques qui ſe trouvent dans les Corps diplomatiques de Dumont, Rymer, Goldaſt, Mabillon, Leibnitz, Eccard, Londorp, Lunig, Ludwig, Menken, Martene, Lamberti &c. & comme il y a dans ces recueils immenſes de Diplomes un grand nombre d'Actes qui ne tiennent qu'à des parties acceſſoires de l'hiſtoire univerſelle, je m'attacherai à y puiſer ce qui concerne les uſages de chaque ſiecle, & ce qui peut me mettre en état de placer ſous les yeux de mes Lecteurs un Tableau vrai & ſuccint de la ſorte de Droit public qui a eu lieu entre les Princes & les Etats Européens.

Pour ce qui regarde la législation, on trouvera à la fin de chaque Epoque l'eſprit des loix, tant civiles que criminelles, qu'on aura ſuivies, avec une Deſcription des uſages appartenant au Barreau, entant que dépoſitaire des Droits & des Privileges de chaque nation: & afin que l'on puiſſe bien juger de l'influence du Droit Canon ſur la Juriſdiction des Princes, je m'attacherai également à faire connoître l'origine, les progrès & les variations du ſyſteme hiérarchique.

Quant aux coûtumes fondées ſur l'intérêt national, ou ſur l'intérêt des Souverains, du Commerce, des Lettres, de la Religion, ou des Mœurs, je me ferai un devoir d'y rapporter les principaux évenements, & de caractériſer les nations par une ſuite de

te de Tableaux propres à conduire le lecteur au point où ces Nations ſe trouvent aujourd'hui.

Le but de mon ouvrage eſt donc de faire ſervir l'hiſtoire univerſelle à une connoiſſance réfléchie de la conſtitution politique, civile, morale & littéraire des divers Etats de l'Europe. Cependant on ne doit point oublier que c'eſt une hiſtoire, & non pas une ſuite de ſyſtemes philoſophiques, que j'annonce: le narré ſimple & méthodique des faits en ſera le corps: les réflexions n'y paroîtront que comme des conſéquences néceſſaires & lumineuſes. La Philoſophie n'y portera point ſa ſéchereſſe; & ce ne ſera, pour ainſi dire, qu'en ſe tenant derriere le rideau, qu'elle préſidera à l'ouvrage.

SUR

LES PHYSIONOMIES.

PAR MR. DE CATT. (*)

Le caractere actuel de l'homme eſt imprimé ſur tout ſon extérieur, & l'ame ſe peint particulierement dans la Phyſionomie. Lorſque le principe de nos penſées & de nos actions eſt calme, toutes les parties, tous les traits du viſage annoncent la tranquillité de l'intérieur: lorſque l'ame eſt agitée, les paſſions ſe montrent ſur le viſage; elles en alterent les proportions & les linéamens; comme un lac agité altere l'image des objets qui s'y peignent.

Chaque paſſion, chaque nuance de la même paſſion, ſe montre par des ſignes qui lui ſont propres, & dont le ſpectateur le plus ſtupide ſent l'énergie; la phyſionomie eſt un livre où la nature écrit l'état actuel de l'ame avec des caracteres qu'elle ne laiſſe inconnus à perſonne. Ces caracteres, ces changemens dans les traits, ces altérations dans leur proportion laiſſent avec le tems, lorſqu'on les réitere ſouvent, une impreſſion durable qui nous annonce la paſſion qui l'a cauſée; & cette paſſion entre eſſentiellement dans le caractere, puiſqu'elle eſt habituelle.

Ces obſervations paroiſſent inconteſtables: on ajoute, que quoique les vices & les vertus, les goûts & les talens n'ayent par eux-mêmes rien de commun avec la matiere, cependant l'ame ne peut ni

(*) Lû le 28 Avril, 1768. Ce Mémoire en a occaſionné d'autres qui forment une eſpece de Controverſe entre Mrs. *de Catt* & l'Abbé *Pernety*. Ces Pieces paroîtront dans les Volumes ſuivans.

ni agir ſur les objets extérieurs, ni en être affectée, que par le miniſtere du corps; que par conſéquent, la différence d'organiſation contribue à la différence des caracteres; que les divers tempéramens prêtent à l'eſprit divers goûts & diverſes averſions; que le tempérament ſe connoît par l'extérieur; qu'on peut donc juger de l'intérieur par l'extérieur, connoître les qualités de l'ame par les traits du viſage; en un mot que la Phyſionomie tient lieu de cette fenêtre que Momus déſiroit.

Je ne m'attacherai pas à démêler le faux qui, dans cette propoſition comme dans pluſieurs autres, eſt mêlé avec un peu de vrai: j'examinerai, s'il nous ſeroit avantageux de connoître les hommes par la Phyſionomie? Cette diſcuſſion ne me ſemble pas inutile pour nous faire éviter les artifices des hommes, ou du moins pour détruire nos préjugés.

La connoiſſance des hommes par leur phyſionomie ſeroit utile à celui qui la poſſéderoit, très favorable aux bons & peu dangereuſe pour les méchans. Que reſteroit-il à déſirer à celui qui, d'un coup d'œil, liroit dans l'ame des hommes; qui pénétreroit les diſpoſitions de leur eſprit & de leur cœur? Il pourroit mettre chaque homme à ſa place, & ſurtout, il ne prendroit jamais un Sinon pour un Pilade. Une pareille connoiſſance ſeroit un thréſor pour un homme, & celui qui la poſſéderoit, ſeroit un thréſor pour le Public. Quel bonheur, ſi l'on trouvoit un ſemblable thréſor dans chaque homme?

Les bons y gagneroient infiniment. L'uſage du monde inſpire aux hommes une défiance générale; il faut que l'homme de probité juſtifie ſon titre par ſes actions; cette preuve demande beaucoup de tems, & nous ne la trouvons ſuffiſante qu'après pluſieurs expériences: car ſouvent le démon ſe transforme en ange de lumiere. En attendant le bon ſouffre. A-t-il beſoin de nos bons offices? Nous les différons juſqu'à ce qu'il ait mis ſa probité dans tout ſon jour, les années ſe paſſent, la vie s'écoule, & l'homme vertueux gémit ſous le poids de l'infortune & de la miſere. Eſt-il en état de nous rendre ſervice? Nous ne profi-

profitons pas de ſes bonnes intentions, de ſes talens, de ſon génie; parce que nous ne les connoiſſons pas, parce que nous doutons de la droiture de ſes intentions; & ce doute ſeul ſuffiroit pour rendre inutiles ſes talens & ſon génie, quand même nous les connoîtrions; & il arrive ſouvent que nous ne les connoiſſons pas.

Nous ne ſommes pas les ſeuls à reſſentir cette perte: elle s'étend ſur l'homme à talens, & ſur tout le Public. Combien d'hommes ſeroient inſcrits aux faſtes de la vraie gloire, & mis au nombre des bienfaiteurs du genre humain, ſi l'on avoit connu leur mérite? Combien d'hommes vivent & meurent dans l'obſcurité qui auroient brillé dans le gouvernement des Provinces, ou dans le commandement des armées? Le génie pour les Beaux-Arts n'a ſouvent beſoin que de lui-même pour ſe développer; un ſimple Jardinier* ſe place par la ſeule force de ſon génie & de ſes lectures à côté des premiers Géometres. Un Meunier* ſans aucun ſecours égale les plus grands Peintres. Une femme* s'éleve toute ſeule de la fange du peuple au ſommet du Parnaſſe. Stone avoit fait ſes calculs dans le jardin, comme dans un cabinet. Rembrand, à la porte de ſon moulin, deſſinoit ſur une ardoiſe. Notre femme poëte a fait de beaux vers dans la pauvreté auſſi bien que dans un état plus heureux. Mais les talens pour les ſciences ſublimes de gouverner & de défendre les Etats ne ſe développent jamais qu'à la faveur des circonſtances. A quoi auroient ſervi le génie & le courage de Sulli, ſi les circonſtances ne l'avoient pas mis dans le conſeil & dans l'armée du grand HENRI. Que les circonſtances ne s'offrent pas, (& elles ſe préſentent bien rarement:) le mérite reſte enſéveli dans les ténebres (*); ah! qu'il ſeroit avantageux que la phyſionomie ſuppléât aux circonſtances!

*Stone, Angl.
*Rembrand
*Mdme K---

Au contraire, que perdroient le méchant & l'homme deſtitué de mérite, s'ils étoient connus par leur phyſionomie? Un bien apparent

(*) A la rigueur, ſi le génie n'a pas beſoin des circonſtances pour ſe développer, il en a beſoin pour être connu. Il faut qu'un Lord ſache qu'en Stone il ſe trouve un Neuton dans ſon jardin; qu'un Peintre s'arrête au Moulin où Rembrand travaille. Dorſet fit un très agréable poëte (*Prior*) d'un garçon cabaretier.

rent & court, quelques jours d'une bonne réputation; car il eſt rare que le vice & l'incapacité ſe cachent longtems à des yeux qui ſavent & veulent voir. Les actions décelent bientôt les hommes de cette ſorte; leur phyſionomie les découvriroit d'abord, & nous empêcheroit de les confondre avec l'homme de mérite, à qui il échappe quelque faute.

Quel déſagrément, ſi quand on ſe promene dans un jardin, on étoit obligé de goûter de chaque fruit & de ſouffrir de l'apreté de mille avant que de jouir de la douceur d'un ſeul! Ne ſeroit-il pas infiniment agréable & avantageux, ſi l'on pouvoit juger d'un homme, comme on diſtingue le bon fruit du mauvais; par l'extérieur, & pour ainſi dire, par la phyſionomie? Mais l'homme n'eſt pas un melon; un fruit ne peut pas changer ſa qualité, & un homme change ſon caractere, ou du moins n'agit pas toujours en conſéquence.

Je n'entre pas dans la queſtion abſtruſe de la Liberté. Que l'homme ſoit un homme, ou qu'il ſoit la marionnette décrite par Horace (*), ſes actions ſe trouvent ſouvent oppoſées à ſon caractere: c'eſt un fait que l'expérience journaliere met hors de doute; il n'eſt pas néceſſaire que nous cherchions des anecdotes qu'on puiſſe aſſocier à l'hiſtoire de Socrate & de Zopyre. Ceux-même qui vantent le plus la certitude des connoiſſances tirées de la phyſionomie, conviennent que les Phyſionomiſtes ne ſauroient prédire ce qu'un homme ſera, quoiqu'ils prétendent pouvoir dire ce qu'il devroit être. Ils avouent qu'ils ne connoiſſent point ce qu'il fera, quoiqu'ils aſſurent qu'ils devinent ce qu'il pourroit faire. (**)

Eſt-on bien avancé lorſqu'on ſait ce qu'un homme pourroit être & ce qu'il pourroit faire ſuivant les circonſtances, & qu'on ignore les

(*) — — *Nervis alienis mobile lignum.*
Horat. Serm. Lib. II. Sat. VII. v. 83.

(**) Voyez les *Lettres ſur les Phyſionomies.*

les circonſtances dans leſquelles il ſe trouvera & de plus la maniere dont il ſe conduira dans des circonſtances connues? On riſque d'accorder ſa confiance à une phyſionomie ouverte, qui nous trahira dans une occaſion importante, & de ſe défier d'une phyſionomie déſavantageuſe, qui nous auroit bien ſervis dans une occaſion déciſive.

Un Philoſophe exact me ramenera ſur mes pas, & me repréſentera que j'ai peut-être accordé trop facilement qu'on puiſſe connoître le caractere des hommes à leur phyſionomie. Il n'eſt pas, me dira t-on, queſtion ici de connoître la paſſion qui agite actuellement un homme, ni celle qui l'agite le plus ſouvent: il eſt queſtion de juger de l'intérieur par l'extérieur, de démêler les différens tempéramens, & juſqu'à la moindre nuance de chaque tempérament. Dans ce ſens la phyſionomie conſiſte dans des rapports de traits ſi ſubtils qu'ils échappent au pinceau le plus délicat. Qu'on nous fixe la différence des phyſionomies; qu'on nous diſe en quoi la phyſionomie conſiſte, & ce qu'elle eſt!

Qui peut en donner une deſcription exacte? Où ſont les regles ſûres de l'art du Phyſionomiſte? Chacun juge des phyſionomies à ſa façon par une eſpece d'inſtinct, ou par prévention. On a ſouvent obſervé que Deſcartes aimoit les femmes louches, parce que ſa nourrice avoit été louche; une liaiſon d'idées auſſi accidentelles que celles-là, nous guide ſouvent dans ce labirinthe, ſans que nous nous en appercevions. Un compétiteur s'eſt oppoſé à notre fortune; un antagoniſte a détruit un projet chéri: un précepteur nous a traités durement dans l'enfance: cela ſuffit pour que nous regardions avec averſion toutes les phyſionomies analogues à celles de ces hommes que nous haïſſons.

Qui ne voit pas que la prévention & la liaiſon accidentelle des idées ſont des guides fort infideles? Se fixera-t-on à l'inſtinct? Mais eſt-il bien vrai que l'inſtinct ſoit ſûr dans l'homme naturel? Et s'il l'eſt, l'homme ſocial a-t-il conſervé cet heureux préſent de la nature dans toute

toute ſon intégrité? Quand même l'inſtinct ſeroit infaillible, qui ſe vantera de le diſtinguer toujours de la prévention? Celle-ci eſt ſi commune & elle a ſi fort étendu ſon empire ſur les jugemens des hommes, qu'elle leur fait prendre pour indice de l'intérieur, jusqu'à l'extérieur le plus étranger à l'homme. Il n'eſt pas rare que l'habit change ou du moins altere l'idée qu'on ſe forme de l'homme qui le porte. Il en réſulte que la connoiſſance des phyſionomies eſt dangereuſe pour celui qui la poſſede. Elle l'induit ſouvent en erreur, & le précipite dans des jugemens faux.

Mais fuſſent-ils toujours conformes à la vérité, ces jugemens, les conſéquences n'en ſeroient pas moins pernicieuſes. Il n'eſt point d'homme parfait; la connoiſſance des phyſionomies nous montreroit le mal comme le bien; & la plûpart des hommes s'arrêtent au mal, ſans conſidérer le bien qui le contrebalance, & même qui le ſurpaſſe. S'il eſt avantageux d'être connû à la phyſionomie par celui qui fait plus d'attention au bien qu'au mal, il eſt fort nuiſible de l'être par celui qui ſe laiſſe frapper par le mal, & néglige le bien.

Puisque la connoiſſance du caractere habituel des hommes par leur phyſionomie, n'a pas des fondemens auſſi ſolides que la connoiſſance de l'état actuel de leur ame; puisque les hommes qui jugent du caractere par les phyſionomies, ſont naturellement ſujets à l'erreur, & qui plus eſt, aux préventions & aux préjugés dont ſont exempts ceux qui jugent des paſſions qui agitent l'ame; puisque les hommes dont on juge, peuvent ne pas ſuivre les inclinations qu'ils ont, & que leur phyſionomie nous indique, & qu'il eſt impoſſible qu'ils n'éprouvent pas les paſſions qu'ils éprouvent: je conclus, qu'autant qu'il eſt utile aux hommes de connoître l'état actuel de l'ame par l'extérieur, autant il leur eſt utile d'être privés de la connoiſſance du caractere par les phyſionomies; d'autant plus qu'ils ont un moyen infaillible, quoique long, de connoître ceux qu'ils deſtinent à des occupations importantes, c'eſt de les éprouver & de les ſoumettre à de fortes épreu-

ves, ſurtout lorsqu'ils les font paſſer à un état conſidérablement plus élevé que leur premiere condition.

La connoiſſance la plus parfaite des phyſionomies ne diſpenſeroit pas de ces épreuves, tant que les hommes ſeront tels qu'ils ſont, c'eſt à dire, tant qu'ils peuvent démentir leur caractere, ou prendre dans des occaſions importantes pour guide de leur conduite, des idées obſcures plutôt que la raiſon.

Mais ne ſeroit-il pas avantageux que l'homme agît toujours d'une maniere conforme à ſon caractere, que ſon caractere fût diſtinctement gravé ſur ſon extérieur, que le ſpectateur le moins pénétrant pût déchifrer, ſans ſe tromper, ces traits gravés par les mains de la nature, qu'il ſçût éviter les préjugés & la prévention?

Je n'entrerai point dans ces queſtions. Attribuez-vous l'exiſtence des choſes au hazard, ou à une fatalité aveugle, équivalente au hazard? La ſolution de ces queſtions vous eſt inutile. Reconnoiſſez-vous un Etre ſupreme qui a tout produit par ſa puiſſance, d'une maniere conforme à ſa ſageſſe infinie? Ces queſtions ſont téméraires; & ſans pénétrer les raiſons qui ont dirigé le choix de l'Etre des êtres, vous devez avouer que tout eſt bien, parce que tout eſt tel que l'a voulu celui qui ne ſe trompe jamais, quoique tout ne rempliſſe pas les vœux des hommes, en qui rien n'eſt illimité que le déſir du bonheur, qui leur a été donné par l'Auteur de toutes choſes, lequel ne fait rien en vain.

OBSERVATIONS
D'ÉCLIPSES DE SATELLITES DE JUPITER
FAITES A' L'OBSERVATOIRE ROYAL.
PAR Mr. JEAN BERNOULLI.

Ce ſont des obſervations choiſies ſur un beaucoup plus grand nombre que je rapporterai; j'omets toutes celles que j'ai faites avec d'autres lunettes ou dans des circonſtances peu favorables, ou que je crois, par d'autres raiſons, peu propres à l'uſage qu'on fait des éclipſes des Satellites de Jupiter. Celles que je donne ont été faites avec une lunette achromatique de Dollond, à triple objectif, d'environ 3½ pieds de foyer, & en me ſervant de l'aſſortiment d'oculaires N°. 2. qui groſſit environ 80 fois. J'ai déterminé le tems vrai pour les trois premieres obſervations, par des hauteurs correſpondantes, & pour les autres par la méthode des culminations, que j'ai expoſée dans un Mémoire qui n'eſt pas encore imprimé.

Année.	*Mois.*	*Jour.*	H.	M.	S.	
1768,	Mai,	30.	10.	54.	17	Tems obſervé
			10.	53.	0	Tems vrai.

Emerſion du 2^d^. Satellite de Jupiter; on voyoit bien les bandes de la Planete. (*) Le Satellite apparoit ſubitement & bien au milieu du champ de la lunette.

(*) Quand je dis que je voyois bien les bandes, je parle rélativement à l'inſtrument dont je me ſers; j'aurois pu ſans doute les mieux diſcerner avec un inſtrument d'une plus grande force.

Année.	*Mois.*	*Jour.*	H.	M.	S.	
1768,	Juin,	12.	9.	45.	5.	T. O.
			9.	44.	44.	T. V.

Em. du 1^r^. Sat. L'obſerv. eſt bonne en apparence, mais l'œil étoit un peu fatigué & ne diſcernoit pas au mieux les bandes.

1768,	Juillet,	1.	10.	31.	48.	T. O.
		1.	10.	26.	16.	T. V.

Em. du 2^d^. Sat. Obſerv. bonne; on voyoit bien les bandes. Il ne reſte qu'un petit doute de 2″ ou 3″ ſur l'heure de l'horloge.

1770,	Avril,	5.	14.	42.	37.	T. O.
			14.	32.	7.	T. V.

Immerſion du 2^d^. Sat. obſ. bonne à une petite ondulation près, qu'on voyoit ſur le diſque de la planete.

1770,	Mai,	26.	13.	11.	17.	T. O.
			13.	2.	19.	T. V.

Imm. du 1^r^. Sat. obſ. bonne à tous égards.

1770,	Juillet,	13.	10.	19.	57.	T. O.
			9.	59.	15.	T. V.

Em. du 1^r^. Sat. obſ. bonne à tous égards.

1770,	Août,	5.	10.	34.	19.	T. O.
			10.	13.	31.	T. V.

Em. du 1^r^. Sat. il ſort de l'ombre très petit, & à cauſe du clair de Lune les autres Satellites paroiſſoient auſſi plus petits & les bandes moins diſtinctes. Ce qui fait que l'obſervation me paroit un peu douteuſe.

ERRATA.

Tome XXIV. Page 101. ligne 9, d'en bas, s'approchera, *lisez* — approchera.

p. 201. l. 15, denx, *lisez* — deux.

p. 431. l. 15, baignér', *lisez* — baignée.

p. 457. l. 11, le beauté, *lisez* — la beauté.